DE CONCHOIDIBUS ET CISSOIDIBUS EXERCITATIONES GEOMETRICÆ.

Autore R. P. PETRO NICOLAS, è Societate JESU.

TOLOSÆ,
Apud J.G. & A. PEKIOS, Comitiorum Fuxensium, Illustrissimi & Reverendissimi Archiepiscopi Albiensis, Collegiique Tolosani PP. Soc. JESU, Typographos, sub Signo Nominis JESU. 1697.

Cum Facultate & Approbatione.

ILLUSTRISSIMO VIRO DOM. DOM.

GEORGIO MATHIÆ D'AUTERIVE,

IN SUPREMA TOLOSATUM CURIA SENATORI INTEGERRIMO.

QUOD mihi dudum in votis fuit, gaudeo nunc evenire, SENATOR INTEGERRIME, ut publicè profiteri possim quantum Te colam, quantúmque Tibi & clarissimæ Familiæ Tuæ, pro singulari illa qua me semper complexi estis benevolentia obstrictus addictúsque sim. Atque utinam illustre aliquod ac perpetuò duraturum possem relinquere observantiæ meæ, gratique animi monumentum: Quod in me est, nunc offero exiguum illud quidem, quod tamen ut spero non ingratum erit. Mathematicas disciplinas non solùm amas & magni facis ut docti omnes, sed apprimè calles, quod perpauci. Quantùm in iis excelleres jam olim adolescens ac penè puer demon-

strasti. Nunquam excidet memoria celeberrimæ illius diei, cùm spectante Senatu Tolosano cæterisque ordinibus civitatis, de universa Mathesi, quod à nemine anteà tentatum fuerat, quærentibus disputantibúsque viris eruditis ita respondisti, ut omnes in admirationem raperentur. Ac licet ad alia deinde studia Te contuleris, natus ad omnia, nullúmque sit seu politioris literaturæ, seu doctrinæ reconditæ genus quod incredibili quadam ingenii vi, & capacissima mentis intelligentia non comprehenderis, sæpe tamen testatus es inter omnes artes ac disciplinas nulla Te magis quàm Geometria delectari, præsertim interiore illa & subtiliori quæ difficillimam curvilineorum dimensionem aggreditur. Non displicebit ergo libellus hic qui totus in ejusmodi argumento versatur, atque Tibi, VIR CLARISSIME, eò etiam nomine acceptior esse debet, quòd illius scribendi ansam mihi causámque ipse dedisti. Cùm enim inter nos aliquandò, ut sæpè facimus, de sublimibus Geometrarum inventis colloqueremur, ac fortè de Conchoide sermo incidisset, dixisti præclarum quidem de illius quadratura extare Theorema apud Laloveram nostrum in Appendice ad libros de Cycloide, verùm quod maximè dolendum erat, demonstrationem omissam, eámque à nemine hactenùs exhibitam fuisse, nec mirum, perdifficilem enim eam videri. Hinc mihi primùm Conchoidem examinandi mens injecta, Antiquam illam dico de qua Nicomedes librum scripserat, qui temporis injuria periit, & cujus descriptionem habemus apud Eutocium & Pappum. At ecce dum hanc lineam propiùs diligentiúsque intueor, novus rerum mihi nascitur ordo, aliæ quippe innumeræ ac diversi planè generis & formæ sese obtulere Conchoides. Quemadmodùm enim illa à circulo ortum habet, sic intelligi potest cuicunque figuræ suam Conchoidem, nec unam solùm sed infinitas respondere. Adverti etiam quod mihi jucundissimum fuit, eodem propè modo & Diocleam à circulo & ab omnibus cujuscunque generis Figuris Cissoides alias procreari, quare maximam esse Conchoides inter Cissoidésque affinitatem; quod quidem haud scio an ullus antea observarit, neque dubitavi cùm valdè similis sit utrarúmque genesis, inde communi methodo iisdémque ferè principiis deduci posse cætera quæ circa Figuras Geometræ solent inquirere, ut Tangentes, & Solida circa basin aut axem, Centra gravitatis, ac demum Quadraturam ipsam. Cùm igitur eò curas omnes cogitationésque convertissem, scripsi de his libros quinque, quibus non solùm ea quæ his Exercitationibus continentur, sed multò plura comprehenderam: nam aliis multis harum Curvarum speciebus insistebam, earúmque proprietates fusè persequebar. Atque hæc omnia cùm deinde Tecum communicassem, VIR CLARISSIME, ac Tu pro singulari humanitate Tua examinasses, exinde me ut ea prælo committerem hortari non desiisti. Nempe cùm inter eas lineas quas veteres Geometræ contemplati sunt, nobilissimum locum Conchoides Cissoidésque teneant, dicebas earum tractatione, ac novarum ejusdem generis accessione Geometriam non pa-

rùm illustratum iri: præsertim cùm eam partem Recentiores nondum occuparint, nam de sola Nicomedea Lalovera primùm, deinde Barrovius, præclarè quidem sed breviter & strictim egerunt, de Dioclea VVallisius, Conchoides in universum & Cissoides attigit nemo. At ego licet obsequi voluntati tuæ maximè vellem, hæsi tamen aliquandiù, quòd in animo esset huicce lucubrationi Curvarum ipsarum dimensionem adjungere, ac superficierum quæ ex iis in orbem ductis efformantur, quod etiam sciebam Te valde desiderare. Verùm re attentiùs perspectâ, cognovi longioris id esse operæ, ac tantæ difficultatis, ut non meum solùm, quod sentio quàm sit exiguum, sed etiam præstantissimorum Geometrarum ingenium & industriam exercere valeat. Si quid igitur hac in parte occurrat deinceps, quod Tibi placere posse intelligam, SENATOR INTEGERRIME, *ejus Te confestim ut soleo participem faciam. Interim hæc quæ nunc offero benignè accipe, & nos ut facis amare perge.*

FACULTAS SUPERIORUM SOCIETATIS JESU & Applicatio Privilegii Regii.

EGo infra-scriptus Præpositus Provincialis Societatis JESU in Provincia Tolosana, juxta privilegium concessum à Regibus Christianissimis Henrico III. 10. Maii 1583. Henrico IV. 20. Decembris 1605. Ludovico XIII. 14. Februarii 1612. & Ludovico XIV. 25. Decembris 1650. quo prohibetur omnibus Librariis & Typographis, nè libros ab ejusdem Societatis hominibus compositos absque permissu Superiorum imprimant; concedo ut Exercitationes Geometricæ Patris Petri Nicolas ex eadem Societate, judicio trium ejusdem Societatis approbatæ à Joanne Guillelmo, & Antonio Pekiis Typographis Tolosanis Typis mandentur. Datum Turnone die 12. Augusti 1696.

FRANCISCUS PERRIN.

ERRATA.

Pag. 16. *lin.* 16. AB. *lege* AC. *pag.* 28. *lin.* 19. AMP *lege* AMPO. *pag.* 34. *lin.* 8. ADI *lege* ABI. *pag.* 39. *lin.* 5. constituta, *lege* constituti. *pag.* 45. *lin.* 5. data hyperbolæ quadratura, *deleantur hæc verba. pag.* 65. *l.* 3. ad circulum, *lege* ad semicirculum. *pag.* 68. *lin.* 30. BFGHZ. *lege* BFOHZ, *pag.* 72. *lin.* 5. sitque illius centrum A. *lege* sitque illius axis transversus AB. *pag* 74. *lin.* 17. *lege* (*fig* 21.) *pag.* 88. *linea ultima* BME, *lege* BDE. *pag.* 92. *lin.* 12. quadruplum. *lege* quadrupla. *pag.* 95. *l.* 34. AE. *lege* AF. *pag.* 96. *l.* 19. *leg.* (*fig.* 6.) *pag.* 97. *lin.* 25. EOT. *leg.* BEOT. *pag.* 103. *lineis* 13. 16. 17. AKM. *leg.* AKH. *pag.* 119. *lin.* 24. SD, *lege* SO. *pag.* 129. *l.* 7. outem. *leg.* autem. *pag.* 133. *lin.* 4. AH *lege* AG. *pag.* 135. FC. *l.* FG. *pag.* 138. *l.* 8. *ed*, *et.* Ergo, *lege et*, *dt.*

SYNOPSIS

EORUM QUÆ IN HOC OPERE continentur.

EXERCITATIO PRIMA.

DE CONCHOIDIBUS.

PRÆMISSA generatione universali Conchoidum, ex qua sequitur unamquamque lineam sive rectam sive curvam suam Conchoidem habere, imò infinitas, Methodos tradimus generales ad dimensionem omnium Conchoidum cujuscunque generis & naturæ fuerint. Atque has methodos deinde applicamus triplici Conchoidum speciei; nimirum Conchoidi antiquæ seu Nicomedeæ omnium nobilissimæ, Conchoidi Semicirculari & Conchoidi cuidam Hyperbolicæ. Hoc est in universum argumentum hujus primæ exercitationis, quam in quatuor partes distribuimus. Prima continet Methodos universales pro dimensione Conchoidum. Secunda est de Conchoide Nicomedea. Tertia de Conchoide Semicirculari. Quarta de Conchoide Hyperbolica.

PARS PRIMA.

CONTINENS METHODOS GENERALES Ad dimensionem Conchoidum omnium.

I. Methodus generalis ad inveniendam dimensionem seu quadraturam Conchoidum. *Proposit.* 1. 2. 3.

II. Methodus ad Dimensionem Rotundorum solidorum ex

Conchoidibus genitorum circa basin revolutis. *Prop.* 4. 5.

III. Methodus ad Dimensionem Rotundorum ex Conchoidibus circa axem revolutis. *Prop.* 6.

IV. Methodus ad invenienda Conchoidum centra gravitatis. *Prop.* 7. 8.

V. Methodus generalis ad inveniendas Tangentes Conchoidum. *prop.* 9.

PARS SECUNDA.

DE CONCHOIDE NICOMEDEA.

QUæcumque pertinent ad Conchoidis hujus Quadraturam, Rotunda, Centra gravit. & Tangentes accuratè tractantur. Et quoniam de illa etiam nonnulla tradidere clarissimi Geometræ Vvallisius, Fermatius, Lalovera, Barrovius, eorum inventa referuntur, atque ex nostris principiis demonstrantur.

De Quadratura Conchoidis Nicomedeæ.

I. Ostenditur Conchoidis hujus quadraturam pendere ex circuli & figuræ Secantium quadratura. *prop.* 10.

II. Ad inveniendam dimensionem figuræ Secantium, præmittitur methodus generalis comparandi figuras Cylindricas sive in superficie Cylindri factas, cum planis. *prop.* 11.

III. Juxtà illam methodum figura Tangentium ostenditur æqualis segmento Hyperbolico. *prop.* 12. 13.

IV. Aliæ quædam figuræ Cylindricæ cum planis, & solidæ inter se comparantur. *prop.* 14. 15. 16. 17.

V. Figura Secantium æqualis ostenditur segmento Hyperbolico. *prop.* 18. 19.

VI. Sector Conchoidis Nicomedeæ æqualis est Triangulo † sectori circulari † segmento cuidã Hyperbolico. *prop.* 20.

VII. Figura Conchoidica exhibetur æqualis figuræ Hyperbolico-circulari. *prop.* 21.

Ex his manifestum est Conchoidis Nicomed. Quadraturam haberi datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ.

VIII. Dimensio Conchoidis Nicomed. à Lalovera primò inventa & sine demonstratione tradita ad finem libri de Cycloide, demonstratur. *prop.* 22.

IX. Inventa Clarissimi Viri Isaaci Barrovv de Dimensione Conchoidis & figurarum ei connexarum referuntur atque ex nostris principiis demonstrantur. *prop.* 23.

V. Doctissimi Viri Vvallisii Theorema de spatio Conchoidis asymptotico infinito aliter demonstratur. *prop.* 24.

XI. Circulus, Hyperbola, & Conchois Nicomedea figuræ sunt ità inter se connexæ, ut datâ duarum simul quadraturâ, tertia quadretur & vicissim. *prop.* 25.

De Rotundis solidis genitis ex Conchoide tam circa basin quàm circà axem revoluta.

I. Rotundum factum ex segmento Conchoidis Nicomed. circa basin seu Asymptotum revoluto reducitur ad sphæram, datâ circuli quadraturâ. *prop.* 26. 27.

II. Rotundum ex spatio asymptotico hujus Conchoidis circa asymptotum revoluto finitum est, eique assignatur Sphæra æqualis. *prop.* 28.

III. Rotundum factum ex quolibet Segmento Conchoidis Nicomedeæ circa axem revoluto reducitur ad Sphæram, datâ Hyperbolæ quadraturâ. *prop.* 29. 30. 31.

De Centro gravitatis Conchoidis Nicomedeæ.

I. Datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ habetur centrum gravitatis figuræ compositæ ex duobus Segmentis Conchoidicis æqualibus & similibus. *prop.* 32.

II. Analogia centri gravitatis Segmenti Conchoidici cum centro gravitatis Segmenti circularis. *prop.* 33.

III. Demonstratur insigne Theorema olim à Lalovera inventum & sine demonstratione traditum circa centrum gravit. Conchoidis. *prop.* 34.

IV. Cujuslibet Segmenti Conchoidis Nicom. centrum gravit. habetur ex circuli & Hyperbolæ quadratura. *prop.* 35.

De Tangente Conchoidis Nicomedeæ.

Octo novæ constructiones traduntur ad inveniendam Conchoidis Nicom. Tangentem, quibus aliæ tres adjunguntur. Una Barrovii, altera Fermatii. Tertia Cartesii atque à nobis aliter demonstrantur.

PARS TERTIA.

DE CONCHOIDE SEMICIRCULARI.

INter Conchoides quæ ex semicirculo generari possunt, illam illustrandam suscipimus quæ Polum habet in extremo diametri constitutum, basin autem ad diametrum perpendicularem. Quæcunque igitur ad hujus Conchoidis quadraturam, Rotunda, Centrum gravitatis & Tangentem pertinent determinantur juxta methodos generales traditas in prima parte.

I. Sector hujus Conchoidis æquatur Triangulo † Figuræ genitrici quæ circularis est † alteri sectori circulari. *prop.* 37.

Unde quadratura hujus Conchoidis pendet à sola circuli quadratura.

II. Spatium Asymptoticum hujus Conchoidis finitum est & habet ad circulum rationem notam. *prop.* 38. 39.

III. Rotundum tam ex Segmento quolibet hujus Conchoidis quàm ex spatio asymptotico circa basin revoluto, reducitur ad Sphæram datâ circuli quadraturâ. *prop.* 40. 41.

IV. Rotundum autem circa axem ex segmento quolibet hujus Conchoidis reducitur ad Sphæram datâ Hyperbolæ quadraturâ. *prop.* 46.

Atque ad hoc probandum, præmittuntur propositiones 4. precedentes 42. 43. 44. 45.

V. Rotundum

V. Rotundum ex ſpatio aſymptotico hujus Conchoidis circa axem revoluto, infinitum eſt ſeu majus quacumque data Sphæra. *prop.* 47.

VI. Centrum gravitatis figuræ compoſitæ ex duobus ſegmentis ſimilibus & æqualibus hujus Conchoidis habetur ex circuli quadratura. *prop.* 48.

VII. Sed ad centrum gravitatis ſegmenti cujuſlibet requiritur etiam Hyperbolæ quadratura. *prop.* 49.

VIII. Dari poteſt abſolutè centrum gravitatis duplicis ſpatii aſymptotici hujus Conchoidis. *prop.* 50.

IX. Unum autem ſpatium aſymptoticum ſeorſim ſumptum centrum gravitatis habet infinitè diſtans ab axe, ac proinde nullum habet. *prop.* 51.

X. Variæ conſtructiones ad inveniendam tangentem Conchoidis ſemicircularis. *prop.* 52.

XI. Ex iis quæ dicta ſunt de Conchoide ſemicirculari, demonſtrantur inſignia quatuor Theoremata quæ Lalovera invenit & ſine demonſtratione reliquit circa novam quamdam figuram. *prop.* 53.

XI. Alia duo Theoremata circa eamdem figuram. *prop.* 54. 55.

PARS QUARTA.

De Conchoide Hyperbolica.

E Conchoidibus infinitis quæ ex Hyperbolis oriri poſſunt, aſſumpſimus unam præ cœteris inſignem, quæ generatur ex Hyperbola circulari, Polo in extremo axis tranſverſi poſito. Et illi applicamus methodos traditas in prima parte ad dimenſionem Conchoidum.

Igitur præmiſſis nonnullis circuli & Hyperbolæ proprietatibus quæ demonſtrantur. *Prop.* 56. 57.

Oſtenditur in hac Conchoide Hyperbolica data Hyperbolæ quadraturâ haberi ſequentia.

I. Ejus quadraturam. *Prop.* 58.

II. Dimenſionem Rotundorum circa baſin. *Prop.* 59. 60.

III. Dimensionem Rotundorum circa axem. *Prop.* 61. 62.
IV. Centrum gravitatis. *Prop.* 63.
V. Tangentem. *Prop.* 94.
Deinde Theoremata duo demonstrantur à Lalovera tradita circa figuram quamdam novam Conchoidi nostræ Hyperbolicæ valdè affinem.

EXERCITATIO SECUNDA.

DE CISSOIDIBUS.

POst traditam Cissoïdum generationem, ex qua sequitur unamquamque lineam sive rectam sive curvam suam habere Cissoidem, imo infinitas; dantur methodi generales ad inveniendam earum omnium quadraturam, dimensionē Rotundorum tam circa basin quàm circa axem, Centrum denique gravitatis & Tangentes, ut in Conchoidibus factum est, atque ex iisdem principiis. Atque hæ methodi applicantur Cissoidibus semicircularibus, Diocleæ imprimis. Denique perpetua mirabilisque Analogia explicatur quæ inter Conchoides Cissoidesque intercedit eodem Polo eadémque basi genitas quas ideò Cognatas appellamus. Hoc est in universū hujus Exercitationis Argumentum. Series autem propositionum est hujusmodi.

De spatiis Cissoidum.

I. Methodus generalis ad dimensionem Cissoidum. *prop.* 1.
II. Methodus præcedens applicatur Cissoidibus Semicircularibus. *prop.* 2. 3. 4.
III. Atque imprimis Diocleæ. *prop.* 5. ejusque accurata dimensio traditur. Theorematibus septem.
Theor. 1. Dimensio sectorum concavorum Diocleæ.
Theor. 2. Dimensio segmentorum convexorum.
Theor. 3. Dimensio spatii integri Diocleæ.
Theor. 4. Dimensio sectorum convexorum.
Theor. 5. Dimensio figuræ contentæ Diocleæ portione & arcu circuli.

Theor. 6. Quadratura absoluta figuræ contentæ tribus arcubus circuli & curva Diocleæ.

Theor. 7. Quadratura absoluta totius spatii contenti arcu semicirculi generatoris, curva infinita Diocleæ ejusque asymptoto.

IV. Dimensio alterius speciei Cissoidis semicircularis. *prop*. 6. 7.

V. Quadratura absoluta spatii integri Cissoidis semicircularis. cujus asymptotus secat in centro diametrum semicirculi genitoris. *prop*. 8.

VI. Analogia Conchoidum & Cissoidum quoad spatia, *Prop*. 9. 10.

De Rotundis ex Cissoidibus circa Basin revolutis.

I. Methodus generalis ad Dimensionem Rotundorum ex Cissoidibus circa basin. *prop*. 11. 12.

II. Methodus præcedens applicatur Diocleæ. *prop*. 13. ejúsque Rotundorum dimensio circa basin traditur sequentibus Theorematibus.

Theor. 1. Dimensio Rotundi ex spatio integro Diocleæ circa basin seu asymptotum.

Theor. 2. Dimensio Rotundi ex quocunque segmento Diocleæ circa asymptotum.

Theor. 3. Reducitur absolutè ad Sphæram Rotundum ex Diocleæ spatio inter quadrantem peripheriæ, curvam Cissoidis, & asymptotum contento & revoluto circa asymptotum.

Theor. 4. Reducitur etiam ad Sphæram aliud Rotundum ex spatio inter quadrantem circuli & Diocleam contento, ac revoluto circa asymptotum.

III. Analogia Conchoidis & Cissoidis quoad Rotunda ex spatiis & segmentis circa basin. *prop*. 14.

IV. Analogia eorumdem Rotundorum cum centro gravitatis figuræ genitricis. *prop*. 15.

De Rotundis ex Cissoidibus circa axem revolutis.

I. Methodus generalis ad dimensionem Rotundorum ex Cissoidibus circa axem. *prop*. 16.

II. Methodus praecedens applicatur Diocleæ & ostenditur ejus Rotunda circa axem haberi datâ Hyperbolæ quadraturâ *prop*. 17.

III. Analogia Conchoidum & Cissoidum quoad Rotunda circa axem. *prop*. 18.

IV. Præcedens propositio applicatur Diocleæ & Conchoïdi semicirculari ipsi cognatæ. *prop*. 19.

De Centro gravitatis Cissoïdum.

I. Methodus generalis ad inveniendum centrum gravitatis in Cissoidibus. *prop*. 20.

II. Applicatur Diocleæ methodus præcedens & ostenditur ejus segmenti centrum gravitatis haberi datâ circuli & Hyperbolæ quadratura. *prop*. 21.

III. Centrum gravitatis spatii integri Diocleæ distat ab ejus asymptoto sexta parte axis. *prop*. 22.

IV. Analogia Conchoidis & Cissoidis quoad centra gravitatis. *prop*. 23.

De Tangentibus Cissoidum.

I. Methodus generalis ad inveniendam tangentem Cissoidum. *prop*. 24.

II. Aliæ constructiones generales ad inveniendas tangentes Cissoidum. *prop*. 25. 26.

III. Variæ constructiones & novæ ad inveniendam tangentem Diocleæ. *prop*. 27.

Unde constructio tradita à clarissimo viro Petro Fermatio demonstratur.

Alia etiam à doctiss. Barrovio tradita & demonstrata nova demonstratione confirmatur.

IV. Analogia Conchoidum & Cissoidum quoad Tangentes. *prop*. 28.

EXER-

EXERCITATIO TERTIA.

DE VARIARUM CONCHOIDUM & Cissoidum natura.

PRopositum nobis est in hac Exercitatione examinare cujus naturæ sint Conchoides & Cissoides nonnullæ cæteris nobiliores, utpotè genitæ ex lineis rectis vel sectionibus Conicis, vel ipsis Conchoidibus ac Cissoidibus, quásque ideò Triangulares, Parabolicas, Hyperbolicas, Ellipticas, & Conchoidum Conchoides Cissoidúmque Cissoides appellare possumus.

De Conchoidibus & Cissoidibus Triangularibus.

I. Conchoides & Cissoides genitæ ex lineis rectis basi parallelis sunt lineæ rectæ. *prop.* 1. 2.

II. Conchoides & Cissoides genitæ ex lineis rectis basi non parallelis sunt Hyperbolæ. *prop.* 3. 4.

De Conchoidibus & Cissoidibus Parabolicis.

I. Conchoides & Cissoides genitæ ex Parabola, Polo in curva constituto, basi autem assumptâ parallelâ axi, sunt aliæ Parabolæ. *prop.* 5. 6.

II. Conchoides & Cissoides genitæ ex Parabola, Polo in vertice constituto, basi autem parallelâ axi, sunt etiam aliæ Parabolæ. *prop.* 7. 8.

III. Conchoides & Cissoides genitæ ex Parabola, Polo in vertice constituto, basi autem ordinatâ ad axem sunt (Conchoides quidem,) curvæ quarum ordinatæ æquantur ordinatis Hyperbolæ secundi generis † ordinatis Parabolæ similis genitrici. Cissoides autem sunt curvæ, quarum ordinatæ æquantur ordinatis Hyperbolarum secundi generis — ordinatis Parabolæ similis genitrici. *prop.* 9. 11.

IV. Atque idem convenit Conchoidibus & Cissoidibus genitis ex Parabolis secundi generis cujuscunque gradûs fuerint. *prop* 10. 12.

V. Conchoides & Cissoides genitæ ex Parabolis secundi generis cujuscunque gradus fuerint, Polo in vertice Parabolæ constituto, basi autem axi parallelâ sunt (Conchoides quidem) curvæ quarum ordinatæ æquantur ordinatis lineæ quæ vel recta est vel Parabolica alicujus gradus † ordinatis Parabolæ similis genitrici. Cissoides autem sunt curvæ quarum ordinatæ æquantur ordinatis lineæ quæ similiter recta est vel Parabolica alicujus gradûs —— ordinatis Parabolæ similis genitrici. *Scholio prop*. 10. & *prop*. 12.

VI. Conchoides & Cissoides genitæ ex Parabola Polo in axe constituto, basi autem parallelâ axi, sunt (Conchoides quidem) curvæ quarum ordinatæ æquantur ordinatis in segmento Hyperbolæ communis † ordinatis Parabolæ similis genitrici.

Cissoides autem sunt curvæ quarum ordinatæ æquantur ordinatis in segmento Hyperbolæ communis —— ordinatis Parabolæ similis genitrici. *prop*. 13. 14

De Conchoidibus & Cissoidibus Hyperbolicis.

I. Conchoides & Cissoides genitæ ex Hyperbolâ, Polo in curva constituto, basi autem unâ ex asymptotis, sunt (Conchoides quidem) aliæ Hyperbolæ; Cissoides autem sunt lineæ rectæ. *prop*. 15. 16.

II. Conchois genita ex Hyperbola, Polo in curva constituto, basi autem uni asymptoto parallelâ, in uno casu est linea recta, in aliis omnibus est Hyperbola. *prop*. 17.

III. Conchoides & Cissoides genitæ ex Hyperbola Polo in centro constituto, basi autem parallelâ uni asymptoto sunt, (Conchoides quidem), curvæ quarum ordinatæ æquantur ordinatis alterius Hyperbolæ secundi generis † ordinatis Hyperbolæ similis genitrici. Cissoides autem sunt curvæ quarum ordinatæ æquantur ordinatis Hyperbolæ alterius secundi generis — ordinatis Hyperbolæ similis genitrici. *prop*. 18. 20.

IV. Atque idem convenit Conchoidibus & Cissoidibus genitis ex Hyperbolis secundi generis cujuscunque gradûs fuerint. *prop*. 19. 21.

De Conchoidibus & Cissoidibus ex figuris Homogeneis quibuscunque.

I. Homogearum Figurarum Analogia. *prop*. 22.

II Conchoides genitæ ex Figuris Homogeneis sunt etiam figuræ Homogeneæ. *prop*. 23.

III. Cissoides genitæ ex Figuris Homogeneis sunt etiam Homogeneæ. *prop*. 24.

De Conchoidibus & Cissoidibus Ellipticis.

I. Conchoides Ellipticæ Polum habentes in centro, vel in extremo axis, basin autem axi perpendicularem, Homogeneæ sunt Conchoidi Nicomedeæ & semicirculari. *prop*. 25.

II. Cissoides autem Ellipticæ polum habentes in centro vel in extremo axis, basin verò axi perpendicularem, Homogeneæ sunt Cissoidibus ex semicirculo genitis eodem Polo, eadémque basi. *prop*. 26.

De Conchoidum Conchoidibus & Cissoidum Cißoidibus.

I. Conchoides Conchoidum, eodem Polo eâdémque basi genitæ ac prima Conchois, sunt Conchoides ipsius figuræ genitricis primæ Conchoidis. *prop*. 28.

II. Cissois Cissoidis est ipsamet linea genitrix primæ Cissoidis. *prop*. 29.

DE CONCHOIDIBUS

EXERCITATIO GEOMETRICA.

DEFINITIONES.

ESTO (*Fig.* 1,) Angulus rectus ADX, & quæcunque Figura A B K. Ex puncto A ad singula puncta E lineæ BK intelligantur duci rectæ A E quæ occurrant in F rectæ DX, & ultra DX producantur in G, ita ut singulæ F G singulis A E sibi respondentibus sint æquales; sit etiam D C æqualis ipsi A B.

Linea C G G transiens per omnia puncta C, G hoc modo inventa vocetur *Conchois* lineæ B K. Figura etiam aut spatium C D X G est *Conchois*, cujus *Polus* A. *Axis* C D. *Basis* D X. *Figura genitrix* A B K.

Hinc patet unamquamque lineam sive rectam sive curvam suam habere Conchoidem, imo ex quacunque linea generari posse infinitas Conchoides, variando nimirum aut Polum aut Basin quod infinitis modis fieri potest.

Constat etiam unamquamque lineam sive rectam sive curvam Conchoidem esse alterius lineæ aut etiam infinitarum. sit v. g. curva CGG, extra quam sumpto ad libitum puncto A, & inter A & C G ductâ utcumque rectâ D X, si intelligantur singuli radii A C, A G occurere in D, F, rectæ D X; atque ex puncto A sumi A B, A E æquales ipsis D C, FG manifestum est curvam C G G fore Conchoidem lineæ B E K.

PARS PRIMA.

METHODI GENERALES AD Dimensionem Conchoidum omnium, earum Rotunda tam circa basin quàm circa axem, Centra gravitatis, & Tangentes.

PROPOSITIO I.

ESto (*fig.* 2.) sector circuli ABE & alter AFI in eodem angulo A. Intelligatur singulorum radiorum AB, AC, AD, AE, sectoris ABE quadrata applicari in punctis respondentibus F, G, H, I ad arcum FI extensum in lineam rectam.

Dico summam quadratorum AB, AC, AD, AE hoc modo applicatorum ad arcum FI, æquari solido recto cujus basis est sector ABE, altitudo autem dupla AF radii sectoris AFI.

DEMONSTRATIO.

QUoniam radii AB, AC, AD, AE, æquales sunt, manifestum est ex quadratis illorum applicatis ad arcum FI extensum in lineam rectam (sive ad rectam æqualem arcui FI) generari Parallelepipedum cujus altitudo est ipse arcus FI, basis autem quadratum AB. Sive quod idem est, Parallelepipedum cujus altitudo AB, basis autem Rectangulum sub AB & arcu FI. Quoniam verò radii AB, AF sunt inter se ut arcus similes BE, FI, Rectangulum sub AB & arcu FI æquatur Rectangulo sub AF & arcu BE; Ergo solidum genitum ex quadratis AB, AC, AD, AE applicatis ad arcum FI æquatur Parallelepipedo cujus altitudo AB, basis autem Rectangulum sub AF & arcu BE. Sive, quod idem est, Parallelepipedo cujus altitudo AF, basis autem Rectangulum sub AB, BE. Est autem illi Parallelepipedo æquale solidum rectum cujus altitudo dupla AF, basis autem sector ABE dimidium Rectanguli sub AB & arcu BE. Ergo solidum genitum ex quadratis AB, AC, AD, AE applicatis ad arcum FI (hoc est summa quadratorum illorum ad illum arcum applicatorum) æquatur solido recto cujus altitudo dupla AF, basis autem est sector ABE. Quod erat demonstrandum.

Sive sector ABE *major sit sectore* AFI, *sive minor, sive etiam ipsi æqualis, perinde est, atque demostratio est eadem.*

PROPOSITIO II.

ESTO (*fig.* 3.) quæcunque Figura ABE contenta duabus rectis AB, AE & linea BE sive recta sive curva. Sit etiam in eodem angulo A sector circuli AFI.

Dico summam quadratorum omnium AB, AC, AD, AE radiorum Figuræ ABE, applicatorum ad arcum FI in punctis F, G, H, I respondentibus, æquari solido recto cujus basis est ipsamet Figura ABE, altitudo autem dupla AF radii sectoris AFI.

DEMONSTRATIO.

INtelligatur arcus FI divisus in punctis F, G, H, in quotcumque numero partes æquales: tum radiis AB, AC, AD ductis per illa puncta describantur sectores circulares ABL, ACL, ADL.

Summa quadratorum radiorum uniuscujusque sectoris ABL, ACL, ADL applicatorum ad arcus FG, GH, HI respondentes, æquatur solido recto cujus basis est unusquisque sector, altitudo dupla radii AF. (*prop.* 1.) Ergo omnes summæ quadratorum radiorum omnium sectorum simul sumptæ æquantur solido recto, cujus basis est composita ex omnibus sectoribus ABL, ACL, ADL simul sumptis, altitudo autem dupla AF. Atqui per indefinitam divisionem arcus FI in partes æquales radii omnes sectorum simul sumpti abeunt in radios omnes figuræ ABE, ac proinde summæ quadratorum radiorum sectorum abeunt in summam quadratorum radiorum figuræ ABE. Aliunde vero summa sectorum ABL, ACL, ADL definit etiam in figuram ABE. Ergo summa quadratorum radiorum figuræ ABE applicatorum ad arcum FI æquatur solido recto cujus basis est ipsa figura ABE, altitudo autem dupla AF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

ESTO (*fig.* 4.) Conchois BE, cujus Polus A, Figura genitrix ACD, Axis BF, Basis FH quæ secet in H, *h* radios Conchoidis AE, A*e*. Centro A, radio AF, describatur sector circuli AFI occurrens in I, *i*, rectis AE, A*e*.

Ex singulis punctis D, *d* curvæ CD ducantur rectæ DG, *dg* perpendiculares ipsis AD, A*d*, & occurrentes in G, *g* rectæ AB. Intelligatur singulas Hypotenusas AG, A*g* erigi super arcum FI in punctis I, *i* respondentibus. Ex illis ita erectis perpendiculariter ad planum AFI, generabitur figura quædam Cylindrica cujus basis erit arcus FI. Hoc posito.

Dico sectorem Conchoidicum ABE æquari Figuræ genitrici ACD † Triangulo AFH † Figuræ Cylindricæ prædictæ genitæ ex hypotenusis AG, A*g*, erectis super arcum FI.

DEMONSTRATIO.

Solidum rectum cujus basis sector Conchoidicus ABE, altitudo dupla AF, æquatur (*prop.* 2.) summæ quadratorum AB, A*e*, AE radiorum Conchoidis applicatorum ad arcum FI. hoc est triplici summæ. 1. Quadratorum AF, A*h*, AH. 2. Quadratorum FB, *he*, HE sive illis æqualium ex natura Conchoidis AC, A*d*, AD. 3. Rectangulorum AFB, A*he*, AHE (sive æqualium sub AF, AC, sub A*h*, A*d*; sub AH, AD) bis sumptorum, applicando tam Quadrata quàm Rectangula prædicta ad eumdem arcum FI.

Atqui Prima summa, Qudratorum AF, A*h*, AH applicatorum ad arcum FI æquatur solido recto cujus basis Triangulum AFH, altitudo dupla AF (*prop.* 2.) Similiter secunda summa, Quadratorum AC, A*d*, AD applicatorum ad arcum FI æquatur Solido recto cujus basis est figura genitrix ACD, altitudo dupla AF. Tertia denique duplex summa Rectangulorum sub AF, AC; sub A*h*, A*d*; sub AH, AD applicatorum ad arcum FI æquatur solido recto cujus basis est Figura Cylindrica genita ex Hypotenusis AG, A*g* erectis supra arcum FI, altitudo autem dupla AF. ut ostendetur Lemmate sequenti.

Ergo solidum rectum cujus basis sector Codchoidicus ABE, altitudo dupla AF, æquatur tribus solidis rectis quorum bases sunt 1. Triangulum AFH. 2. Figura genitrix ACD. 3. Figura Cylindrica prædicta. Altitudo autem eadem dupla AF. sive unico solido recto cujus basis est Triangulum AFH † Figura genitrix ACD † Figura Cylindrica prædicta, altitudo autem eadem dupla AF.

Solida autem recta ejusdem altitudinis sunt ut bases. Ergo sector Conchoidicus ABE æquatur Triangulo AFH † Figuræ genitrici ACD † Figuræ Cylindricæ prædictæ genitæ ex Hypotenusis AG, A*g* erectis super arcum FI. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

LEMMA.

Reliquum est ut ostendamus duplicem summam Rectangulorum sub AF, AC; sub A*h*, A*d*, sub AH, AD applicatorum ad arcum FI æquari solido recto cujus basis æqualis est Figuræ prædictæ Cylindricæ genitæ ex Hypotenusis AG, A*g* erectis super arcum FI, altitudo autem dupla AF.

Hoc autem sic demonstrabitur.

Intelligatur Figuram prædictam Cylindricam genitam ex Hypotenusis AG A*g*, AC erectis super arcum FI expandi in figuram planam, extenso nimirum arcu FI in lineam rectam. Manifestum est Hypotenusas AG, A*g*, AC perpendiculariter insistentes arcui fore ordinatas illius figuræ planæ in punctis I, *i*, F. respondentibus, & solidum rectum cujus basis sit illa figura plana, altitudo AF, nihil esse aliud quàm summam rectangulorum sub altitudine AF, & singulis ordinatis AG, A*g*, AC. His positis.

Quoniam (*hyp.*) DG perpendicularis est ad AD. Triangula Rectangula ADG, AFH sunt similia, quare AG, AD :: AH, AF. ergo Rectangulum sub AG, AF æquatur Rectangulo sub AH, AD. Similiter ostendetur Rectangulum sub A*g*, AF æquari rectangulo sub A*h*, A*d*. ergo summa Rectangulorum sub AF, AC; sub A*h*, A*d*; sub AH, AD applicatorum ad arcum FI extensum in lineam rectam, in punctis F, *i*, I, æquatur summæ Rectangulorum sub AF, AC; sub AF, A*g*; sub AF, AG applicatorum eidem arcui FI in iisdem punctis F, *i*, I.

Ostensum est autem summam Rectangulorum sub AF, AC, sub AF, A*g*; sub AF, AG, æquari solido recto cujus basis est figura plana æqualis Cylindricæ genitæ ex Hypotenusis AG, A*g*, AC, altitudo autem AF. Ergo summa Rectangulorum sub AF, AC; sub A*h*, A*d*; sub AH, AD applicatorum ad arcum FI in punctis respondentibus F, *i*, I æquatur eidem solido recto, cujus basis æqualis est figuræ Cylindricæ genitæ ex Hypotenusis AG, A*g*, AC, altitudo verò AF.

Ac proinde duplicando quantitates, duplex summa Rectangulorum sub AF, AC; sub A*h*, A*d*; sub AH, AD applicatorum ad arcum FI, æquatur solido recto bis sumpto cujus basis est figura Cylindrica prædicta, altitudo autem AF; sive unico solido recto cujus basis est figura Cylindrica prædicta, altitudo autem dupla AF. Quod erat ostendendum.

Methodus generalis ad dimensionem Rotundorum quæ gignuntur ex Conchoidibus circa basin revolutis.

PROPOSITIO IV.

Esto (*fig.* 5.) Conchois BE, cujus Polus A, Figura genitrix ACD, Basis FH, Axis BF. super BF descripta sit figura FBN similis similitérque posita genitrici ACD.

Si ex quocunque puncto E Conchoidis BE, ducatur ordinata EM quæ occurrat in N, lineæ BN.

Dico AM esse ad FM ut EM ad MN.

DEMONSTRATIO.

Jungantur AE, FN, atque ex puncto E demittatur in FH perpendicularis EK, & ex D in AC perpendicularis DI.

Quoniam EK, AB sunt parallelæ, angulus HEK æqualis est angulo DAI. est autem ex natura Conchoidis HE æqualis AD, ergo Triangula rectangula EHK, ADI in omnibus æqualia sunt. Atque ita AI æqualis est EK. Est autem EK æqualis FM in Rectangulo EF, ergo AI, FM æquales sunt. Cùm ergo AC, FB sunt æquales ex natura Conchoidis, etiam CI, BM æquales sunt. Jam verò quoniam figuræ ACD, FBN æquales & similes sunt similitérque positæ (*hyp.*) est autem CI, æqualis BM, manifestum est ordinatas ID, MN æquales esse. Cùm igitur Triangula rectangula AID, FMN latera AI, FM, & ID, MN inter se æqualia habeant, angulos A, F etiam æquales habent. Ergo AD sive AE parallela est ipsi FN. Atque ita in Triangulis AME, FMN, AM est ad FM ut EM ad MN. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I. CI, BM sunt æquales ut constat ex demonstrationis decursu.

Corollarium II. Quadrilaterum FNEH est Parallelogrammum, ostensum est enim FN, HE esse Parallelas; sunt autem & FH, NE etiam parallelæ. ergo, &c.

PROPOSITIO V.

Iisdem positis. Ex Polo A (*fig.* 5.) ducatur AL parallela FH Basi Conchoidis.

Dico Rotundum genitum ex segmento Conchoidico BME rotato circa Basin FH, æquari Rotundo genito ex figura BMN rotata circa rectam AL.

DEMONSTRATIO.

Ex propof. præced. AM, FM :: EM, MN eſt autem AM ad FM ut circumf. radii AM ad circumf. radii FM. ergo circumf. radii AM eſt ad circumf. radii FM ut EM ad MN. atque ita Rectangulum ſub circumf. radii AM & MN (hoc eſt ſuperficies cylindrica genita ex MN circa AL rotata) æquatur Rectangulo ſub circumf. radii FM, & EM. (hoc eſt ſuperficiei cylindricæ genitæ ex EM circa FN.) Cùm igitur hoc ſemper eveniat quæcunque ordinata ducatur inter B, M, ſequitur ex methodo Indiviſibilium, Rotundum ex figura BMN circa AL, æquari Rotundo ex ſegmento Conchoidico BME circa FH. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Eodem modo oſtendetur Rotundum ex figura aut ſpatio Conchoidico integro FBGK (contento axe BF, Conchoide BE, & baſi FK) circa baſin ſuam FK rotato æquari Rotundo genito ex figura FBNP æquali & ſimili genitrici ACL, circa AL revoluta.

Methodus generalis ad Dimenſionem Rotundorum quæ gignuntur ex Conchoidibus circa axem revolutis.

PROPOSITIO VI.

Iſdem poſitis. (*fig.* 5.) Intelligatur quadratum uniuſcujuſque AE radii Conchoidis applicari ad axem BF in puncto M reſpondenti.

Dico ſi cubetur ſumma horum quadratorum ſic ad axem applicatorum, reduci ad Sphæram Rotundum genitum ex ſegmento Conchoidico BME circa axem BM rotato.

DEMONSTRATIO.

Quadratum uniuſcujuſque AE æquatur Quad. AM † Quadr. ME. ergo ſumma Quadratorum AE applicatorum in M æquatur ſummæ Quadr. AM. † ſummæ Quadr. ME applicatorum in M. Cùm autem rectæ AM applicatæ in M ſint ordinatæ Trianguli, ſumma Quadratorum earumdem rectarum AM cubatur. Subtractâ ergo hac ſummâ ex ſumma Quadr. AE quæ cubatur etiam (*hyp.*) cubabitur reliqua ſumma Quadratorum ME & conſequenter ad ſphæram reducetur ſumma circulorum ex radiis ME, hoc eſt Rotundum genitum ex ſegmento BME circa BM. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I. Quoniam ſingula quadrata AE, æquantur Quadr.

AH † quadr. HE † Rectang. AHE bis. Si cubetur triplex summa 1. Quadr. AH. 2. Quadr. HE vel AD æqualium. 3. Rectang. AHE bis vel AH, AD æqualium, applicatis tam his Quadratis quàm Rectangulis in punctis M, vel I (idem enim est. cùm BM, CI æquales sint *prop.* 4. *Coroll.* 1.) Habebitur cubatura Rotundi ex segmento BME circa BM.

Corollarium II. Si Rotundum ex figura genitrice CID circa CI reducatur ad Sphæram, cubabitur summa quadratorum ID, additâque summâ quadratorum AI applicatorum in I quæ etiam cubatur, (cùm AI aplicatatæ in I sint ordinatæ Trianguli) habebitur cubatura summæ quadratorum AD applicatorum in I. Quare si habeantur hæc tria. 1. Si Rotundum ex CID circa CI reducatur ad sphæram. 2. Si summa Quadratorum AH applicatorum in I cubetur. 3. Si summa Rectangulorum AH, AD applicatorum etiam in I cubetur, Habebitur Rotundum ex segmento Conchoidico BME circa axem BM sive hujusmodi Rotundum reducetur ad sphæram.

Methodus generalis ad invenienda Conchoidum Centra gravitatis.

PROPOSITIO VII.

IIsdem positis (*fig.* 5.) sit recta XZ parallela Basi FH, transiens per centrum gravitatis segmenti Conchoidici BME; & TV eidem FH parallela transiens per centrum gravit. figuræ BMN similis & æqualis genitrici CID.

Dico ut segmentum BME est ad figuram BMN ita esse AT ad FX.

DEMONSTRATIO.

ROtundum ex BME circa FH æquatur Rotundo ex BMN circa AL. (*prop.* 5.) Est autem Rotundo ex BME circa FH æquale solidum rectum cujus basis BME, altitudo circumferentia radii FX (*Tacquet. lib.* 5. *Cylindric. & Annul.*) & Rotundo ex BMN circa AL æquale est solidum rectum cujus basis BMN, altitudo circumf. radii AT. ergo hujusmodi solida recta æquantur inter se, ac proinde bases habent altitudinibus reciprocas. Quare BME est ad BMN ut reciprocè circumferentia radii AT ad circumf. radii FX, sive ut AT ad FX. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I. Hinc datâ quadratura figurarum BME, BMN aut earum

rum inter se ratione; datâ insuper rectâ TV quæ transeat per centrum gravit. figuræ BMN, habetur recta XZ parallela basi FH, transiens per centrum gravit. Segmenti Conchoidici BME, ac proinde distantia illius centri à basi FH.

Corollarium. 2. Sit ex altera parte segmentum BMO æquale & simile segmento Conchoidico BME. Manifestum est punctum X in quo XZ parallela bâsi FH & transiens per centrum gravit. segmenti BME, secat BM, esse centrum gravitat. totius figuræ BOE. Quare si habeatur 1. Quadratura figurarum BME, BMN aut earum inter se ratio. 2. Recta TV parallela FH transiens per centrum gravit. figuræ BMN, habebitur etiam punctum X centrum grav. figuræ BOE.

Corollarium. 3. Similiter datâ quadraturâ tam Conchoidis integræ BGKF quàm figuræ BFP similis genitrici ACL, aut utriusque proportione, datâ item parallelâ basi FH quæ transeat per centrum gravit. figuræ BFP, habebitur recta parallela basi FK transiens per centrum grav. totius Conchoidis BGKF. 2. Iisdem datis invenietur centrum grav. figuræ spatiive BORKG.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem positis (*fig.* 5.) si quadretur Segmentum BME, & simul reducatur ad sphæram Rotundum ex eodem Segmento BME circa BM. Dico haberi rectam S*s* parallelam BM quæ transit per centrum gravitatis Segmenti BME.

DEMONSTRATIO.

ESTO quodcunque Rectangulum *a e b f*, cujus centrum grav. sit *d*, ex *d* in *a e* perpendicularis *d c*. Rotundum ex segmento BME circa BM est ad Cylindrum ex Rectangulo *a b* circa *a e* in ratione composita BME ad Rectang. *a b* & circumf. radii MS, ad circumf. radii *c d*. (*Tacquet lib* 5. *Cylind. & Annul.*) Quoniam autem (*hyp.*) reducitur ad sphæram Rotundum ex BME circa BM, ejus Rotundi ad Cylindrum ex *a b* circa *a e* ratio nota est. Ergo & ratio composita Segmenti BME ad Rectang. *a b*, & circumf radii MS ad circumf. radii *c d*. Cùm ergo segmenti BME quod quadratur (*hyp.*) ad rectangulum *a b* ratio nota sit, etiam altera ratio nota est nimirùm circumferentiæ radii MS ad circumf. radii *c d*. sive ratio MS ad *c d*. Est autem *c d* nota. Ergo & MS, ac proinde punctum S, & S*s* parallela BM. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. 1. Demonstratio allata perinde probat pro quacunque Figura. Atque ita notandum est Theorema sequens,

Theorema Universale pro Centro gravitatis cujuscunque Figuræ.

Datâ figuræ BME quæcumque sit quadraturâ, dato item Rotundo ex ea genito circa quamcunque rectam BM. Habetur recta parallela BM transiens per centrum gravitatis figuræ BME.

Corollarium. 2. Conversa quoque vera est, atque statui potest alterum Theorema.

Theorema Universale pro Rotundis ex quacunque Figura genitis.

Datâ quadraturâ Figuræ B M E quæcunque ea sit, datâ item rectâ S *s* parallela B M quæ transeat per centrum grav. Figuræ B M E, Rotundum ex eadem Figura B M E circa B M reducitur ad sphæram.

Datâ enim quadratutâ Figuræ B M E habetur ejus ratio ad rectangulum *a b*. Datâ item rectâ S *s* parallelâ BM, habetur MS, ergo & ratio MS ad *c d* notam. sive circumferentiæ radii MS ad circumf. radii *c d*. Ex his autem duabus rationibus componitur ratio Rotundi ex BME circa BM ad Cylindrum ex *a b* circa *a e*. Ergo Rotundi ad Cylindrum ac proinde ad Sphæram ratio nota est.

METHODUS GENERALIS AD inveniendas Tangentes Conchoidum.

PROPOSITIO. IX.

ESto (*fig.* 6.) Conchois FM cujus Polus A, Figura genitrix ABC, Basis DE, Axis DF, radius quicunque AI occurrens in G, H, curvæ genitrici B C, & basi DE. Ex punctis G, I sint Tangentes GV, IE, occurrentes in V, E rectis AC, DE perpendicularibus ad AF.

Dico AV, HE :: AG, AI.

DEMONSTRATIO.

SUmpto alio puncto quocunque M in Conchoide jungatur AM quæ occurrat in K, L curvæ genitrici BC & Basi Conchoidis DE. Per I, M, & G, K ducantur secantes IMP, GKO quæ occurrant in P, O rectis DE, AV. Præterea per puncta L, M ducantur LN, RS parallelæ AI & occurrentes in N, R rectæ IR parallelæ DE, & in L, S ipsi DE. Denique jungatur NM quæ producta occurrat DE in Q. His positis.

I. Lineæ AO, LQ sunt æquales. Nam in Triangulis AGK, LNM duo latera AG, AK duobus LN (sive HI,) LM sunt æqualia ex natura Conchoidis, & anguli A, L illis comprehensi æquales etiam sunt propter parallelas AI, LN (*hyp.*) ergo reliquus angulus AGK reliquo LNM æqualis est. Jam in Triangulis AGO, LNQ cùm latera AG, LN sint æqualia & angulus G angulo N, & angulus GAO, angulo NLQ propter parallelas AG, LN & AO, LQ. Sequitur basin AO basi LQ æqualem esse.

II. Jam Recta LQ est ad SQ ut LN ad SM sive ut HI ad SM, sive ut HP ad SP. Ergo permutando LQ est ad HP ut SQ ad SP.

III. Propter parallelas IR, SP. SQ est ad SP ut RN ad RI, sive ut SL ad SH, sive ut LM ad AM.

IV. Quoniam igitur LQ, HP : : SQ, SP (ut ostensum est num. 2.) & SQ, SP : : LM, AM (ut ostensum est num. 3.) sequitur LQ, HP :: LM, AM. Est autem LQ æqualis AO (ut ostensum est num. 1.) & LM æqualis est AK ex natura Conchoidis. Ergo AO, HP : : AK, AM.

V. Cùm igitur habeatur semper hæc Analogia AO, HP : : AK, AM. quantumvis sumatur punctum M in Conchoide propinquum puncto I. Sequitur abeunte puncto M in punctum I, & consequenter puncto K in punctum G, cùm subsecans AO abeat in subtangentem AV; & subsecans HP in subtangentem HE, & AK in AG, & denique AM in AI, sequitur inquam ex methodo desinentium AO, HE : : AG, AI. Quod erat demonstrandum.

Scholion. Adverte propositionem esse universaliter veram, sive utraque linea, & genitrix BC *& Conchois ab ea genita* FM *sit curva ut exprimitur in figura, sive una illarum curva sit altera recta: illud solum notandum rectam lineam sui ipsius quasi Tangentem habendam esse.*

Corollarium. Ex hac propositione manifestum est si habeatur tangens lineæ genitricis. Haberi quoque tangentes omnium Conchoidum quæ ab ea efformari possunt.

Sit enim GV tangens genitricis BC in G, si fiat ut AG ad AI ita AV ad aliam HE, jungatúrque IE, tanget IE Conchoidem FM in I.

PARS SECUNDA.

DE CONCHOIDE NICOMEDEA.

ESto (*Fig.* 4.) Conchois antiqua & Nicomedea BZ, cujus Polus A, axis BF, Basis sive Regula FX Ejus proprietas est quòd omnes BF, *he*, HE inter basin & curvam interceptæ sint æquales inter se.

Ac proinde si centro A, radio AC æquali ipsi FB describatur quadrans circuli ACK, cùm singuli radii *A d*, AD æquales sint AC sive FB, sive *h e*, HE, erit Quadrans circuli ACK. Figura genitrix Conchoidis BZ.

Curvam BZ semper accedere ad suam Basim FX, háncque illi esse asymptoton, notum est Geometris, neque in eo demonstrando necesse est immorari.

Propositum est nobis Methodos anteà traditas pro universis Conchoidibus huic speciatim Conchoidi quæ nobilissima est applicare, ejusque Dimensionem, Rotunda tam circa basin, quàm circa axem, Centrum denique gravitatis, & Tangentes investigare. Porro Conchoidis nomine semper in hac secunda parte intelligemus Conchoidem Nicomedeam.

De dimensione Conchoidis.

PROPOSITIO X.

INtelligatur (*Fig.* 4.) singulas secantes AF, A *h*, AH erigi in punctis C, *d*, D, respondentibus supra arcum CD, perpendiculariter ad planum circuli ACK. Ex illis ita erectis generabitur figura Cylindrica quæ *vocetur figura Secantium.*

Dico sectorem Conchoidicum ABE æqualem esse Triangulo AFH † Sectori circulari ACD † Figuræ Secantium prædictæ.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

EX singulis punctis, D, *d* arcûs CD ductæ intelligantur DG, *dg* circulum tangentes, ac proinde perpendiculares radiis AD, A *d*. Occurrantque in G, *g* rectæ AC. Et centro A radio AF describatur alter arcus circuli FI occurrens in I, *i* secantibus AH, A *h*.

Ostensum est in prop. 3. Sectorem Conchoidicum ABE æquari Triangulo AFH † Figuræ genitrici ACD † Figuræ Cylindricæ genitæ ex Hypotenusis AG, A *g*, AC erectis supra arcum FI in punctis respondentibus I, *i*, F. Ut igitur ostendatur eumdem Sectorem Conchoidicum ABE æquari Triangulo AFH † Sectori circulari ACD † Figuræ secantium genitæ ex secantibus AH, A *h*, AF erectis supra arcum CD, superest solùm probandum Figuram Cylindricam prædictam genitam ex Hypotenusis æqualem esse Figuræ prædictæ Secantium. Hoc autem facile demonstrabimus in hunc modum.

1. Adverte quæcunque ducatur secans A *h* inter. AC, AD, arcus CD, FI similiter secari in *d*, *i*.

2. Triangula A *dg*, A *h* F Rectangula atque angulum A communem habentia similia sunt, quare A *g*, A*h* :: A *d*, AF. Ut autem radius A*d* ad radium AF ita arcus C D ad arcum FI, ergo A *g* est ad A*h* ut arcus CD ad arcum FI.

3. Igitur ex methodo indivisibilium summa Hypotenusarum A*g*, AG, applicatarum ad arcum FI aut quod idem est erectarum supra arcum FI, est ad summam Secantium A *h*, A H erectarum supra arcum CD, in ratione composita arcuum FI, CD; & unius Hypotenusæ AG, ad unam Secantem A H. Atqui hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis, cùm sit AG ad AH ut arcus CD ad arcum F I ut ostensum est *num*. 2. Ergo prædictæ duæ summæ Hypotenusarum & Secantium, sive quod idem est Figura prædicta Cylindrica genita ex Hypotenusis, & Figura prædicta Secantium, æquales sint inter se Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc constat ad quadraturam Conchoidis ABE, præter quadraturam Sectoris circularis ACD, habendam esse quadraturam Figuræ Secantium prædictæ. In hac igitur invenienda, quæ non parùm difficilis est, sequentes novem propositiones impendemus.

PROPOSITIO XI.

SInt (*Fig*. 7.) tres Figuræ ABC, ABE, ABF quarum prima ABC sit semisegmentum circuli cujus centrum D. Aliæ verò duæ ABE, ABF sint tales ut quælibet ordinata B E, *be* sit ad ordinatam sibi respondentem BF, bf, ut BC, bc ordinatæ circuli ad radium CD.

Dico summam omnium ordinatarum BE, be erectarum in punctis C, c, respondentibus, perpendiculariter ad planum ABC, constituere Figuram Cylindricam æqualem Figuræ ABF.

DEMONSTRATIO.

SIt AB divisa in punctis b, in quotcunque partes æquales, atque ex punctis C, c, ducantur tangentes CH, ch quæ occurrant in G, g ordinatis bc, bc & in H, h rectæ AB productæ versus A. Compleantur etiam rectangula BI, bi circumscripta figuræ ABF.

Quoniam angulus DCH factus à tangente CH rectus est, Triangula BCD, BCH rectangula similia sunt, quare, BH, CH :: BC, CD. Est autem BH, CH :: Bb, CG propter parallelas BC, bG. Et BC, CD :: BE, BF. Ergo Bb, CG :: BE, BF. Ergo Rectangulum sub Bb, BF sive Rectang. BI æquatur Rectangulo sub BE erecta in C & tangente CG. Similiter ostendetur Rectangula bi, bi æquari Rectangulis sub be, be erectis in c, c, & tangentibus cg, cg respondentibus.

Atqui per divisionem continuam AB in plures partes, summa Rectangulorum BI, bi desinit in figuram ABF; & summa tangentium CG, cg in arcum AC, (ut ostendit Fermatius in Differt. de Linearum curvarum comparatione cum rectis) ac proinde summa Rectangulorum sub BE, be & tangentibus CG, cg desinit quoque in figuram Cylindricam genitam ex omnibus ordinatis BE, be erectis supra arcum AC.

Ergo ex methodo inscriptorum & circumscriptorum Figura ABF æqualis est Figuræ Cylindricæ genitæ ex ordinatis BE, be erectis in C, c supra arcum AC. Quod erat demonstrandum.

Scholion. *Hæc propositio tradit pulcherrimam utilissimámque methodum cuicunque figuræ planæ assignandi figuram Cylindricam æqualem, & Figuræ Cylindricæ planam.*

PROPOSITIO XII.

IN Quadrante circuli ABC (*fig.* 8.) sit ducta tangens BD, & secantes Ad, AD quæ occurrant arcui BC in e, E, punctis, ex quibus ductæ ef, EF perpendiculares ad AB, producantur in h, H, ita ut fh, FH sint æquales secantibus Ad, AD respondentibus. Producatur etiam DB in G ita ut BG æqualis sit AB.

Dico omnia puncta H, *h* esse ad eamdem Hyperbolam descriptam per punctum G, asymptotis AB, AI rectum angulum continentibus.

DEMONSTRATIO.

Triangula Rectangula ABD, AFE sunt similia; ergo AB, AD :: AF, AE vel AF, AB. Sed AB, AD sunt æquales BG, FH (*hyp.*) ergo BG, FH :: AF, AB. Quare punctum H est ad Hyperbolam descriptam per G centro A, asymptotis AB, AI per punctum G. Idem ostendetur de punctis *h*. ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis (*fig.* 8.) Intelligantur omnes Tangentes BD, B*d* erigi in punctis E, *e* respondentibus, perpendiculariter ad planum ABC. Figura Cylindrica quam constituent supra arcum BC vocetur *Figura Tangentium.*

Dico Figuram illam Tangentium æqualem esse Segmento Hyperbolico BFHG.

DEMONSTRATIO.

Tangentibus BD, B*d* sumantur in FH, *fh* æquales FL, *fl*; Quoniam BD, AD :: FE, AE, sunt autem BD, AD æquales FL, FH (*hyp.*) erunt FL, FH :: FE, AE. Similiter ostendetur esse *fl*, *fh* :: *fe*, A*e*. Igitur (*prop.*11.) summa ordinatarum FL, *fl* sive æqualium BD, *bd* erectarum in punctis E, *e* constituit figuram Cylindricam æqualem Segmento Hyperbolico BFHG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Iisdem positis (*fig.*8.) ex punctis E, *e* demittantur in AC perpendiculares EM, *em*. Sitque curva A*n*N talis ut quælibet ordinata *mn* sit quarta proportionalis radio AB, secanti A*d*, & tangenti B*d* respondentibus punctis *m*, *e*.

Dico Figuram AMN æqualem esse Segmento Hyperbolico BFHG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB, A *d* :: B *d*, *m n*; est autem AB, A *d* :: *e m*, A *e* propter similitudinem Triangulorum A B *d*, A *e m*. Ergo quælibet tangens B *d* est ad ordinatam respondentem *m n*, ut *e m* ordinata circuli ad radium A *e*. Quare (*prop.* 11.) Figura A M N æquatur Figuræ Tangentium B *d*, BD erectarum super arcum BE; est autem hæc figura Tangentium æqualis segmento Hyperbolico BFHG (*Prop.* 13.) ergo Figura AMN eidem segmento Hyperb. BFHG æqualis est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Iisdem positis (*fig.* 8.) in BA producta sumatur AO æqualis AB; sitque curva O *p* P talis ut ejus quælibet ordinata *mp*, sit tertia proportionalis radio AB, & secanti A *d* respondenti. Dico Figuram AMPO æqualem esse Figuræ Secantium AB, A *d*, AD erectarum super arcum B E in punctis B, *e*, E respondentibus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*hyp.*) AB radius est ad quamlibet secantem A *d*, (hoc est *e m* ad radium A *e*) ut secans A *d* ad ordinatam *m p* respondentem. Figura AMPO (*prop.* 11.) æqualis est Figuræ secantium AB, A *d*, AD, erectarum super arcum BE in punctis B, *e*, E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem positis (*fig.* 8.) Dico summam Rectangulorum A *m p*, AMP, æquari solido recto cujus altitudo AB, basis autem Figura AMN.

DEMONSTRATIO.

Ad hoc solùm ostendendum est quodlibet Rectangulum A *mp* æquari Rectangulo sub AB, *m n*. Quod sic probabitur. Ex natura curvæ A *n* N (*prop.* 14.) habemus hanc Analogiam AB, A *d*, :: B *d*, *mn*. & ex natura curvæ O *p* P (*prop.* 15.) habemus hanc aliam Analogiam AB, A *d* :: A *d*, *mp*. ergo B *d*, *m n* :: A *d*, *m p*, & permutando B *d*, A *d*, aut A *m*, A *e*, aut A *m*, AB :: *mn*, *m p*. ac proinde Rectangulum A *m p* æquatur Rectangulo sub AB, *m n*. Quod erat demonstrandum.

PROPO-

PROPOSITIO XVII.

IIsdem positis (*fig.* 8.) Per punctum O, asymptotis CA, C*c* angulum rectum continentibus, descripta sit Hyperbola O *r* R quæ secet in *r*, R rectas *mp*. M P. Sitque CI diameter circuli BC.

Dico summam Rectangulorum IAO, I*mp*, IMP æquari solido recto cujus altitudo AB, basis segmentum Hyperbolicum AMRO.

DEMONSTRATIO.

AD hoc probandum est solummodò quodcunque Rectangulum I*mp* æquari Rectangulo sub AB, *mr*. Id autem sic ostendetur.

Ratio *mr*, *mp* componitur ex duabus his.

mr, AO; AO, *mp*.

Prima autem ratio *mr*, A O eadem est cum ratione AC, C*m* ex proprietate Hyperbolæ O *r* R.

Secunda verò ratio AO, *mp* hoc est AB, *mp* est eadem quæ quàdratorum AB. A*d*, (cùm tres AB, A*d*, *mp* sint proportionales ex generat. curvæ O P *prop.* 15.) & quad. AB ad quadr. A*d* est ut quad. *e m* ad quadr. A*e* sive ut Rectangulum I*m* C (æquale quadrato *e m*) ad quadratum AC. sive in ratione composita I*m*, AC, & *m*C, AC: Ergo cum ratio *mr*, *mp* componatur ex duabus 1. *mr*, AO, 2. AO, *mp*; substituendo loco 1. *mr* AO æqualem AC, C*m*. & loco 2. AO, *mp*; duas I*m*. AC; *m*C, AC. ratio *mr*, *mp*, composita invenitur ex tribus;

1. AC. C*m*.
2. I*m*. AC.
3. *m*C. AC.

Prima autem & tertia se mutuò elidunt, quare ratio, *mr*, *mp* æqualis est secundæ I*m*. AC. Unde Rectangulum sub I*m*, *mp* æquatur Rectangulo sub AC aut AB & *mr*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

IIsdem positis (*fig.* 8.) sit A*m* æqualis BF.

Dico Figuram secantium AB, A*d*, AD erectarum supra arcum BE æquari segmento Hyperbolico MR*rm*.

DEMONSTRATIO.

QUoniam rectæ AB, BG, BF æquales sunt (*hyp.*) rectis CA, AO, A*m*, manifestum est segmentum Hyperbolicum BGHF

H.

ſimile atque æquale eſſe ſegmento Hyperbolico A O *r m*.

Præterea cùm Rectangulum ſub I A, *m p* ſit differentia Rectangulorum ſub I *m*, *m p*, & ſub A *m*, *m p* manifeſtum eſt ſummam Rectangulorum ſub I A, *m p* eſſe differentiam ſummæ Rectangulorum I *m p*, & Rectangulorum A *m p*.

Eſt autem ſumma Rectangulorum I *m p* æqualis (*prop.* 17.) ſolido recto cujus altitudo A B, baſis Segmentum Hyperbolicum A O R M.

Et ſumma Rectangulorum A *m p* æquatur (*prop.* 16.) ſolido recto cujus altitudo AB, baſis Figura A M N. Hoc eſt ipſi æquale (*prop.*14.) ſegmentum Hyperb. B F H G, aut ſegmentum A O *r m*.

Ergo ſumma Rectangulorum I A, *m p* ſive ſolidum rectum cujus altitudo I A vel AB, baſis Figura A O P M eſt differentia duorum ſolidorum rectorum, quorum altitudo A B, baſes autem ſegmenta Hyperbolica A O R M, A O *r m*.

Atqui differentia horum Solidorum rectorum ejuſdem altitudinis AB, eſt etiam ſolidum rectum cujus altitudo eadem A B, baſis M R *r m* differentia baſium A O R M, A O *r m*.

Ergo ſolidum rectum cujus altitudo A B, baſis Figura A O P M. æquatur ſolido cujus eadem altitudo A B, baſis ſegmentum Hyperbolicum M R *r m*.

Unde ſequitur Figuram A O P M æquari ſegmento Hyperbolico M R *r m*.

Eſt autem (*prop.* 15.) figura A O P M æqualis Figuræ Secantium A B, A *d*, A D erectarum ſuper arcum B E. Ergo hæc Figura ſecantium æquatur Segmento Hyperbolico M R *r m*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Iiſdem poſitis (*fig.* 8.) ſumatur in AB recta AV, major aut minor quàm AB, & per V ducatur V X parallela tangenti B D, occurrénſque in *x*, X ſecantibus A *d*, A D. Intelligatur modo rectas omnes ſecantes A V, A *x*, A X erigi ſuper arcum B E in punctis, B, *e*, E reſpondentibus, ex iis generabitur figura nova ſecantium major aut minor quàm quæ ex rectis AB, A *d*, A D genita eſt.

In rectâ A O ſumatur A Q æqualis A V, & per Q centro C, aſymptotis C I, C *c* deſcripta ſit Hyperbola Q *s* S quæ occurrat in *s*, S, rectis *m r*, M R.

Dico novam hanc figuram ſecantium genitam ex rectis AV, A x, A X erectis supra arcum B E æqualem esse segmento Hyperbolico M S $s\,m$.

DEMONSTRATIO.

QUoniam propter parallelas BD, VX rectæ AV, Ax, AX proportionales sunt rectis AB, Ad, AD, manifestum est ex methodo indivisibilium, Figuram genitam ex secantibus AV, A x, AX erectis supra arcum BE in punctis B, e, E, esse ad Figuram genitam ex secantibus AB, A d, AD erectis supra eumdem arcum & in iisdem punctis, ut AV, est ad AB.

Præterea in Hyperbola Q s S ordinatæ AQ, $m\,s$ sunt ut C m, CA sive ut AO, $m\,r$ in Hyperbola OR, unde ordinatæ utriusque Hyperbolæ sunt inter se proportionales, ergo segmentum Hyperbolicum M S $s\,m$ est ad segmentum Hyperbol. M R $r\,m$ ut MS ad MR. sive ut AQ ad AO vel AV ad AB (cùm AQ AV, & AO, AB sint æquales ex hyp.)

Cùm igitur ostensum sit etiam ut AV ad AB, ita esse figuram ex secantibus AV, A x, A X ad figuram ex secantibus, A B, A d, AD. Figuræ ex secantibus sunt inter se ut segmenta Hyperpolica prædicta, est autem Figura ex secantibus AB, A d; A D æqualis segmento Hyperbolico M R $r\,m$ (*prop.* 18.) ergo Figura ex secantibus AV, A x, AX est etiam æqualis segmento Hyperbolico M S $s\,m$. Quod erat demuustrandum.

PROPOSITIO XX.

IIisdem positis (*fig* 8.) Esto Conchois TZ cujus Polus A, axis BT, Basis BD, figura genitrix sector circuli ABE.

Dico sectorem Conchoidicum A T Z æquari Triangulo ABD † sectori circulari ABE † segmento Hyperbolico MR $r\,m$.

DEMONSTRATIO.

SEctor Conchoidicus ATZ æquatur (*prop.* 10.) Triangulo A B D † sectori circulari A B E, † Figuræ secantium genitæ ex A B, A d, AD erectis supra arcum BE. Est autem (*prop.* 18.) prædicta Figura secantium æqualis segmento Hyperbolico M R $r\,m$. Ergo sector Conchoidicus ATZ æquatur Triangulo ABD † sectori circulari ABE † segmento Hyperbolico M R $r\,m$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I. Subtracto communi Triangulo ABD, figura Conchoidica BTZD æquatur sectori circulari ABE † segmento Hyperbolico M R s m.

Corollarium II. Sit alia Conchois $t z$, cujus Polus A, axis V t, Basis V X, Figura genitrix sector circuli ABE. Ostendetur eodem modo sectorem Conchoidicum A t ζ æquari Triangulo AVX † sectori circulari genitori ABE, † segmento Hyperbolico M S s m. Demonstratio est eadem, nisi quod ex prop. 19. supponitur segmentum Hyperb. M S s m æquari Figuræ genitæ ex secantibus AV, Ax, AX erectis supra arcum BE. Sublato item communi Triangulo A V X, Figura Conchoidica V t ζ X ostendetur æqualis sectori circulari A B E † segmento Hyperb. M S s m.

Corollarium III. Ex hac propositione & Corollariis præcedentibus constat Conchoidis quadraturam pendere à circuli & Hyperbolæ quadratura. Quod etiam ex sequenti propositione apparebit.

PROPOSITIO. XXI.

Sint (*fig.* 9.) duæ Conchoides DC, DE quarum axis communis DZ, Polus idem A, Figuræ genitrices, duo sectores circuli ABF, ABG, Bases ZX, ZY.

Suppositis duobus arcubus æqualibus BF, BG, ex Polo A ducantur rectæ AFC, AGE occurrentes Conchoidibus in C, E punctis, à quibus demittantur in XY perpendiculares CX, EY, & ex F, G in HI perpendiculares FM, GN completis quadrantibus ABH, ABI.

Jam producatur BA versus L, ut sit AL æqualis AZ distantiæ Poli A à basi XY. Tum centro I, asymptotis I H, I*i* angulum rectum continentibus describatur per L Hyperbola OLP quæ occurrat in O, P, rectis FM, GN productis.

Dico Figuram Conchoidicam XCDEY contentam sub perpendicularibus CX, EY, Conchoide CDE & basi XY, æquari Figuræ BFOPG compositæ ex segmento circulari BFMNG, & segmento Hyperbolico MOPN.

DEMONSTRATIO.

Ex puncto G in AB ducta perpendiculari GK, ipsi BK sumatur in AI æqualis AQ, & per Q ducatur QR ordinata Hyperbolæ OP.

I. Quoniam arcus BF, BG sunt æquales (*hyp.*) & ex F, G demissæ FM, GN perpendiculares in HI, patet rectas HM, IN æquales esse, & HN, IM.

Rursùs

Rurſus quoniam BK æqualis eſt AQ (*hyp.*) etiam AK ſive GN. æqualis eſt IQ. Sunt autem ex proprietate circuli tres HN, NG, NI proportionales, ergo illis æquales IM, IQ, IN ſunt etiam proportionales, unde ſegmenta Hyperbolica MORQ, QRPN ſunt æqualia ut demonſtrat Gregor. à S. Vincentio prop. 109. de Hyperbola.

II. Jam quoniam arcus BF, BG ſunt æquales, ac proinde ſectores circulares ABF, ABG ex quibus geniti ſunt ſectores Conchoidici ADC, ADE, manifeſtum eſt has Conchoides, DC, DE eſſe æquales & ſimiles, figuras item Conchoidicas DCXZ, DEYZ. Propter æqualitatem etiam linearum AF, SC Triangula rectangula AFM, SCX ſunt æqualia, atque eodem modo Triangula AGN, TEY. His ita probatis.

III. Jam facilè demonſtrabitur propoſitio. Nam ex Coroll. 1. propoſ. 20. ſi AB ſit æqualis AZ, & ex Coroll. 2. ſi AB ſit minor vel major quàm AZ, Figura Conchoidica DETZ æquatur ſectori circulari ABG† ſegmento Hyperbolico NPRQ, ergo addendo ex una parte Triangulum ETY, & ex altera Triangulum AGN æquale, Figura Conchoidica DEYZ æquatur ſegmento circulari ABGN † ſegmento Hyperbolico NPRQ.

Oſtenſum eſt autem (*num.* 1.) ſegmentum Hyperbolicum MOPN eſſe duplum ſegmenti NPRQ, & manifeſtum eſt ſegmentum circulare FMNG eſſe duplum ſegmenti circularis ABGN, ergo tota Figura FBGPO eſt dupla Figuræ Conchoidicæ DEYZ, ac proinde æqualis Figuræ Conchoidicæ CXYE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

Dimenſio Conchoidis tradita à P. Lalovera demonſtratur.

Iiſdem poſitis (*fig.* 9.) Eſto DZ axis Conchoidis DE. Centro Z radio DZ deſcribatur quadrans circuli ZD*h* occurrens in *g* ordinatæ Conchoidis E*q*, & in axe ZD producto ſumatur D*m* æqualis *gq*. Ex puncto D ſit D*d* perpendicularis ad DZ & æqualis AZ diſtantiæ Poli A à baſe ZY. Centróque Z, aſymptotis ZD, ZX per punctum *d* deſcribatur Hyperbola *ro* ad quam ex *q*, *m* ſint ordinatæ *qr*, *mo*.

Dico Segmentum Conchoidis D*q*E æquari Segmento Hyperbolico *morq*, aucto Segmento circulari D*qg*, & imminuto Rectangulo ſub AZ, *qg*.

Pulcherrimum hoc Theorema tradidit P. Lalovera in Appendice 2. adjecta ad lib. de Cycloide num. 8. Quâ autem viâ illud demonstraret non indicat, existimamus tamen usum ut solebat Libra Archimedea principiis. Cùm igitur illud indemonstratum reliquerit, nos ita facilè ex praecedentibus demonstrabimus.

DEMONSTRATIO.

I. QUoniam quadrans circuli ZD *b* aequalis est Conchoidis genitori ABI, atque ex Polo A ducta AGE, & ex G, E perpendiculares GK, E *q* ad rectam AD, rectae AK, Z *q* sunt aequales (*prop.* 4. *Coroll.* 1.)

Cùm igitur AQ sit aequalis BK (*hyp.*) ac proinde IQ ipsi AK, erit IQ aequalis Z *q*. Est autem & IA aequalis ZD, & AM, ipsi AN sive KG, sive *q g*, sive D *m* (*hyp.*) ac proinde IA † AM hoc est IM aequatur Z D † D *m* hoc est ipsi Z *m*. Denique AL, D *d* aequales eidem AZ (*hyp.*) sunt etiam aequales inter se.

II. Consideremus modò duo Segmenta Hyperbolica M O R Q, *m o r q*; quoniam ad aequales IA, ZD distantias à centris I, Z, ordinatae AL, D *d* aequales sunt ut modò probatum est, etiam ad aequales IQ, Z *q*, & IM, Z *m* distantias. ordinatae QR, *q r*, & MO, *m o* aequales sunt, & segmentum MORQ segmento *m o r q* aequale ac simile est. Ergo cùm segmentum MORQ segmento NPRQ aequale sit (*ut ostendimus in prop.* 21. *num.* 1.) etiam segmentum *m o r q* eidem segmento NPRQ est aequale.

Est autem (*prop.* 20. *Coroll.* 1. 2.) segmentum Hyperb. N P R Q † sector circularis ABG, aequale Figurae Conchoidicae DETZ. Ergo segmentum MORQ sive *m o r q* illi aequale † sector circularis A B G aut ZD*g* aequalis, aequantur Figurae Conchoidicae D E T Z.

III. Ergo subtracto utrinque cōmuni sectore circulari ZD*g*, segmentum Hyperb. *morq*, aequatur Figurae Conch. DE*g* † Parallelogrammo ETZ*g* (ostensum est enim in prop. 4. coroll. 2. quadrilatarum ETZ*g* esse parallelogrammum) Cùm autem in eadem prop. 4. sit ostensum esse A Z, Z *q* : : E *g*, *g q*, Rectangulum sub AZ, *g q* aequatur Rectangulo sub Z *q*, E *g* sive parallelogrammo ETZ*g*. Ergo segmentum Hyper. *m o r q* aequatur Figurae Conchoidicae D E *g* † Rectangulo sub AZ, *g q*. & auferendo utrinque Rectangulum illud sub AZ, *g q*, segmentum Hyperb. *m o r q* — Rectangulum sub A Z, *g q* aequatur Figurae Conchoidicae DE*g*. Denique addendo utrinque semisegmentum circulare D*gq*, Segmentum Hyperb. *m o r q* — Rectang. sub AZ, *g q* † semisegmentum circulare D *g q* aequantur Figurae Conchoidicae D E *q*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO. XXIII.

In qua juxta nostra principia demonstrantur ea quæ D. Barrovv tradidit circa dimensionem Conchoidis, & Figuras ei connexas.

D. Isaacus Barrovv summi ingenii vir & de Geometria optimè meritus in Lectionibus Geometricis pag. 110. & sequentibus, Appendicula 1. Figuras Tangentium, & Secantium, de quibus in hac secunda parte nos egimus examinavit, quod quidem haud scio an antè illum ullus fecisset, & Conchoidis dimensionem ex iis etiam deduxit, quemadmodùm nos. Sed diverso planè modo diversisque principiis. Juvat quæcunque ab eo inventa subtilissiméque demonstrata sunt hic referre, & quàm egregiè cum nostris cohæreant ostendere.

Theor. I.

Summa Secantium A D (*fig.* 8.) ad arcum B E pertinentium & ad axem B F applicatarum, æquatur segmento Hyperbolico BGHF. ***Barrovv. num.*** 1.

Hoc facile est, & demonstratum à nobis prop. 12.

Theor. II.

Summa Tangentium BD (*Fig.* 8.) ad arcum BE pertinentium & applicatarum ad rectam æqualem arcui BE æquatur spatio Hyperbolico BGHF, ***Barrovv. num.*** 2.

Demonstratum est antè *prop.* 13. ubi ostendimus Figuram Cylindricam Tangentium sive genitam ex Tangentibus BD supra arcum BE erectis æquari segmento Hyperbolico BGHF. Manifestum est enim illam Figuram Cylindricam, si arcus B E extendatur in lineam rectam, æqualem esse summæ Tangentium applicatarum ad rectam æqualem arcui BE, imo eadem est Figura modò convoluta, modò expansa.

Theor. III.

Summa secantium AD arcûs BE ad basin AM applicatarum, æquatur duplo sectoris ABE. ***Barrovv. num.*** 3.

Id quidem non demonstravimus, quoniam eo nihil nobis opus erat ad dimensionem Conchoidis quæ nobis proposita erat, sed facilè demonstrari potest ex universali principio tradito in prop. 11. Cùm enim ordinata circuli EM sit perpetuò ad radium AE, ut radius AB ad secantem AD. Manifestum est ex prop. 11. Figuram Cylindricam genitam ex radio AB supra singula arcûs BE puncta erecto, (hoc est duplum sectoris ABE) æquari figuræ genitæ ex secantibus AD ad rectam AM in punctis M respondentibus E, applicatis.

Theorema IV.

SUmma Tangentium BD ad arcum BE pertinentium & ad basin AM applicatarum æquatur semissi quadrati subtensæ BE. *Barrov. num.* 4.

Hoc etiam cùm non indigeremus non demonstravimus, demonstrari verò potest ex prop. 11. in hunc modum. Cùm sit perpetuò ordinata circuli EM ad radium AB sive AE, ut AM ad Tangentem BD, patet ex prop. 11. summam Tangentium BD applicatarum in M punctis respondentibus, æquari Figuræ Cylindricæ genitæ ex omnibus AM sive sinubus FE erectis in E supra arcum BE. Rursùs ex eadem prop. 11. manifestum est Fguram sinuum genitam ex omnibus sinubus FE erectis in E supra arcum BE æquari Summæ radiorum AE applicatorum ad rectam BF (eò quod sit FE, ad radium AE, ut FE ad radium AE.) hoc est Rectangulo sub radio AB & BF, sive dimidio rectanguli sub tota diametro BO & BF, sive dimidio quadrati subtensæ B E.

Ergo summa Tangentium BD applicatarum in M ad rectam AM æquatur semissi quadrati subtensæ BE. Quod arat ostendendum.

Theorema V.

ACceptâ AY æquali AM (*Fig.* 8.) & ex Y ductâ ad AY perpendiculari Y*y* quæ occurrat in *y* Hyperbolæ RO descriptæ centro C asymptotis CI, C*c* angulum rectum continentibus per O, (positâ AO æquali AB) solidum rectum seu ut vocat Barrovius Cylindricum cujus altitudo radius AB, basis segmentum Hyperbolicum MR*y*Y duplum est summæ quadratorum secantium AD applicatorum ad basin AM in punctis M respondentibus. *Barrov. num.* 5.

Idem nos sic demonstrabimus. Sit curva OP ut descripta est in prop. 15. talis nimirum ut quælibet ordinata MP sit tertia proportionalis ad

radium

radium AB & ſecantem AD reſpondentem. Erit igitur ſumma quadratorum ſecantium AD applicatorum in M æqualis ſolido recto cujus altitudo AB, baſis autem Figura AOPM. Sive illi æqualis (*prop.* 15.) Figura ſecantium AD erectarum ſuper arcum BE, ſive Figuræ illi ſecantium æquale (*prop.* 18.) ſegmentum Hyperbolicum M R *r m*. Eſt autem ſegmenti Hyperbolici M R *r m* duplum ſegmentum Hyperb. M R *y* Y ut oſtenſum in propoſ. 21. num. 1. ergo ſolidum rectum cujus altitudo AB, baſis ſegmentum Hyperbolicum M R *y* Y eſt duplum ſummæ quadratorum ſecantium AD applicatorum ad rectam AM. Quod erat oſtendendum.

Theorema VI.

SPatium Hyperbolicum M R *y* Y (*fig.* 8.) duplum eſt figuræ ſecantium AD erectarum ſuper arcum B E. *Barrovv. num.* 6.

Hoc ingenioſè deduxit Barrovius ex præcedenti, nos alia via progreſſi demonſtravimus. In propoſ. enim 18. Oſtendimus Figuram ſecantium æquari ſegmento ſeu ſpatio Hyperbolico M R *r m*, & prop. 21. num. 1. Segmentum Hyperbolicum M R *y* Y eſſe duplum ſegmenti M R *r m*. unde patet ſegmentum M R *y* Y duplum eſſe Figuræ ſecantium ſuper arcu BE erectarum.

Theorema VII.

SUmma Quadratorum omnium ſecantium AD applicatarum ad arcum BE in rectam lineam extenſum æquatur Parallelepipedo cujus baſis Rectangulum BAM, alitudo maxima ſecans A D. *Barrovv. num.* 7.

Hujus propoſitionis demonſtrationem omiſit Barrovius quam habebat *quoniam* inquit *aliud ſchema diſcurſumque præ reliquis pleriſque longiuſculum expoſcit*, *neque rem tanti video.* Nos eam breviter & facilè hoc modo demonſtrabimus.

Summa quadratorum ſecantium AD (quæ radii ſunt Trianguli ABD) applicatarum ad arcum BE, æquatur (*propoſ.* 2.) ſolido recto cujus baſis ipſum Triangulum ABD; altitudo verò dupla ipſius AB. hoc eſt Parallelepipedo cujus baſis eſt rectangulum ſub AB, BD, altitudo verò AB. Reliquum eſt igitur ut oſtendamus tale parallelepip. æquari parallelepipedo cujus baſis Rectangulum ſub AB, AM, altitudo AD. ſive horum baſes eſſe cum altitudinibus reciprocas; hoc autem manifeſtum eſt. Nam Rectangulum ſub AB, BD eſt ad Rectangulum ſub AB. AM, ut BD ad AM, hoc eſt ut AD ad AE (in triangulis ſimilibus ABD, AEM) hoc eſt ut AD ad AB.

Theorema VIII.

Esto (*fig.* 8.) curva B *b* talis ut singulæ ordinatæ F *b* ad axem AB sint æquales Tangentibus B D respondentibus. occurrátque in *b* rectæ F E, atque ex *b* in AC demittatur perpendicularis *b a*. Figura AB *b a* est dimidium segmenti Hyperbolicí M R *y* Y. *Barrovv. num.* 8.

Hoc sic demonstrabimus ex nostris principiis.

I. Sumptâ A O æquali AB, Polo O, axe A B, basi A *a*, intelligatur descripta Conchois BK quæ occurrat in K rectæ FE. Jungatúrque O K quæ erit parallela ipsi AE, (*prop.*4.) & secabit basin in puncto *a*, cùm propter similitudinem TriangulorumOA*a*, ABD, & latera OA, AB æqualia, bases A*a*, BD, sive (*hyp.*) A *a*, F *b*, sint æquales. Parallelogrammum igitur A E K *a* Rectangulo A F *b a* æquatur, cùm sit utriusque eadem basis A *a*.

II. Rursùs quoniam ex proprietate Conchoidis, O A, A F :: E K, F E; permutando O A, E K :: A F, F E :: A B, BD. unde cùm O A; A B æquentur, etiam E K, B D æquales sunt, ergo F *b* æqualis BD, (*hyp.*) æquatur etiam ipsi E K. Cùm ergo hoc eveniat quæcunque sit ordinata FE. Figura BF*b* æquatur Figuræ B E K.

Est autem ut diximus Rectangulum AF *b a* etiam æquale Parallelogrammo AEK*a*, ergo Figura BF*b* † Rectangulum A F *b a* sive tota Figura A B *b a* æquatur Figuræ B E K † Parallelogrammo AEK*a*.

III. Demonstratum est autem in prop. 22. num. 3. Figuram BEK arcu circuli & Conchoide ordinatáque comprehensam, unà cum Parallelogrammo AEK*a* æquari segmento Hyperbolico M R *r m*, quod dimidium est segmenti M R *y* Y (ut ibidem ostensum est num. 2.) ergo Figura A B *b a* segmenti Hyperbolici M R *y* Y, dimidium est. Quod erat ostendendum.

Theorema IX.

Iisdem positis, centro A, axe BO, describatur Hyperbola æquilatera O 7, cujus asymptoti A 3, A 4, & quæ occurrat in puncto 7 rectæ *b a* productæ.

Dico Figuram AB*ba*, sive Figuram BF*b* (quæ summa est Tangentium BD applicatarum ad BF) † Rectang. A F *b a* duplam esse sectoris Hyperb, AO7, (junctâ rectâ A 7) *Barrovv. n.* 10.

Pulcherrimum hoc Theorema ingeniosissimè demonstravit Barrovius, & quod magni fieri debet independenter à Figuris Tangentium & secantium, unde novam invenit viam ad dimensionem Conchoidis. Nescio an viderit illud sine novis principiis, ex præmissis deduci posse. Nos demonstrabimus suppositis Lemmatibus sequentibus ad hoc necessariis.

LEMMA I.

Sint (*fig.* 10.) duæ Hyperbolæ DE, OP descriptæ eodem centro A, iisdémque asymptotis AL, AM, Síntque earum semiaxes AF, AG, in eadem recta linea constitutæ.

Sint jam duæ rectæ CD, BE parallelæ asymptoto AM, occurrentes Hyperbolis in D, E, & O, P.

Dico segmenta BCDE, BCOP esse inter se ut quadrata semiaxium AF, AG.

DEMONSTRATIO.

Ex F, G verticibus Hyperbolarum ducantur FH, GI parallelæ eidem asymptoto AM, occurrátque FH, Hyperbolæ OP in K. Manifestum est segmenta Hyperbolica BCDE, BCOP esse inter se ut FH, ad KH. Est enim FH, CD : : AC, AH : : HK, CO. Ergo permutando FH, HK : : CD, CO. & ita ostendetur omnes alias ordinatas BE, BP, &c. Segmentorum BCDE, BCOP esse inter se ut FH, HK unde ex methodo indivisibilium segmentum BCDE est ad segmentum BCOP ut FH ad HK.

Jam FH ad HK est in ratione composita FH, GI, (hoc est AH, AI in Triangulo AFH) & GI, HK (hoc est rursum AH, AI ex proprietate Hyperbolæ) ergo FH est ad HK ut quadratum AH ad quadratum AI sive ut quadratum AF ad quadratum AG.

Ostendimus autem segmentum BCDE esse ad segmentum BCOP ut FH ad HK, ergo segmentum BCDE est ad segmentum BCOP ut quadratum AF ad quadratum AG. Quod erat demonstrandum.

LEMMA II.

Iisdem positis (*fig.* 10.) sit alia Hyperbola æquilatera *op*, descripta centro *a*, asymptotis *as*, *ax*, cujus semiaxis sit *ag*, sintque in asymptoto *as* abscissæ *ar*, *as* proportionales abscissis AB, AC. & ex *r*, *s*, ducantur, *rt*, *su* parallelæ asymptoto *ax*.

Dico segmentum BCDE esse ad segmentum *rsut* ut quadratum semiaxis AF ad quadratum semiaxis *ag*.

DEMONSTRATIO.

SUmptâ in AF rectâ AG æquali *a g*, per G, centro A, asymptotis AL, AM Hyperbolæ DE describatur Hyperbola OP. occurrens CD, BE in O, P, & rectis AB, AC sumantur in *a s* æquales *a b*, *a c*. & ex punctis *b*, *c* ducantur ordinatæ *b p*, *c o*.

Quoniam Hyperbolæ OP, *o p* sunt æquilateræ (*hyp.*) & semiaxes AG, *a g* habent æquales, atque sumptæ sunt abscissis AB, AC, æquales abscissæ *a b*, *a c*, manifestum est segmenta BCOP, *b c o p* esse similia & æqualia. Est autem ex præced. Lemmate segmentum BCDE ad segmentum BCOP ut quadratum AF ad quadr. AG, ergo idem segmentum BCDE est ad segmentum *b c o p* ut quadr. AF ad quadr. AG Cùm autem sit (*hyp.*) *a b* ad *a c* ut BA AC sive *a r* ad *a s*, segmenta *b c o p*, *r s u t* sunt æqualia (*Greg. à S. Vincent. de Hyperbola prop.* 11 .) ergo segmentum BCDE est ad segmentum *r s u t* ut quadr. AF ad quadr. AG, sive quoniam AG, *a g* sunt æquales (*Hyp.*) ut quadratum semiaxis AF ad quadr. semiaxis *a g*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Idem probaretur tum in hoc Lemmate, tum in primo, quamvis Hyperbolæ non essent æquilateræ, dummodo anguli asymptotici A, *a*, essent æquales.

His duobus Lemmatibus suppositis ueniamus modo ad demonstrationem Theorematis IX anteà propositi.

Demonstratur Theorema IX. præcedens.

OStendendum est Figuram AB*ba* esse duplam Sectoris Hyperbolici AO7. (*fig.* 8.)

Ex punctis O, 7, ducantur rectæ O3, 72 parallelæ asymptoto A4 & occurrentes alteri asymptoto A3 in 3, 2. recta verò 72 occurrat AO in puncto 5. Prætereà ex puncto 7, ducatur recta 49 parallela asymptoto A3 & occurrens rectæ AO in 9. ducatur etiam in Hyperbola O7, ordinata 78. His positis.

I. Sector Hyperbolicus AO7 æquatur segmento Hyperbolico 23O7. Nam ex proprietate Hyperbolæ O7 abscissæ A2, A3 sunt ut reciprocè ordinatæ 3O, 27. Quare Triangulum A3O æquatur Triangulo A27. unde sublato communi Triangulo A25 & addito Trilineo O57, sector Hyperbolicus AO7 æquatur segmento 23O7. Hinc sequitur ostendendum esse Figuram AB*ba* esse duplam segmenti 23O7.

II. Figura AB*ba* dimidia est segmenti Hyperbolici MR*y*Y ut ostensum est Theor. VIII. præcedenti. Est autem segmentum MR*y*Y duplum segmenti MR*rm* ut ibidem dictum est in demonstratione, ergo figura AB*ba* est æqualis segmento MR*rm*. Ostendendum igitur restat segmentum MR*rm* esse duplum segmenti 23O7.

III.

III. Quoniam (*hyp.*) AO est æqualis AB sive AC, in Triangulo Rectangulo ACO, quadratum CO duplum est quadrati AO. Est autem CO (*hyp.*) semiaxis Hyperbolæ OR, & AO semiaxis Hyperbolæ O 7. Quare si ostenderimus abscissas CM, C *m* esse inter se ut abscissas A 2, A 3, cùm segmenta Hyperbolica hoc posito sint (*Lemm.* 2. *prac*) ut quadrata semiaxium CO, AO, sequetur segmentum M R *r m* duplum esse segmenti 2 3 O 7. Quare superest tantùm ostendendum abscissas CM, C *m*, esse ut abscissas A 2, A 3. Hoc autem demonstrabimus ostendendo tam CM, C *m*, quàm A 2, A 3. esse ut AO ad A *9*.

IV. Ac primò ostendamus CM, C *m* esse ut AO ad A *9*. Adverte cùm Hyperbola O 7 sit æquilatera (*hyp.*) angulúsque 3 A 4 idcircò rectus, ejus dimidium 3 A *9* sive alternum 8 *9* 7 esse semirectum, ac proinde in Triangulo rectangulo 7 8 *9*, latera 7 8, 8 *9* sunt æqualia. Deinde quoniam (*hyp.*) A *m* sumpta est æqualis BF, C *m* æquatur A F sive M E, unde C M est ad C *m* ut CM ad ME, sive ut M E ad M I. [si C I sit diameter circuli CB.] Sive ut ME ad AC. † AM. Est autem ME ad AC sive AE, ut AB ad AD sive O *a* sive *a* 7 (æqualem O *a* ex proprietate Hyperbolæ æquilateræ O 7) sive A 8. Et eadem ME est ad AM ut AB ad BD, sive 8 7, sive 8 *9*. Cùm ergo ME sit ad AC ut AB ad A 8, & ME ad AM ut AB ad 8 *9*, sequitur ME esse ad AC † AM (hoc est CM ad C *m* ut dictum est) sicut AB ad A 8 † 8 *9*, hoc est AB sive AO ad A *9*.

V. Ostendamus modò quod reliquum est etiam abscissas A 2, A 3 esse inter se ut AO, A *9*. Hoc autem est facile. Nam ex proprietate Hyperbolæ O 7 cujus asymptoti sunt A 3, A 4. A 2 est ad A 3 ut reciprocè 3 O ad 2 7 sive illi æqualem A 4. Ut autem 3 O ad A 4 ita AO ad A *9* in Triangulis similibus A 3 O, A 4 *9*. Ergo A 2, A 3 :: AO, A *9*. Quod erat demonstrandum.

Theorema X.

Figura BF*b* genita ex tangentibus BD applicatis ad BF æquatur Figuræ BEK contentæ arcu circuli BE & Conchoide BK descriptæ Polo O, (sumptis A B, AO æqualibus) basi A *a*, axe AB.

Unde spatiorum ejusmodi Conchoidalium dimensiones innotescunt. *Barrovv. num.* 11. 12.

Figuram BF*b* æquari Figuræ BEK antè ostendimus Theor. VIII. num. 2. eádemque via quà Barrovius quæ statim sese offert, nempe quoniam singulæ ordinatæ F *b*, EK eidem tangenti BD atque adeò inter se sunt æquales.

L

Hinc autem ſequi dimenſionem ſpatiorum Conchoidalium manifeſtum eſt; Cùm ſit demonſtratum Figuram BF*b* † Rectang. AF*ba* eſſe dimidium ſegmenti Hyperbolici MR*y*Y: (*Theor.* 8.) aut etiam duplum ſectoris Hyperbolici AO 7.

Hactenùs præclara Doctiſſimi Barrovii inventa circa Conchoidum dimenſionem, Figuráſque ei connexas Secantium ac Tangentium, atque ea cùm noſtra methodo egregiè cohærere demonſtravimus. Nunc ad alia progrediamur.

PROPOSITIO XXIV.

Locus Conchoidicus infinitus eſt, ſive ſpatium ſub Conchoide DE (*fig.* 9.) ejuſque aſymptoto ZY in infinitum productis majus eſt quacunque figura data.

Vuallisius hoc ingenioſè demonſtravit Mechan. part. 2. prop. 30. ſed faciliùs rem abſolviſſet, ſi ſegmentorum Conchoidicorum dimenſionem notam habuiſset. Ex multis autem modis qui ſe offerunt ad hoc demonſtrandum, ſequentem eligimus ut breviorem.

DEMONSTRATIO.

Oſtenſum eſt in propoſ. 21. Figuram Conchoidicam CXYE æquari ſegmento circulari BFMNG † ſegmento Hyperbolico MOPN. Per acceſſum autem continuum punctorum F, G, ad H, I, Figura Conchoidica CXYE abit in ſpatium contentum ſub Conchoide duplici DC, DE & baſi XY in infinitum productis.

Ex altera autem parte, ſegmentum circulare BFMNG abit in ſemicirculum HBI, & ſegmentum Hyperbolicum MOPN in locum Hyperbolicum comprehenſum ordinata H*b*, abſciſſa HI, aſymptoto infinita I*i*, & curva Hyperbolica *b* P pariter infinita verſus P.

Cùm igitur locus ille Hyperbolicus infinitus ſit quoad areã ſeu major quacunque figura data, ut ſatis Geometris notum eſt, ſequitur ſpatium Conchoidicum inter Conchoidem duplicem & aſymptotos contentum cùm æquetur ſemicirculo & loco illi Hyperbolico, infinitum eſſe quoad aream, ergo & dimidium contentum ſub DZ axe, & curva DE, atque aſymptoto Z Y in infinitum productis, infinitum etiam eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

Circulus, Hyperbola, & Conchois eam inter ſe connexionem habent, ut ſi earum una quadretur, aliæ duæ ſimul ſumptæ quadrentur & viciſſim.

DEMONSTRATIO.

HOc ex præcedentibus satis manifestum est. Paulò tamen aliter & clarissimè id demonstremus. Ex puncto D (*fig.9.*) sit DV. tangens Conchoidem DE in D, & occurrens radio Conchoidis AE in V.

Figura Conchoidica ZDET æquatur (*prop.* 20. *Coroll.* 1. 2.) Sectori circuli ABG † segmento Hyperbolico NPRQ. ergo addendo utrinque Figuram Conchoidicam DEV, trapezium DZTV æquatur sectori circuli ABG † segmento Hyperbolico NPRQ † Figuræ Conchoidicæ DEV. Quare si trium harum figurarum quadretur una, quadrabuntur aliæ duæ simul sumptæ, & si quadrentur duæ quadrabitur tertia. Quod erat demonstrandum.

Dimensio Solidorum Rotundorum ex Conchoide genitorum circa Basin.

PROPOSITIO. XXVI.

Lemma ad sequentem.

ESto (*fig* 5.) quadrans circuli BFP, ejúsque segmentum BMN, & radius BF productus in A, denique per A, AL parallela FP.

Dico datâ circuli quadraturâ haberi seu reduci ad Sphæram Rotundum genitum ex segmento BMN circa AL revoluto.

DEMONSTRATIO.

EX N demittatur in FP perpendicularis NY. Ex Archim. reducitur ad sphæram tam Rotundum ex segmento FBNY circa FY, quàm Cylinder ex Rectangulo FN circa eamdem FY. Ergo & Rotundum ex segmento BMN circa eamdem FY. Jam datâ circuli quadraturâ, quadratur sector FBN, ergo & segmentum BMN. Quoniam igitur datâ circuli quadraturâ reducitur ad sphæram Rotundum ex BMN circa FP, & BMN segmentum quadratur, datâ eâdem circuli quadraturâ habetur recta TV parallela FP sive AL, transiens per centrum grav. segmenti BMN. (*prop.* 8. *Coroll.* 1.) Rursus quoniam habetur recta TV parallela AL, transiens per centrum grav. segmenti BMN, & ipsius segmenti quadratura, reducetur ad sphæram Rotundum ex eodem segmento BMN circa AL (*Prop.* 8. *Coroll.* 2. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Similiter datâ circuli quadraturâ ostendetur Rotundum ex quadrante integro BFP circa AL reduci ad sphæram.

PROPOSITIO XXVII.

ESto (*fig.5.*) segmentum Conchoidis BME, cujus Polus A, axis BF, basis FK,

Dico datâ circuli quadraturâ reduci ad sphæram Rotundum ex BME circa basin FK.

DEMONSTRATIO.

CEntro F, radio FB, descriptus sit quadrans circuli FBP, qui secet in N rectam ME ordinatam Conchoidis. Rotundum ex BME circa FK æquatur Rotundo ex BMN circa AL (*prop.5.*) sed Rotundum ex BMN circa AL reducitur ad Sphæram datâ circuli quadraturâ. Ergo eâdem datâ Rotundum ex BME reducitur ad sphæram. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXVIII.

IIsdem positis, Dico Rotundum ex loco integro FBGK circa asymptotum infinitam FK etiam reduci ad sphæram datâ circuli quadraturâ.

DEMONSTRATIO.

EAdem est. Ostendetur enim tale Rotundum æquari Rotundo ex quadrante BFP circa AL, & hoc reduci ad sphæram datâ circuli quadraturâ.

Scholion. Spatium Conchoidicum FBGK infinitum est, ut ostendimus prop. 24. revolutum tamen circa asymptotum generat Solidum finitum. Hoc mirantur qui Geometriæ arcana ignorant, Geometræ autem sciunt idem in aliis infinitis locis asymptoticis reperiri, ac præsertim in Hyperbolico.

Dimensio Rotundorum ex Conchoide genitorum circa Axem.

PROPOSITIO XXIX.

Lemma ad sequentia.

ROtundum ex segmento Hyperbolico circa asymptotum rotato reducitur ad sphæram.

DEMONS-

M

Quoniam AP æquatur GC (*prop.* 4. *Coroll.* 1.) & AB (*hyp.*) ipsi BH, & GB ipsi BE, reliqua AG reliquæ EH æqualis est. Deinde quoniam AD (*hyp.*) æquatur CI, & MD ex natura Conchoidis ipsi GB, aut BE, aut CL, reliqua AM reliquæ LI æqualis est. Cùm igitur AG, AM ipsis EH, LI æquales sint, erit AG, AM : : EH, LI. Sed AG, AM : : AP, AQ : : AR, AN : : GC, GB : : FL, FE. ergo EH, LI : : FL, FE. Quare punctum I est ad Hyperbolam HK. Idem ostendetur de puncto *i*. ergo &c. Quod erat demondrandum.

PROPOSITIO XXXI.

Iisdem positis (*Fig.* 12.) si segmentum Conchoidis BCD volvatur circa axem BC.

Dico Rotundum inde genitum reduci ad sphæram datâ Hyperbolæ quadraturâ.

DEMONSTRATIO.

Ex propos. 29. Rotundum ex segmento Hyperbolico EHIL circa asymptotum EF reducitur ad sphæram, ac proinde cubatur summa quadratorum IL, *i l*, HE. Cùbatur autem & summa quadratorum CL, *c l*, BE ordinatarum Rectanguli BELC. Denique datâ Hyperbolæ quadraturâ quadratur segmentum EHIL, ac proinde cubatur solidum rectum cujus basis EHIL, altitudo BE, sive quod idem est, cubatur summa Rectengulorum ILC, *i l c*, HEB. Ergo & eadem summa rectangulorum bis sumpta.

Quoniam igitur cubatur 1. summa quadr. IL, *i l*, HE; 2. Summa quadrat. LC, *l c*, EB. 3. summa Rectang. ILC, *i l c*, HEB bis sumptâ (datâ Hyperb. quadraturâ) eâdem datâ cubabitur summa quadratorum IC, *i c*, HB. sive æqualium (*prop.* 30.) AD, A *d*, AB. applicatorum ad axem BC.

Ergo (*prop.* 6.) datâ Hyperbolæ quadraturâ Rotundum ex segmento Conchoidis BCD, circa axem BC, reducitur ad sphæram. Quod erat demonstrandum.

De Centro Gravitatis Conchoidis.

PROPOSITIO XXXII.

Esto (*fig.* 13.) circa cemmunem axem BG, duplex Conchois æqualis & similis BC, BD, quarum Polus A, bases ER, EF.

Dico datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ haberi centrum gravitatis Figuræ Conchoidicæ B C D.

DEMONSTRATIO.

DAtâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ quadratur segmentum Conchoidicum BGD (*prop.* 25.) Deinde datâ solius circuli quadraturâ reducitur ad sphæram Rotundum ex eodem segmento BGD circa basin EF (*prop.* 27.)

Ergo datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ habetur recta XZ parallela EF, transiens per centrum gravit. segmenti Conchoidici BGD. (*prop.* 8. *Coroll.* 1.) atque ita habetur punctum X in quo hujusmodi recta secat axem BG.

Est autem idem punctum X centrum gravit. Figuræ BCD compositæ ex duabus Conchoidibus æqualibus & similibus BCG, BDG. Ergo datâ Circuli & Hyperb. quadraturâ habetur X centrum gravit. BCD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO. XXXIII.

IIsdem positis (*fig.* 13.) centro E describatur quadrans circuli EBF æqualis generatori Conchoideos, & occurrat ordinatæ GD in H. Producatur etiam EB in O, ita ut BO sit æqualis GH, sit item BI perpendicularis ad BE, & æqualis AE distantiæ Poli A à basi Conchoidis EF. Prætereà centro E, asymptotis EO, ER per I descripta sit Hyperbola quæ occurrat in M, N rectis GM, ON parallelis ER. Denique supponamus rectam VY parallelam EF & occurrentem axi BE in V, transire per centrum gravitatis segmenti circularis BGH.

Dico AV esse ad EX ut segmentum Hyperbolicum GMNO † segmetum circulare BGH — Rectangulum sub AE, GH ad segmentum circulare BGH.

DEMONSTRATIO.

SEgmentum Conchoidicum BGD est ad segmentum circulare BGH ut AV ad EX (*prop* 7.) Est autem segmentum Conchoidicum BGD (*prop.* 22.) æquale segmento Hyperb. GMNO † segm. Circul. BGH — Rectang. sub AE, GH. Ergo ut AV ad EX ita segment. Hyperb. GMNO † segment. circul. BGH — Rectang. sub AE, GH ad segmentum circulare BGH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

Demonstratur Theorema quod Doctissimus P. Lalovera invenit & indemonstratum reliquit circa centrum gravitatis Conchoidis.

IIsdem positis (*fig.* 13.) intelligatur recta AB esse Libra Archimedea suspensa ex puncto E, pendeátque liberè ut jacet ex brachio EB segmentum circulare BGH; ex puncto autem A extremo brachii EA pendens figura L æquiponderet segmento BGH. Sitque ut antè XZ transiens per centrum grav. segmenti Conchoidici BGD.

Dico AE esse ad EX ut segmentum Hyperb. GMNO † segment. circul. BGH — Rectang. sub AE, GH, ad segmentum Circul. BGH † Figuram L.

Præclarum hoc Theorema refertur in lib. de Cycloide. Append. 2. *num.* 8.

DEMONSTRATIO.

QUoniam Figura L (*hyp.*) æquiponderat segmento circulari BGH, Librâ AB suspensâ ex E, transitque VY per centrum gravit. segmenti BGH, AE est ad EV, ut reciprocè segmentum Circuli BGH ad figuram L. Ergo AE ad AE † EV sive ad AV, ut segmentum circuli BGH ad idem segmentum BGH † L.

Jam segmentum Conchoid. BGD est ad segmentum circulare BGH † figur. L in ratione composita ex his duabus.

1. Segmenti Conchoid. BGD ad circulare BGH.

2. Segmenti circul. BGH ad idem BGH † L.

Est autem prima ratio eadem quæ AV, EX (*prop.* 7.) & 2. ratio eadem quæ AE, AV ut modò ostendimus, rationes autem AE, AV; AV. EX componunt rationem AE, EX.

Ergo AE est ad EX ut segmentum Conchoid. BGD (hoc est *prop.* 22. segmentum Hyperb, GMNO † segm. circul. BGH — Rectang. AE, GH) est ad segmentum circul. BGH † L. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

IIsdem positis (*fig.* 13.) Dico datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ non solùm haberi centrum gravit. totius Figuræ Conchoidicæ BCD, ut demonstratum est *prop.* 32. sed etiam ejus dimidiæ nempe segmenti BGD.

DEMONSTRATIO.

DAtâ circuli & Hyperb. quadraturâ, habetur recta XZ parallela asymptoto EF, transiens per centrum gravit. segmenti Conchoid. BGD ut ostensum est prædicta *propos.* 32. in decursu demonstrationis.

Deinde datâ solius Hyperbolæ quadraturâ, reducitur ad sphæram Rotundum ex eodem segmento BGD circa axem BG (*propos.* 32.) & datâ quadraturâ circuli atque Hyperbolæ idem segmentum BGD quadratur (*prop.* 25.) atque ita datâ circuli & Hyperb. quadraturâ habetur recta SZ parallela axi BG, transiens per centrum gravit. ejusdem segmenti BGD (*prop.* 8. *Coroll.* 1.)

Quoniam igitur datâ circuli atque Hyperb. quadraturâ habentur duæ rectæ XZ, SZ transeuntes per centrum gravitatis segmenti BGD, iisdem datis habetur punctum Z illius segmenti centrum gravitatis. Quod erat demonstrandum.

De Tangentibus Conchoidis.

PROPOSITIO XXXVI.

Plures noveque constructiones traduntur ad inveniendam Conchoidis Tangentem, atque ab aliis tradita partim emendantur, partim ex nostris principiis demonstrantur.

ESto (*fig.* 14.) Conchois CD, cujus Polus A, Axis BC, Basis seu asymptotus BT, datum in Conchoide punctum D, ex quo oporteat Tangentem ducere.

Prima Constructio.

JUngatur AD, quæ Basin BT secet in E, tum in AC sumptâ AF æquali axi BC, describatur quadrans circuli AFG qui secet rectam AD in H, & ex H ducatur circulum Tangens HL, quæ occurrat in L rectæ AG. Denique fiat ut AH ad AD, ita AL ad quartam EX sumptam versus T.

N

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

Demonstratio patet ex prop. 9. cùm circuli quadrans AFG sit figura genitrix Conchoidis CD.

Secunda Constructio.

JUngatur AD quæ occurrat asymptoto in E, sitque DQ parpendicularis ad AD, quæ occurrat in Q rectæ AG, parallelæ asymptoto BT, & rectæ AQ sumatur æqualis EX.

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

TRiangula Rectangula AHL, ADQ cùm similia sint, AH, AD :: AL, AQ; sive cùm AQ, EX æquentur (*hyp.*) AH, AD :: AL EX. Ergo (*prop. 9.*) DX tanget Conchoidem in D.

Tertia Constructio.

JUngatur AD & ex D ducatur DV perpendicularis ad AC, & fiat ut DV ad AD ita AD ad EX.

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

IN Triangulis similibus AHL, ADV (propter parallelas AQ, DV) AH, AL :: DV, AD :: AD, EX (*hyp.*) & permutando AH, AD :: AL, EX. Ergo, &c.

Quarta Constructio.

JUngatur AD, quæ occurrat asymptoto in E, sitque ut BE ad AE ita AD ad EX.

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

AE, BE (*hyp.*) :: EX, AD. Sed AE, BE :: AL, AH (propter similitud. Triang. ABE, AHL) ergo EX, AD :: AL, AH, & invertendo AH, AL :: AD, EX. & permutando AH, AD :: AL, EX. ergo, &c.

Quinta Constrnctio.

EX puncto D sit DV perpendicularis ad axem AC, & DO perpendicularis ad AD, quæ occurrat in O asymptoto BT. fiátque ut BV ad BA ita EO ad OX.

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

QUoniam BV, BA (*hyp.*) : : EO, OX : : componendo AV. BV : : EX, EO : sed AV, BV : : AD, ED : : AQ, EO. Ergo EX, EO : : AQ, EO. Quare EX æquatur AQ, Ergo (*Constr.2.*) DX tangit Conchoidem in D.

Sexta Constructio.

JUngatur AD, ex D ducatur DV perpendicularis ad AC, & DI perpendicularis ad BX. Tum fiat ut IE ad DE ita AD ad EX.

Juncta DX tangit Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

IE, ED : : DV, AD, sed IE, ED : : AD, EX (*hyp.*) ergo DV, AD : : AD, EX. Quare (3. *Construct.*) DX tangit Conchoidem.

Septima Constructio.

JUnctâ AD, quæ occurrat BX in E. ducatur DV perpendicularis ad AC, & ex E, ES perpendicularis ad DV, jungatúrque AS, & angulo ASD fiat æqualis angulus ADX.

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

QUoniam anguli ASD, ADX sunt æquales (*hyp.*) & alterni SDA, DEX; Triangula ADS, DEX, sunt similia, & DS, DA : : DE, EX. Est autem DS, æqualis EI, ergo EI, DA : : DE, EX, & permutando EI, DE : : AD, EX. Ergo (6. *constrnct.*) DX tangit Conchoidem in D.

Octava Constructio.

JUngatur AD, quæ occurrat in E asymptoto BX, & ducatur DV perpendicularis ad axem BC. Fiátque ut quadratum AV † Rectangulum DV, BE ad quadratum DV, ita BV ad VK.

Juncta DK tanget Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

QUoniam KV, VB : : Quadr. DV, Quadr. AV † Rectang. DV, BE. Componendo KV, KB : : Quadr. DV, Quadr. DV † Quadr. AV † Rectang. DV, BE.

Sit ex D recta DX tangens Conchoidem & occurrens asymptoto BT in X. DV, AD : : AD, EX (3. *constr.*) ergo DV, EX : : Quadr. DV, Quadr. AD.

Prætereà DV, BE : : Quadr. DV, Rectang. DV, BE. Ergo DV, EX † BE sive DV, BX : : Quadr. DV, Quadr. AD † Rectang. DV, BE. Est autem Quadr. AD æquale Quadr. DV † Quadr. AV. ergo DV, BX : : Quadr. DV, Quadr. AV † Rectang. DV, BE.

Atqui antè sic ostendimus esse etiam KV ad KB; ergo DV, BX : : KV, KB. Quare KBX est Triangulum cujus hypotenusa KDX. Tangit autem DX (*hyp.*) ergo & KD tangit Conchoidem in D. Quod erat demonstrandum.

Nona Constructio est Barroviana.

Barrovius in Lectione Geometrica VIII. num. 12. Theorema quoddam universale demonstrat ex quo deducitur sequens Constructio pro Tangente Conchoidis.

JUngatur AED, ex qua auferatur AH æqualis ED, ex H ducatur HM perpendicularis ad AH, & occurrens BT in M. & ex D recta DO parallela HM, occurrens BT in O. Si rectæ MO sumatur æqualis OX.

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

Hanc constructionem ex nostro principio universali ita facilè demonstrabimus.

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

QUoniam angulus AHM rectus est (*hyp.*) HM tangit circulum FG, ergo MH, & HL etiam tangens constituunt lineam rectam. Rursus propter HM, DO parallelas (*hyp.*) anguli AHL, EDO sunt æquales, sunt autem latera AH, ED æqualia (*hyp.*) & anguli A, E æquales propter parallelas AL, EO. Ergo Triangula AHL, DEO æqualia sunt in omnibus. Quare AL, EO æquales sunt. Jam verò propter similitudinem Triangulorum EHM, EDO ob parallelas HM, DO. HE, ED :: ME, EO. Ergo componendo HD, DE :: MO, EO, sunt autem MO, OX æquales (*hyp.*) ergo HD, ED :: OX, EO. sive HD, AH :: OX, EO, & componendo EX, EO, :: AD, AH. Est autem EO ut diximus æqualis AL. ergo EX, AL :: AD, AH. quare (*constr.* 1.) juncta DX tangit Conchoidem in D.

Decima Constructio est Fermatiana.

Fermatius (Oper. Varior. pag. 47.) scribens ad Robervallium hanc ei constructionem è Schedis ut ait præproperè excerptam mittit absque demonstratione.

JUnctâ AD, & demissâ perpendiculari DI, fit Rectangulum DIT æquale Rectangulo DAE † quadrato DI, & fiat ut BI ad IT ita DI ad IX. Juncta DX tanget Conchoidem in D.

Ego cùm hanc constructionem demonstrare vellem, reperi erratum quoddam in eam irrepsisse, credo Typographi vitio, neque enim tantum Virum fugere potuisset, qui etiam methodum optimam & universalem tradidit pro tangentibus omnium curvarum. Igitur loco quadrati DI, legendum est Rectangulum AV, DI, sive Rectangulum AVB, & sic restituenda Constructio.

JUnctâ AD, & demissâ perpendiculari DI, fit Rectangulum DIT æquale Rectangulo DAE † Rectangulo AV, DI vel AVB, & fiat ut BI ad IT, ita DI ad IX.

Juncta DX tanget Conchoidem in D.

DEMONSTRATIO.

EX E fit ER perpendicularis ad AE, & occurrens in R rectæ AL. Triangula AVD, AER Rectangula & habentia alternos angulos ADV, EAR æquales sunt similia, ergo AD, VD :: AR, AE. Quare

Rectangulum AD, AE æquatur Rectangulo VD, AR.

Rursus cùm HL tangat circulum atque ita angulus AHL rectus sit, Triangula AHL, AVD sunt similia; quare cùm demissâ HN perpendiculari ad AG, Triangula AHL, HNL sint similia, etiam Triangula AVD, HNL similia sunt; quare AV, VD:: NL, NH, atque ita Rectangulum AV, NH, sive AV, DI, sive AV, BV æquatur Rectangulo VD, NL.

Quoniam igitur Rectangulum AD, AE ostensum est æquale Rectangulo VD, AR; & Rectangulum AV, BV Rectangulo VD, NL; duo Rectangula simul AD, AE; AV, BV æquantur duobus simul VD, AR; VD,NL, sive Rectangulo sub VD & AR † NL.

Sunt autem (*ex hyp.*) duo Rectang. simul AD, AE; AV, BV æqualia Rectangulo DIT, sive Rectangulo BIX (quoniam *hyp.* BI, IT:: DI, IX) ergo Rectangulum sub VD & AR † NL æquatur Rectangulo BIX. atque ita cùm latera VD, BI sint æqualia, etiam AR † NL æquabitur ipsi IX. ergo addendo utrinque rectas æquales AN, EI; AR † NL † AN, hoc est AR † AL æquabitur EI † IX hoc est rectæ EX.

A puncto D in AD sit perpendicularis DQ quæ occurrat in O rectæ BT, & in Q rectæ AR. Quoniam ER, DQ sunt perpendiculares eidem AD, parallelæ sunt inter se, sunt autem EO, RQ etiam parallelæ, quare in parallelogrammo ERQO, EO æquatur RQ, est autem EO æqualis AL propter similitudinem Triangulorum EDO, AHL & æqualitatem laterum AH, ED: ergo AL æquatur RQ, & AR † AL æquatur AR † RQ sive AQ Ostensum est autem AR † AL æquari EX, ergo AQ eidem EX æqualis est. quare (2. *construct.*) DX tangit Conchoidem in D. Quod erat demonstrandum.

Undecima Constructio est Cartesiana.

***Cartesius lib. 2. Geometriæ hanc tradit constructionem ad inveniendam rectam* DY *quæ sit perpendicularis ad curvam Conchoidem* CD *in puncto* D, *sive ad tangentem* DX.**

JUnctâ AD, & demissâ DI perpendiculari ad BT, sumatur in AD ipsi DI æqualis DZ, ex Z ducatur ZY parallela DI sive AB, & æqualis AE.

Junctâ DY est perpendicularis ad tangentem DX; unde si ipsi DY hoc modo inventæ ducatur perpendicularis DX, erit DX tangens Conchoidem in D.

Hoc autem sic ex præcedentibus demonstrabimus.

DEMONSTRATIO.

SI DX tangat Conchoidem in D, & sit DZ æqualis DI, & ZY parallela DI æqualis AE. Ostendendum est junctam DY esse perpendicularem ad DX.

Quoniam (7. *Construct.*) positâ DX tangente, ductâque DV ordinatâ Conchoidis & ES perpendiculari ad DV, junctâque AS, angulus ASD æquatur Angulo ADX, subtractis utrinque angulis rectis ESD, ADO, reliqui anguli ASE, ODX sunt æquales.

Consideremus jam Triangula AES, DZY. Latus DZ (*hyp.*) æquatur DI sive lateri SE. Et latus ZY (*hyp.*) lateri AE, angulus etiam DZY æqualis est angulo AES, nam qui illis deinceps sunt AZY, DES alterni æquales sunt ob parallelas (*hyp.*) ZY. DI vel ZY, ES. Cùm igitur Triangula DZY, AES duo latera duobus lateribus æqualia habeant, angulósque illis lateribus comprehensos, etiam reliquos angulos ZDY, ASE æquales habent.

Est autem probatum angulum ASE æquari angulo ODX. ergo angulus ZDY angulo ODX æqualis est. atque ita addito communi angulo YDO, totus angulus YDX, toti ADO æquatur. est autem ADO rectus [*hyp.*) ergo angulus YDX rectus est. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

NOn difficile est multas alias ex præcedentibus constructiones elicere, neque nos in omnibus illis quas retulimus recensendis ac demonstrandis tantùm immorati essemus, nisi duplicem ex eò utilitatem capi posse videremus, una est quod inde intelligi potest quàm rectè conveniat methodus nostra cum iis quibus celeberrimi Geometræ usi sunt, altera autem & præcipua, quod ex multiplici constructione ad inveniendas tangentes, variæ earum etiam innotescunt proprietates, quarum cognitio ad multa insignia Theoremata, præsertim verò ad curvarum ipsarum dimensionem utilissima est.

DE CONCHOIDIBUS.

PARS TERTIA.

DE CONCHOIDE SEMICIRCULARI.

ESto (*fig.* 15.) Conchois FG, cujus axis DF. Basis DS, Polus A, Figura genitrix ACB semicirculus diametri AB. Conchois FG vocatur *Conchois semicircularis.*

Ex ipsa generatione manifestum est 1. curvam FG nunquam coincidere cum base DS, cum omnia puncta F, *g*, G sint ultra rectam DS. 2. Curva FG accedit semper ad basin DS, Cùm enim semicirculus ACB sit illius figura genitrix, erit quælibet chorda AC ducta à polo A in semicirculo æqualis respondenti EG. Si ergo ex punctis C, G demittantur in AI, DS parallelas perpendiculares CR, GS erunt illæ æquales propter æqualitatem Triangulorum Rectangulorum ACR, EGS. Cùm ergo CR minuatur infra quamcunque magnitudinem datam puncto C sumpto propiùs indefinitè ad punctum A. etiam perpendicularis GS minuitur infra quamcunque magnitudinem datam, ac proinde DS recta in infinitum producta est asymptotos curvæ FG in infinitum productæ.

Hoc posito, Quæ in secundâ parte circa Conchoidem antiquam & Nicomedeam præstitimus, in hac tertia parte, circa novam hanc Conchoidem facere in animo est, atque illi applicare methodos generales initio traditas pro omnibus Conchoidibus.

Igitur 1. dabimus dimensionem segmentorum spatiique integri Conchoidis semicircularis. 2. Rotunda circa basin ex ea genita ad sphæram revocabimus. 3. Idem præstabimus circa Rotunda circa axem. 4. Centrum gravitatis in hac Conchoide investigabimus. 5. Variis modis ejus Tangentem determinabimus.

Et Coronidis loco agemus de alia quadam Figura huic Conchoidi valdè affini, & quæcunque Doctissimus P. Lalovera circa illam Figuram invenit atque indemonstrata reliquit demonstrabimus.

Hoc est hujus tertiæ partis de Conchoidibus argumentum.

Dimensio

PROPOSITIO XXXVII.

Esto (*fig.* 15.) Conchois semicircularis FG, cujus Polus A, semicirculus generator ACB, axis DF, basis DE.

Inter AB, AD sit media proportionalis AM, & centro A radio AM describatur quadrans circuli AMO secans rectam ACG in N, atque omnes rectas A *c g*, quæ inter AF, AG duci possunt, in *n*.

Dico Sectorem Conchoidicum AFG æquari Triangulo ADE † figuræ genitrici ABC † duplo sectoris AMN,

DEMONSTRATIO.

Radio AD describatur arcus circuli DH qui occurrat in H rectæ AG.

Quoniam (*hyp.*) AB, AM :: AM, AD :: Arcus MN, Arcus DH. Rectangulum sub AB & arcu DH æquatur Rectangulo sub AM & arcu MN, sive duplo sectoris AMN.

Ex punctis C, *c*, intelligantur ad lineas AC, A *c* perpendiculares quæ omnes convenient in puncto B, cùm anguli ACB, A *c* B in semicirculo sint recti. Hoc posito.

Ex principio generali tradito in prop. 3. Sector Conchoidicus AFG æquatur Triangulo ADE † figuræ genitrici ABC † Figuræ Cylindricæ quam generarent omnes rectæ AB erectæ in omnibus punctis arcûs DH, hoc est Rectangulo sub AB & arcu DH sive ut antè ostendimus duplo sectoris AMN. Quod erat demonstrandum.

Corollarium 1. Auferendo utrinque commune Triangulum ADE, superest Figura Conchoidica DFGE æqualis figuræ genitrici ABC † duplo sectoris AMN.

Corollarium 2. Cùm datâ circuli quadraturâ, quadretur tam Figura ABC quàm duplum sectoris circularis AMN, patet datâ circuli quadraturâ, quadrari sectorem Conchoidicum AFG, ac proinde quodcunque segmentum Conchoidis semicircularis.

PROPOSITIO XXXVIII.

Iisdem positis. Dico totum spatium Conchoidicum DFGS contentum axe DF, curva FG & asymptoto DS in infinitum productis æquari semicirculo ACB † duplo quadrantis AMO.

P

DEMONSTRATIO.

Sumendo punctum C quàm proximè libuerit puncto A, semper figura Conchoidica DFGE æquatur figuræ ABC † duplo sectoris AMN, ergo quando punctum C convenit cum puncto A, cùm etiam punctum N inveniatur in O, & punctum E infinitè distet à D, sequitur totum spatium Conchoidicum DFGS æquari semicirculo ACB † duplo quadrantis AMO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Determinare rationem quam habet totum spatium Conchoidicum ad semicirculum genitorem.

Iisdem positis (*fig.* 15.) sit AQ quarta pars AB diametri semicirculi genitoris.

Dico ut AD † AQ ad AQ ita esse spatium seu locum Conchoidicum DFGS ad semicirculum genitorem ACB.

DEMONSTRATIO.

Sit P centrum semicirculi ACB, ac proinde radius AP duplus rectæ AQ quæ quarta est pars diametri AB. Quoniam (*hyp.*) tres AB, AM, AD sunt proportionales, quadrans circuli AMO est ad quadrantem ABI ut AD ad AB.

Deinde quoniam AB radius quadrantis ABI, est diameter semicirculi ACB, quadrans ABI duplus est semicirculi ACB. Est igitur quadrans ABI ad semicirculum ACB ut AB ad AP.

Cùm igitur sit Quadrans AMO ad quadrantem ABI ut AD ad AB, & quadrans ABI ad semicirculum ACB ut AB ad AP. Ex æquo quadrans AMO est ad semicirculum ACB ut AD ad AP. atque ita duplum quadrantis AMO est ad semicirculum ACB ut AD ad AQ dimidiam ipsius AP; & componendo duplum quadrantis AMO † semicirc. ACB (sive spatium Conchoid. DFGS *prop. præc.*) est ad semicirculum ACB, ut AD † AQ ad AQ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium 1. Si AB, AD æquales sint, spatium DFGS quintuplum est semicirculi ACB genitoris, nam AD sive AB † AQ quarta pars AB continet quinquies AQ.

Corollarium 2. Si habeatur in numeris ratio AD, AB, facile est assignare in numeris rationem spatii Conchoidici ad semicirculum genitorem.

Ecce Canonem universalem.

Sit AD *ad* AB *ut x ad unitatem. Ut* $4x + 1$ *est ad* 1. *ita spatium Conchoid.* DFGS *est ad semicirculum* ACB *genitorem.*

Ita si AD est tripla AB. *x* æquatur 3. ergo ut 13 ad 1. ita spatium DFGS est ad semicirculum ACB. Et sic de cæteris.

Dimensio solidorum Rotundorum ex Conchoide semicirculari circa Basin revoluta.

PROPOSITIO. XL.

Esto (*fig.* 16.) Conchois semicircularis FG cujus Polus A, semicirculus genitor ACB, Axis DF, basis DS, ordinata quæcunque GT.

Dico datâ circuli quadraturâ haberi seu reduci ad sphæram Rotundum ex segmento Conchoidico FGT circa Basin DS.

DEMONSTRATIO.

Diametro DF describatur semicirculus DVF, occurrens in V ordinatæ GT. Quoniam ex natura Conchoidis, AB, DF æquales sunt, semicirculus DVF æqualis est semicirculo genitori ACB. ex A ducatur AO parallela asymptoto DS.

Ex principio generali tradito in prop. 5. Rotundum ex segmento Conchoidico FGT circa basin DS æquatur Rotundo genito ex segmento FVT circulari circa AO. Atqui (*prop.26.*) datâ circuli quadraturâ habetur Rotundum ex segmento circulari FVT circa AO, ergo Rotundum ex segmento Conchoid. FGT circa Basin DS. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

Iisdem positis (*fig.* 16.) Dico Rotundum ex spatio integro Conchoidico DFGS circa asymptotum DS æquari semicylindro cujus basis est DVF æqualis semicirculo genitori ACB, altitudo autem circumferentia radii AI intercepti inter Polum A & I centrum semicirculi DVF.

DEMONSTRATIO.

Ex Coroll. prop. 5. Rotundum ex spatio Conchoidico DFGS circa asymptotum DS æquatur Rotundo ex semicirculo DVF circa AO. Quoniam autem recta AI est distantia rectæ AD à centro gravitatis semicirculi DVF, Rotundum ex DVF circa AO æquatur solido recto sive ſemicylindro cujus baſis ſemicirculus DVF, altitudo autem circumferentia radii AI (*Tacquet lib.* 5. *Cylindr. & Annul.*) ergo, &c. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Hinc patet 1. Rotundum ex ſpatio Conchoidico DFGS circa aſymptotum DS finitum eſſe. 2. Idem Rotundum haberi datâ circuli quadraturâ, nam illâ datâ habetur recta æqualis circumferentiæ radii AI, ac proinde altitudo ſemicylindri illi Rotundo æqualis, cujus baſis DVF ſemicirculus notus.

Dimenſio ſolidorum Rotundorum ex Conchoide ſemicirculari circa axem revolutâ.

PROPOSITIO XLII.

ESto (*fig.* 17. Conchois ſemicircularis FG, cujus Polus A, ſemicirculus generator ACB, Axis DF, Baſis DE, ſemicirculus DVF æqualis genitori ACB.

Ex puncto F ſit FR perpendicularis ad DF & æqualis AD diſtantiæ Poli à baſi, productâque ED verſus K, centro D, aſymptotis DF, DK deſcripta intelligatur Hyperbola ſecundi generis RSY in qua abſciſſæ ſint ut reciprocè quadrata ordinatarum.

Ex Polo A ad Conchoidem FG ducatur quæcunque recta AG occurrens baſi DE in E, & ex G ordinetur in Conchoide, GT ad axem DF, producatúrque GT donec TS ſit æqualis AE.

Dico punctum S eſſe ad Hyperbolam RY.

DEMONSTRATIO.

OCcurrat GT circulo DVF in V, jungantúrque FV, DV.

Ex prop. 4. AT, DT : : GT, VT. Ergo AG, DV ſunt parallelæ, & angulus DAE æqualis angulo FDV. Eſt autem & angulus DVF in ſemicirculo æqualis recto ADE. Ergo Triangula ADE, DVF ſunt ſimilia, & quadr. AE, quadr. AD : : quad. DF, quadr. DV : : DF, DT. (ex propriet. circuli) Eſt autem (*hyp.*) AE æqualis TS, & AD, FR. Ergo quad. TS, quadr. FR : : DF, DT. quare punctum S eſt ad Hyperbolam RY. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO

PROPOSITIO. XLIII.

Iisdem positis (*fig.* 17.) sit in FR sumpta FO æqualis DF, & in TS, TQ æqualis EG.

Dico punctum Q esse ad Parabolam DO, cujus vertex D, axis DF.

DEMONSTRATIO.

Quadrilaterum DVGE est parallelogrammum (*prop.* 4. *Coroll.* 2.) quare EG, DV sunt æquales. Sunt autem ex proprietate circuli quadrata DF, DV, ut rectæ DF, DT, ergo quadrata FO, TQ æqualium ipsis DF, EG, sive DF, DV sunt inter se, ut rectæ DF, DT. Quare punctum Q est ad Parabolam DO cujus vertex D, axis DF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Iisdem positis (*fig.* 17) sit FM media proportionalis inter AD DF, compleaturque Rectangulum FMHD, sitque TN media proportionalis inter AE, EG.

Dico punctum N esse ad lineam rectam MH.

DEMONSTRATIO.

Triangula ADE, DFV similia sunt, & EG æqualis DV, ut ostensum est in duabus propos. præcedentibus; igitur AE, AD :: DF, DV. ac proinde Rectangulum AE, DV aut Rectangulum AEG æquatur Rectangulo AD, DF. Sunt autem (*hyp.*) quadrata FM, TN æqualia Rectangulis ADF, AEG (cùm FM sit media proportionalis inter AD, DE, & TN inter AE, EG) ergo quadrata FM, TN æquantur inter se, ac proinde & rectæ FM, TN, unde punctum N est in recta MH. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Ex tribus propositionibus præcedentibus sequitur quadratum AG quod æquatur quadrato AE † quadr. EG † duplo Rectanguli AEG, æquari etiam quadrato TS ordinatæ in Hyperbola RY † quadrato TQ ordinatæ in Parabola DO † duplo quadrati TN ordinatæ in Rectangulo FDHM.

PROPOSITIO XLV.

Datâ Hyperbolæ quadraturâ cubatur summa quadratorum TS, FR ordinatarum Hyperbolæ RS secundi generis.

DEMONSTRATIO.

CEntro D, asymptotis DF, DK, describatur per R Hyperbola communis RX occurrens TS in X,

Ex natura Hyperbolicæ secundi generis RY, quadratum FR, quadratum TS :: DT, DF :: FR, TX (propter Hyperbolam communem FX) sed ut FR, TX ita sumptâ altitudine communi FR, quadratum FR ad Rectangulum FR TX; ergo quadratum FR, quadratum TS :: quadratum FR, Rectangulum FR, TX. quare quadratum TS æquatur Rectangulo sub FR, TX. ergo summa quadratorum TS æquatur summæ Rectangulorum FR, TX. sive solido recto cujus basis segmentum FRXT hyperbolæ communis, altitudo FR. Datâ autem Hyperbolæ communis quadraturâ cubatur solidum rectum cujus illud segmentum est basis, ergo datâ Hyperbolæ communis quadraturâ cubatur summa quadratorum TS ordinatarum segmenti Hyperbolici secundi generis. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Ostensum est summam quadratorum TS ordinatarum in segmento Hyperb. secundi generis FRST, æquari solido recto cujus altitudo FR, basis autem FRXT segmentum Hyperbolicum primi generis; similiter ostendetur summam quadratorum omnium TS ordinatarum totius spatii FRYKD secundi generis, æquari solido recto cujus altitudo FR, basis autem est spatium Hyperbolicum primi generis FRXKD. Hoc autem solidum rectum est infinitum, cùm ejus basis spatium nempe asymptoticum Hyperbolæ communis infinitum sit quoad aream, ut satis Geometris notum est. Quare summa quadratorum omnium TS ordinatarum in spatio Hyperbolico secundi generis FRYKD, est etiam solidum absolutè infinitum.

PROPOSITIO XLVI.

IIsdem positis (*fig.* 17.) Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ, haberi Rotundum genitum ex segmento FTG Conchoidis semicircularis rotato circa axem FT.

DEMONSTRATIO.

QUadratum AG (*prop.* 44. *Coroll.*) æquatur quadrato TS † duplo quadrati TN † quadrato TQ. Datâ autem hyperbolæ quadraturâ cubatur summa quadratorum TS (*prop.* 45.) aliunde verò cubatur absolutè summa bis sumpta quadratorum TN, cùm TN sint ordinatæ Rectanguli. Denique cubatur etiam summa quadratorum TQ, cùm enim TQ sint ordinatæ ad Parabolam, portio Conoidis Parabolici geniti ex

FOQT circa axem FT reducitur ad sphæram (Archim.) Ergo datâ Hyperbolæ quadraturâ summa quadratorum omnium AG respondentium segmento FTG & applicatorum in T cubatur. Cubatâ autem summâ quadratorum AG applicatorum in T, habetur Rotundum ex FTG circa FT (*prop.* 6.) ergo datâ Hyperbolæ communis quadraturâ habetur sive reducitur ad sphæram Rotundum ex segmento FTG circa axem FT rotato. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLVII.

Iisdem positis. Rotundum circa axem FD (*fig.* 17.) ex tota Conchoide semicirculari DFGL, solidum est absolutè infinitum sive majus quâcunque sphæra.

DEMONSTRATIO.

Tale Rotundum nihil est aliud quàm summa circulorum quorum radii sunt omnes ordinatæ GT à vertice F ad basin DL. Summam autem illam circulorum constabit esse infinitam, si summa quadratorum earumdem ordinatarum GT ad F usque ad D constituat solidum infinitum. Hoc autem sic ostendetur. Summa quadratorum GT ab F ad D æquatur summæ quadratorum AG respondentium — summæ quadratorum AT. Est autem summa quadratorum AG applicatorum ad axem DF æqualis summæ quadratorum TS † duplo summæ quadratorum TN † summæ quadratorum TQ (*prop.* 44. *Coroll.*) & summa quadratorum TS, ab F usque ad D est solidum absolutè infinitum (*prop.* 45. *Coroll.*) unde summa quadratorum AG applicatorum in T secundum totum axem DF est ut ita dicam plusquam infinita, ergo si ab ea detrahatur summa quadratorum AT ab F usque ad D quæ finita est (cùm AT applicatæ in T ab F usque ad D generent Trapezium) manifestum est reliquam summam nempe quadratorum GT (ab F usque ad D) fore absolutè infinitam. Quod erat demonstrandum.

De Centro gravitatis Conchoidis semicircularis.

PROPOSITIO XLVIII.

Esto (*fig.* 16.) Conchois semicircularis FG, cujus Polus A, Axis DF, Basis DS, segmentum Conchoidis FGT, & illi simile & æquale alterum FKT.

Dico datâ circuli quadraturâ haberi centrum gravitatis Figuræ FKG.

DEMONSTRATIO.

DAtâ circuli quadraturâ, quadratur ſegmentum FGT (*prop.* 37. *coroll.* 2.)

Deinde reducitur ad ſphæram Rotundum ex eodem ſegmento FGT circa baſin DS (*prop.* 40.) ergo datâ circuli quadraturâ habetur recta *m n* parallela baſi DS, tranſiens per centrum gravit. ſegmenti FGT (*prop.* 8. *Coroll.* 1.)

Eſt autem punctum *m* in quo recta *m n* ſecat axem DF, centrum gravitatis Figuræ FKG compoſitæ ex duabus FKT, FGT æqualibus & ſimilibus.

Ergo datâ circuli quadraturâ habetur punctum *m* centrum gravit. Figuræ FKG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIX.

IIſdem poſitis (*fig.* 16.) Dico datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ haberi centrum gravit. ſegmenti Conchoidis FGT.

DEMONSTRATIO.

DAtâ circuli quadraturâ, quadratur ſegmentum FGT (*propoſ.* 37. *coroll.* 2.) Deinde datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur Rotundum ex eodem ſegmento FGT circa axem FT (*prop.* 46.)

Ergo (*prop.* 8. *coroll.* 1.) datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ, habetur recta parallela axi, tranſiens per centrum gravit. ſegmenti FGT.

Datâ autem circuli quadraturâ, habetur alia recta parallela baſi DE tranſiens per centrum gravit. ejuſdem ſegmenti FGT (*prop.* 48.)

Ergo datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ, habentur duæ rectæ tranſeuntes per centrum gravit. ſegmenti Conchoidici FGT, ac proinde concurſus illarum rectarum, ſive centrum gravit. ejuſdem ſegmenti FGT. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

IIſdem poſitis (*fig.* 16.) Dico dari poſſe abſolutè lineam Baſi parallelam quæ tranſit per centrum gravit. ſpatii DFGS contenti ſub Conchoide ſemicirculari & aſymptoto in infinitum productis.

Atque ità dari poſſe abſolutè centrum gravitatis ſpatii contenti ſub duplici Conchoide FK, FG & aſymptotis.

DEMONSTRATIO.

DEMONSTRATIO.

Habetur (*prop.* 39.) proportio totius spatii sive loci Conchoidici sub FG, DS & axe DF contenti ad circulum genitorem ACB aut illi æqualem DVF. Sit igitur spatium illud Conchoidicum ad semicirculum DVF, ut AI (jungens polum A & centrum I) ad D *x*. Recta *x* z parallela basi DS transibit per centrum gravit. spatii Conchoid. DFGS contenti sub DF, & FG, DS in infinitum productis (*prop.* 7. *Coroll.* 3.

Habebitur ergo punctum *x* in quo *x* ζ secat axem DF, & cum Conchoides FK, FG sint ex hypoth. æquales & similes, manifestum est punctum *x* esse centrum spatii Conchoidici utriusque simul sumpti. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO. LI.

Iisdem positis (*fig.* 16.) Dico spatium sive locum Conchoidicum DFGS contentum sub FG curva & asymptoto DS in infinitum productis centrum gravitatis habere infinitè distans ab axe DF, ac proinde nullum habere.

DEMONSTRATIO.

Rotundum ex Conchoide integra DFGS circa axem DF absolutè infinitum est sive majus quacunque sphæra. (*prop.* 47.)

Est autem tale Rotundum (*Tacq. lib.* 5. *Cyl.*) æquale solido recto cujus basis est Conchois integra DFGS, altitudo autem circumferentia cujus radius est distantia illius centri gravit. ab axe DF. ergo tale solidum rectum infinitum est. quare cùm ejus basis nempe Conchois DFGS sit finita (*prop.* 38.) altitudo nempe circumferentia cujus radius est distantia centri gravit. ab axe DF est infinita. Ergo distantia illa infinita est, ac proinde centrum gravitatis nullibi est. Quod erat demonstrandum.

De Tangentibus Conchoidis semicircularis.

PROPOSITIO LII.

Variæ Constructiones ad inveniendam Tangentem Conchoidis semicircularis.

Esto (*fig.* 18.) Conchois semicircularis FG, cujus Polus A, Axis DF, Basis DX, semicirculus genitor ACB, datum in Conchoide punctum G ex quo oporteat Tangentem ducere.

R

Prima Constructio.

JUngatur AG occurrens in C, semicirculo genitori ACB, & in E Basi DX, ex C sit tangens circuli CL quæ occurrat in L rectæ AM parallelæ DX. Fiat ut AC ad AG ita AL ad EX. Juncta GX tanget Conchoidem in G.

Demonstratio patet ex principio generali tradito & demonstrato in propos. 8.

Secunda Constructio.

JUnctâ AG, angulo GAM fiat æqualis angulus AGM, & rectæ AM sumatur æqualis EX.

Juncta GX tanget Conchoidem in G.

Nam Tangentes circuli AL, CL æquales sunt, ergo anguli LAC, LCA æquales sunt, est autem angulus LAC angulo AGM æqualis (*hyp.*) ergo & angulus ACL angulo AGM æqualis est. unde rectæ CL, GM sunt parallelæ, & AC, AG :: AL, AM. sed AM, EX æquales sunt (*hyp.*) ergo AC, AG :: AL, EX. quare juncta GX tangit Conchoidem in G (*construct.* 1.)

Tertia Constructio.

JUnctâ AG, ex G ordinetur ad Conchoidem recta GH, & fiat ut GH ad AG ita dimidia AG ad EX.

Juncta GX tanget Conchoidem in G.

Producatur LC tangens circulum ACB, donec occurrat in I rectæ BK eumdem circulum tangenti in B. Triangula CAL, CIK sunt similia, quare cùm AL, CL sint æquales, etiam CI, IK æquales sunt. At CI, BI tangentes sunt æquales, ergo BI, IK æquales sunt, & BK dupla est IK.

Jam angulus ACB in semicirculo cùm sit rectus, Triangulum BCK simile est Triangulo ABK, ergo & Triãgulo AHG. ergo GH, AG :: CK, BK, & sumptis consequentium dimidiis, GH, dimid. AG :: CK, IK; est autem CK, IK :: AC, AL (ob similitudinem Triangulorum CIK, CAL; ergo GH est ad dimidiam AG ut AC ad AL. Est autem (*hyp.*) GH, ad AG ut dimidia AG ad EX, & permutando GH est ad dimidiam AG ut AG ad EX. ergo AC est ad AL ut AG ad EX, & permutando AC, AG :: AL, EX; quare (*construct.* 1.) recta GX tangit Conchoidem in G. Quod erat demonstrandum.

Plures alias constructiones facile esset adjicere atque ex præcedentibus eruere, verùm hæ sufficiunt quæ breves facilésque sunt.

PROPOSITIO LIII.

In qua ex iis quæ demonstrata sunt de Conchoide semicirculari, demonstrantur quæcunque Doctissimus P. Lalovera invenerat circa novam aliquam Figuram quam proponit ad finem libri subtilissimi de Cycloide, in Appendice 2. num. v.

ESto (*fig.*19.) Semicirculus BFC, cujus diameter BC producatur in A ita ut AB, BC sint æquales: sitque curvæ CD talis proprietas, ut quæcunque illius ordinata DE sit ad EF ordinatam semicirculi BFC, ut AB ad BE. Per B ducatur indefinita recta XZ perpendicularis ad AB.

Circa Figuram BCDX P. Lalovera sequentia invenit Theoremata.

I. Curva CD accedit semper ac propiùs quocunque intervallo dato ad rectam BX, nunquam tamen cum illa concurrit.

II. Si ex altera parte describatur curva CG similis & æqualis CD, Spatium contentum inter curvam DCG & asymptotum XZ quadruplum est circuli diametri BC.

III. Sit BI quarta pars ipsius BC. Dico punctum I esse centrum gravitatis spatii DCGZX contenti inter curvam DCG infinitam ex utraque parte & asymptotum XZ.

IV. Datâ quadraturâ circuli, habetur quadratura & centrum gravitatis cujuscunque segmenti CDG.

Hæc sunt Theoremata quæ P. Lalovera invenisse se ait & indemonstrata reliquit, nos demonstrabimus in hunc modum.

Theorema I.

OStendendum est curvam CD in infinitum accedere ad rectam BX, nunquam tamen cum illa coincidere.

1. Curvam CD semper accedere ad rectam BX manifestum est, quælibet enim perpendicularis ex D cadens in BX æquatur BE respondenti, minuitur autem BE in infinitum, sumpto E propiùs ad punctum B. ergo & perpendicularis, ex puncto D in BX minuitur etiam infra quamcunque magnitudinem datam.

2. Curvam autem CD non concurrere cum BX sic ostendetur.

Ex hypothesi AB, BE :: DE, EF; & permutando AB, DE :: BE, EF. est autem ex proprietate circuli BE, EF : EF, EC. ergo AB, DE :: EF, EC. Quoniam igitur ratio EF, EC evadit minor quacunque data, puncto E sumpto semper propiùs ad punctum B, similiter ratio AB, DE evadit minor quacunque data, ergo cùm AB sit eadem, recta DE evadit major quacunque data, quod falsum esset si curva CD conveniret in aliquo puncto cum recta BX. non igitur curva CD convenit cum recta BX. Quod erat ostendendum.

Theorema II.

Iisdem positis ostendendum est spatium DCGZX contentum curva DCG utrinque infinita & asymptoto XZ esse quadruplum circuli cujus diameter BC.

Sit ALB semicirculus diametri AB; quoniam AB, BC sunt æquales (*hyp.*) semicirculi ALB, BFC sunt etiam æquales.

Intelligatur jam Conchois semicircularis CH, cujus Polus A, asymptotus BZ; axis BC, semicirculus genitor ALB, productáque DF occurrat Conchoidi CH in H.

Ex proprietate Conchoidis CH [*prop.* 4. *Coroll.* 2.] AE, BE :: EH, EF, ergo dividendo AB, BE :: FH, EF. Est autem ex natura curvæ CD; AB, BE :: DE, EF; ergo FH, EF :: DE, EF. quare FH, DE æquales sunt. Cùm igitur hoc eveniat quæcunque DH ducatur parallela XZ, sequitur ex methodo indivisibilium summam omnium DE hoc est spatium BCDX æquari summæ omnium FH hoc est spatio BFCHZ.

Quoniam autem Conchois CH talis est ut AB æqualis sit BC (*hyp.*] totum spatium Conchoidicum BCHZ quintuplum est semicirculi genitoris ALB vel illi æqualis BFC [*prop.* 39. *coroll.* 1.] ac proinde spatium BFCHZ est quadruplum semicirculi BFC. ergo spatium BCDX quod æquale est spatio BFCHZ est etiam quadruplum semicircul BFC, & sumptis duplis terminorum, spatium DCGZX contentum curva DCG & asymptoto XZ est quadruplum circuli diametri BC. Quod erat, &c.

Theorema III.

Si BI sit quarta pars diametri BC. Ostendendum est punctum I esse centrum gravitatis totius spatii DCGZX contenti curva DCG & asymptoto XZ.

Quoniam [*hyp.*] semper est AB, BE :: DE, EF, aut AB, BE :: DE

dupla

dupla DE, EF bis, ex principiis Archimedis in libro de Parabola, sequitur si intelligatur libra AC suspensa ex B, spatio DCGZX ut jacet pendenti ex brachio BC, æquiponderare semicirculum BFC bis sumptum, sive circulum diametri BC pendentem ex puncto A extremo brachii AB. Quare ex principiis ejusdem Archimedis, spatium DCGZX est ad circulum diametri BC ut reciprocè AB ad BI (posito quod I sit centrum gravitatis spatii DCGZX) Est autem ex Theoremate præcedenti spatium DCGZX quadruplum circuli diametri ABC, ergo AB seu BC est quadrupla rectæ BI. Quod erat demonstrandum.

Theoremm. IV.

DAtâ circuli quadraturâ, ostendendum est iisdem positis haberi quadraturam & centrum gravitatis, cujuscunque segmenti CDG.

1. Si quadretur circulus, quadrabitur & segmentum Conchoidicum CEH, quadrabitur enim sector Conchoidicus ACH (*prop.37. Coroll.2.*) ergo ablato Triangulo AEH, quadrabitur segmentum CEH. Prætereà si quadretur circulus, quadrabitur & segmentum circulare CEF, quare si quadretur circulus quadrabitur & figura CFH, sive illi æqualis CED (quoniam ut ostendimus in Theor. 2. rectæ DE, FH sunt semper æquales) ergo si quadretur circulus quadrabitur figura DCG dupla ipsius CDE. Quod erat primum.

2. Quoniam est perpetuò AB, BE:: DE, EF. Ex principiis Archimedis, Figuræ CDE ut jacet pendenti ex CE, librâ AC suspensa ex B, æquiponderabit segmentum circulare CEF suspensum ex puncto A. Ergo sicut datâ circuli quadraturâ quadratur segmentum CDE, atque ita habetur illius ratio ad segmentum circulare CEF, ita habebitur ratio AB ad BO (posito quod O sit punctum in quo recta parallela BX & transiens per centrum gravit. figuræ CDE secat axem CE.) Est autem idem punctum O centrum gravitatis figuræ CDG (cùm duæ CDE, CGE sint similes & æquales (*hyp.*) Ergo datâ circuli quadraturâ habetur centrum gravitatis Figuræ CDG. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

DEmonstravimus igitur Theoremata à P. Lalovera inventa circa figuram CDE, vel CDG. Ex his autem deducitur, Rotundum ex figura CDE vel etiam ex toto spatio CDXB circa asymptotum BX haberi datâ circuli quadraturâ. Verùm difficilius est Rotundum circa axem ex eodem segmento CDE. Hoc autem quod Lalovera non attigit, atque inde consequens centrum gravitatis segmenti CDE, duabus Propositionibus explicabimus.

PROPOSITIO LIV.

Iisdem positis (*fig.* 19.) Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ, reduci ad sphæram Rotundum ex segmento CDE circa axem CE rotato.

DEMONSTRATIO.

Occurrat AH rectæ BZ in K. & jungatur BF, est igitur quadrilaterum BFHK parallelogrammum (*prop.* 4. *Coroll.* 2.) & rectæ FH BK sunt æquales; est autem FH æqualis DE, ut ostensum est in prop. præc. Theor. 2. ergo BK est æqualis DE. & quadratum BK æquale quadrato DE. Est autem quadratum BK æquale quadrato AK — quadrato AB. ergo quadratum DE æquatur quad. AK — quad. AB. Intelligantur singulæ AK applicari in punctis E respondentibus & AB in C (sumptis CM, EN æqualibus ipsis AB, AK) curva MN erit Hyperbola secundi generis in qua abscissæ sunt ut reciprocè quadrata ordinatarum (*prop.* 42.) & summa quadratorum EN ordinatarum in segmento CM, NE cubatur datâ Hyperbolæ quadraturâ (*prop.* 45.) ergo summa quadratorum AK applicatarum in E (hoc est summa quadratorum AB † summa quadratorum BK) cubatur data Hyperbolæ quadraturâ. Cubatur autem ut patet summa quadratorum AB applicatarum in E, hæ enim generant rectangulum, ergo datâ Hyperb. quadraturâ summa quadratorum BK sive DE æqualium cubatur. ergo & summa circulorum quorum radii DE reducitur ad Cylindrum aut Sphæram. Est autem summa illorum circulorum Rotundum ex figura CDE circa axem AE, ergo datâ Hyperb. quadraturâ habetur Rotundum ex figura CDE, circa CE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LV.

Iisdem positis. Dico datâ Circuli & Hyperbolæ quadraturâ, haberi centrum gravit. cujuscunque segmenti CDE (*fig.* 19.)

DEMONSTRATIO.

Datâ circuli quadraturâ quadratur figura CDE (*prop.* 53. *Theor.* 3.) Prætereà datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur Rotundum ex eadem figura CDE circa axem CE (*prop. præc.*) ergo (*prop.* 8. *Coroll.* 1.) datâ circuli, & Hyperbolæ quadraturâ habetur recta axi CE parallela transiens per centrum gravit. figuræ CDE.

Datâ autem circuli quadraturâ habetur punctum O centrum gravit. figuræ CDG (*prop.* 53. *Theor.* 4) Si ducatur autem per O parallela XZ illa transit per centrum gravitatis figuræ CDE ut patet cùm duæ figuræ CDE, CGE sint æquales & similes, ergo datâ circuli quadraturâ habetur recta parallela XZ transiens per centrum grav. figuræ CDE.

Cùm ergo datâ circuli & hyperbolæ quadraturâ habeantur duæ rectæ transeuntes per centrum gravit. figuræ CDE, habebitur etiam centrum grav. ejusdem Figuræ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Spatii verò integri CDXB centrum grav. infinitè distare ab axe CE ac proinde nullum esse ostendetur. Nam summa quadratorum DE, ordinatarum in toto illo spatio est solidum infinitum (*prop.* 45. *Coroll.*) ergo Rotundum ex illo spatio circa axem BC est infinitum. ergo cùm spatium ipsum finitum sit (*prop.* 53. *Theor.* 2.) distantia centri grav. illius spatii ab axe BC est infinita. Quod ostendetur eodem modo quo prop. 51. præcedens.

DE CONCHOIDIBUS.

PARS QUARTA.

DE CONCHOIDE HYPERBOLICA.

ESto (*fig.* 20.) Hyperbola BC Circularis sive cujus axes sint æquales, sitque illius axis transversus AB ~~centrum A~~, vertex B, tangens BE. Producatur AB in F ita ut AB, BF sint æquales, & per omnia puncta E intelligantur duci ex A rectæ AEC occurrentes Hyperbolæ in C, sintque singulæ EG æquales respondentibus AC radiis Hyperbolæ.

Curva FGG vocabitur *Conchois Hyperbolica* cujus Polus A, Basis BE, Axis BF, Figura genitrix hyperbolica ABC.

Placet huic Conchoidi applicare methodos generales traditas in prima parte pro Conchoidibus omnibus, quemadmodùm præstitum est circa Conchoidem Nicomedeam & Conchoidem semicircularem. Itaque illius Conchoidis exhibebimus. 1. Dimensionem. 2. Rotunda circa Basin. 3. Rotunda circa Axem. 4. Centrum gravitatis. 5. Tangentem. Postremò demonstrabimus ea quæ Lalovera inventa & indemonstrata tradidit circa novam aliquam Figuram quæ magnam cum hac Conchoide Hyperbolica affinitatem habet.

PROPOSITIO LVI.

Proprietates quædam Circuli & Hyperbolæ.

1. ESto (*fig.* 21.) Hyperbola circularis BF, cujus axes AB, CD, centrum E. Diametro AB descriptus sit semicirculus ADB, & in quadrante BD sumpto puncto G, ex illo ducatur tangens circulum GH, quæ occurrat in H, AB productæ, atque ex H ordinetur in Hyperbola HF.

Dico duas HG, HF æquales esse.

DEMONSTRATIO.

DEMONSTRATIO.

QUoniam (*Hyp.*) hyperbola BF circularis est sive axes AB, CD habens æquales, Parametrum habet axi AB æqualem (*Conic.elem.*) ut autem axis AB ad suam Parametrum, ita Rectangulum AHB ad quadratum ordinatæ HF, ergo Rectangulum AHB æquatur quadrato HF. Jam ex proprietate circuli idem Rectangulum AHB æquatur quadrato Tangentis GH. Ergo quadrata GH, HF æquantur, ac proinde rectæ GH, HF. Quod erat demonstrandum.

2. IIsdem positis. Jungatur AF. Dico illam transire per punctum G.

DEMONSTRATIO.

EX G sit in AB perpendicularis GK. Quoniam GH tangit circulum, tres EH, EB, EK sunt proportionales. Ergo EH † EB hoc est AH est ad EB † EK hoc est ad AK, ut EB ad EK, hoc est ut EG ad EK, hoc est ut GH ad GK (propter similit. Triangulor. EGK, GHK.) Est autem GH æqualis FH (*num.* 1.) ergo AH, AK : : FH, GK. quare recta AF transit per G. Quod erat demonstrandum.

3. IIsdem positis. Ex puncto B ducatur BL tangens circuli ADB, & Hyperbolæ BF, quæ occurrat in L radio EG producto.

Dico EH, EL æquales esse.

DEMONSTRATIO.

TRiangula EBL, EGH Rectangula & habentia communem angulum E, & latera EB, EG æqualia æquantur in omnibus, ergo rectæ EH, EL sunt æquales.

4. IIsdem positis. Ex puncto F sit ad AF perpendicularis FI quæ occurrat in I rectæ AB productæ.

Dico rectas BH, HI æquales esse.

DEMONSTRATIO.

QUoniam angulus AFI rectus est, & FH perpendicularis ad AI, Rectangulum AHI æquatur quadrato FH. Est autem quadratum FH (*num.* 1. *in demonst.*) æquale Rectangulo AHB, ergo Rectangula AHI, AHB æquantur inter se, ac proinde rectæ BH, HI sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

T

5. Iisdem positis. Dico rectam AI esse duplam rectæ EL.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB dupla EB, & BI dupla BH (*num*. 4.) ergo AI dupla est EH, est autem EH æqualis EL (*num*. 3.) ergo AI dupla est EL. Quod erat demonstrandum

6. Iisdem positis. Centro A, radio AB describatur quadrans circuli ABM occurrens in O rectæ AG.

Dico duos arcus BG, BO æquales esse,

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB radius circuli BM duplus est AE radii circuli BD, manifestum est semicircumferentiam ADB esse æqualem arcui BM. Est autem arcus BG ad semicircumf. ADB ut angulus BAG ad angulum rectum BAM, & ut idem angulus BAG aut BAO est ad angulum rectum BAM ita est arcus BO ad arcum BM. ergo arcus BG æquatur arcui BO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVII.

Iisdem positis (*fig*. 29.) Intelligantur singulæ AI hypotenusæ Trianguli Rectanguli AFI (ductis AF ad omnia puncta curvæ BF, & FI ad illas perpendicularibus) erigi in punctis O respondentibus supra arcum BO perpendiculariter ad planum ABM. Ex omnibus AI ita erectis generabitur Figura aliqua Cylindrica cujus basis arcus BO.

Dico hujusmodi figuræ Cylindricæ exhiberi posse segmentum Hyperbolæ æquale.

DEMONSTRATIO.

Omnes rectæ EL erectæ in punctis G respondentibus supra arcum BG generant figuram quam vocavimus Figuram secantium, quamque *propos*. 18. ostendimus æquari segmento Hyperbolæ determinato. Est autem quælibet recta AI dupla EL sibi respondentis [*prop. præc. num* 5.) ergo summa omnium AI erectarum supra arcum BG est dupla summæ omnium EL erectarum supra eumdem arcum BG, ac proinde dupla segmenti Hyperbolici determinati. Quoniam autem arcus BG, BO sunt æquales (*prop*. 56. *num*. 6.) summa rectarum AI erectarum in G supra arcum BG æquatur summæ earumdem AI erectarum in O supra arcum

BO (*method. Indivis.*) ergo summa rectarum AI erectarum in punctis O respondentibus supra arcum BO dupla est segmenti Hyperbolici determinati. Quod erat demonstrandum.

Dimensio Conchoidis Hyperbolicæ.

PROPOSITIO LVIII.

IIsdem positis. Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ quadrari sectorem Conchoidicum ARS.

DEMONSTRATIO.

EX propos. 3. Sector Conchoidicus ARS æquatur Triangulo ABP † Figuræ Hyperbolicæ genitrici ABF † Figuræ Cylindricæ genitæ ex hypotenusis AI erectis in punctis O respondentibus, supra arcum BO. Est autem (*prop. præc.*) hæc figura Cylindrica æqualis segmento Hyperbolico determinato. Ergo sector Conchoidicus ARS æquatur Triangulo ABP † figuræ Hyperbolicæ ABF † alteri segmento Hyperbolico determinato. Datâ autem quadraturâ hyperbolæ tam figura hyperbolica ABF quàm segmentum hyperbolicum quadrantur, ergo data hyperbolæ quadraturâ, quadratur sector Conchoidicus ARS. Quod erat, &c.

Corollarium. Ex puncto S ducatur ST ordinata Conchoidis Hyperbolicæ RS. Quoniam datâ hyperbolæ quadraturâ quadratur sector Conchoidicus ARS, eâdem datâ quadrabitur segmentum Conchoidis Hyperbolicæ RST.

Dimensio Rotundorum ex Conchoide Hyperbolica circa Basin.

PROPOSITIO LIX.

Lemmata ad propos. sequent.

LEMMA I.

ESto (*fig.* 22.) Hyperbola circularis AQ cujus axis transversus BA, centrum C, per C, recta CK perpendicularis ad BA.. Ordinata TQ. Dico Rotundum ex segmento ATQ circa CK reduci ad sphæram.

DEMONSTRATIO.

COmpleatur Rectangulum CDQT, & sit angulus DCE semirectus, compleatur etiam Rectangulum ACDF. Quoniam angulus DCE est semirectus Triangulum DCE Rectangulum est Isosceles, & latera CD, DE æqualia. Et quoniam Hyperbola AQ est circularis Rectangulum BTA æquatur quadrato ordinatæ TQ (ut ostensum est in *prop.* 56. *num.* 1.)

Jam quadratum CT æquatur Rectangulo BTA † quadr. CA (2. *Elem. Eucl. prop.* 6.) ergo quadratum DQ (æquale quad. CT) æquatur Rectangulo BTA, sive quadrato TQ, aut CD, aut DE † quadr. CA aut DF. Similiter ostendetur quæcunque alia ordinetur DQ in segmento Hyperbolico ACDQ ejus quadratum esse æquale quadrato DE ordinatæ in Triangulo CDE † quadrato DF. Ergo (*Meth. Indivis.*) summa quadratorum DQ æquatur summæ quadratorum DE, † summæ quadratorum DF. Cubatur autem utraque summa tam qudratorum DE, quàm quadratorum DF. ergo & cubatur summa quadratorum DQ ordinatarum segmenti Hyperbolici ACDQ. Ergo summa circulorum quorum radii sunt DQ sive Rotundum ex segmento ACDQ circa CD reducitur ad sphæram. Est autem Cylinder ex Rectangulo CTQD circa CD æquale Rotundo ex segmento CAQD circa CD † Rotundo ex ATQ circa eamdem CD. ergo Rotundum ex ATQ circa CD reducitur ad sphæram. Quod erat demonstrandum.

LEMMA II.

IIsdem positis sit alia quæcunque recta HI perpendicularis ad AB.

Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ Rotundum ex segmento ATQ circa HI reduci ad sphæram.

DEMONSTRATIO.

QUoniam Rotundum ex segmento ATQ circa CD reducitur ad sphæram (*Lemm.* 1. *præc.*) Datâ segmenti quadraturâ habetur (*prop.* 8. *Coroll.* 1.) recta parallela CD ac proinde & HI transiens per illius centrum gravitatis. Datâ autem hâc rectâ & quadraturâ segmenti ATQ habetur (*prop.* 8. *Coroll.* 2.) Rotundum ex eodem segmento circa HI, ergo datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur Rotundum ex segmento ATQ circa HI. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO

PROPOSITIO. LX.

Resumatur Figura 21. in qua RS est Conchois Hyperbolica cujus Polus A, axis BR, basis BV, figura genitrix sector Hyperbolicus ABF.

Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ haberi Rotundum ex segmento Conchoidico RST circa basin BV.

DEMONSTRATIO.

Intelligatur descripta Hyperbola RQ similis & æqualis Hyperbolæ BF, occurrens in Q ordinatæ TS. Ex methodo generali tradita in *prop.* 5.) Rotundum ex segmento Hyperbolico RTS circa basin BV æquatur Rotundo ex segmento Hyperbolico RTQ circa AM: ergo (*Lemm.* 2. *præc.*) datâ Hyperb. quadraturâ habetur Rotundum ex segmento Conchoidico RST circa basin BV. Quod erat demonstrandum.

Dimensio Rotundorum ex Conchoide Hyperbolica circa axem.

PROPOSITIO LXI.

Lemma ad prop. sequent.

Esto (*fig.* 23.) Hyperbola BF circularis cujus axis transversus AB, ordinata FH, ex B tangens BV. ex A ad curvæ BF omnia puncta F, *f* intelligantur ductæ rectæ AF, A*f* quæ occurrant BV in P, *p*.

Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ cubari summam quadratorum BP, B*p* applicatorum ad axem BH in punctis respondentibus H, *h*.

Sive quod idem est. Si ex punctis H, *h* rectæ BH, ordinentur HG, *hg* æquales tangentibus BP, B*p*, respondentibus. Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ cubari summam quadratorum ordinatarum. HG, *hg*.

1. Ex proprietate Hyperbolæ circularis BF quadratum ordinatæ HF æquatur Rectangulo AHB, ergo BH, HF : : HF, AH. ac proinde quadr. HF, quadr. AH : : BH, AH. Est autem quadr. HF, quadr. AH : : quadr. BP, quadr. AB; ergo quadr. BP, quadr. AB : : BH. AH. Similiter ostendetur quadr. B*p*, quadr. AB : : B*b*, A*h*, & in-

vertendo quadr.AB, quadr.B p : : A h, B h. Igitur ratio quadratorum BP, B p quæ componitur ex duabus 1.quadr.BP, quad.AB, 2.quadr.AB, quadr. B p. componitur etiam ex duabus æqualibus 1. BH, AH. 2. A h, B h. Sive quod idem est ex duabus BH, B h; A h, AH.

II. Ex puncto A sit AX perpendicularis ad AB, & centro A, asymptotis AX, AH descripta sit Hyperbola quæcunque KI cujus ordinatæ in B, h, H sint BK, h i, HI. Ex proprietate hujus Hyperbolæ A h, AH : : HI, h i, ergo substitutâ ratione HI, hi loco rationis æqualis A h, AH. Ratio quadratorum BP, B p quæ componitur ex duabus BH, B h; A h, AH, componetur etiam ex duabus BH, B h; HI, h i. Quadratum igitur BP, est ad quadr. B p ut Rectang. BHI ad Rectang. B h i. Atque ita summa quadratorum BP, B p sive æqualium HG, h g est ad summam Rectangulorum BHI, B h i ut quadratum BP aut HG ad Rectangulum BHI; quare si cubetur summa Rectangulorum BHI, B h i cubabitur summa quadratorum BP, B p aut æqualium HG, h g.

III. Datâ autem Hyperbolæ quadraturâ cubatur summa Rectangulorum BHI, B h i.

Nam 1. Summa Rectangulorum AHI, A h i cubatur cùm illa Rectangula ex proprietate Hyperbolæ KI sint æqualia.

2. Datâ hyperbolæ quadraturâ atque ideò segmenti BHIK cubatur solidum rectum cujus basis est idem segmentum BHIK altitudo AB, hoc autem solidum rectum nihil est aliud ut patet quàm summa Rectangulorum AB, HI; AB, h i; AB, BK; ergo datâ hyperbolæ quadraturâ cubatur summa Rectangulorum BHI, B h i quæ differentia est summæ Rectang. AHI, A h i. & summæ Rectang. AB, HI; AB, h i. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXII.

Datâ Hyperbolæ quadraturâ (*fig.* 21.) habetur Rotundum ex segmento Conchoïdico RST circa axem RT.

DEMONSTRATIO.

Ad hoc ostendendum, probandum est tantùm (*prop.* 6.) datâ Hyperbolæ quadraturâ cubari summam quadratorum omnium AS Conchoidis radiorum applicatorum in punctis T respondentibus ad axem RT.

Cubabitur autem hæc summa, si cubentur tres summæ, quæ simul sumptæ illi sint æquales. 1. Quadratorum AP. 2. Quadratorum PS. 3. Rectangulorum APS bis. applicatis omnibus his tam quadratis quàm Rectangulis ad axem RT in punctis T respondentibus. Cubantur autem hæ tres summæ datâ hyperbolæ quadraturâ, quod sic ostendetur.

I. Summa quadratorum AP applicatorum in T æquatur summæ eorumdem quadrat. AP applicatorum in H, cùm rectæ BH, RT æquales sint (*prop.* 4. *Coroll.*) & summa quadr. AP applicatorum in punctis H æquatur summæ quadr. AB † summæ quadr. BP applicatorum in H. Atqui summa quadr. AB applicatorum in H cubatur ut patet. Summa etiam quadratorum BP applicatorum in H cubatur (*prop. præc.*) datâ Hyperbolæ quadraturâ, ergo eâdem datâ hyperb. quadraturâ summa quadratorum AP applicatorum in H cubatur.

II. Summa quadratorum PS applicatorum in T, aut quod idem est summa quadratorum AF applicatorum in H absolutè cubatur. Cùm enim quodlibet quadratum AF æquetur quad. AH † quadr. HF. Summa quadratorum AF æquatur summæ quadratorum AH † summæ quad. HF. Summa autem quadrat. AH cubatur (cùm AH applicatæ in H ad BR sint ordinatæ Trapezii) summa etiam quadratorum HF cubatur, quoniam summa circulorum radiorum HF reducitur ad sphæram cùm nihil sit aliud quàm Conois Hyperbolica genita ex BHF circa axem BH.

III. Summa Rectangulorum APS aut AF, AP applicatorum in T aut quod idem est in H cubatur absolutè. Nam in Triangulis ABP, AFI rectangulis & similibus, AI, AF :: AP, AB. Ergo Rectangulum AI, AB æquatur Rectangulo AF, AP & summa Rectangulorum AI, AB æquatur summæ Rectangulorum AF, AP. Cubatur autem summa Rectangulorum AI, AB applicatorum in H. Cùm enim BH, HI sint æquales (*prop.* 56. *num.* 4.) AI æquatur AB † 2. BH. Jam rectæ AB applicatæ in H, constituunt Rectangulum, & BH applicatæ in H triangulum, unde BI æquales duplo BH constituunt etiam Triangulum, quare rectæ AI applicatæ in H constituunt figuram rectilineam compositam ex Rectangulo & triangulo. Summa igitur Rectangulorum AB, AI applicatorum in H est solidum rectum cujus altitudo AB, basis autem figura rectilinea nota.: quare summa Rectangulorum AB, AI vel illi æqualium AF, AP applicatorum ad H cubatur, & illius summæ duplum, ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

De centro gravitatis Conchoidis Hyperbolicæ.

PROPOSITIO LXIII.

ESto (*fig.* 21.) alterum segmentum Conchoidis Hyperbolicæ RTZ æquale & simile segmento RTS, & habens eumdem axem RT.

Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ haberi centrum gravitatis figuræ RST. Haberi etiam segmenti RST.

DEMONSTRATIO.

DAtâ Hyperbolæ quadraturâ, quadratur segmentum Conchoidicum RST (*prop.* 58. *coroll.*) Habetur autem etiam datâ hyperbolæ quadraturâ, Rotundum ex eodem segmento RST circa BV basin (*prop.* 60.) ergo (*prop.* 8. *Coroll.* 1.) datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur recta parallela BV, transiens per centrum gravit. segmenti RST. Manifestum est autem punctum in quo talis recta secat axem BRT esse centrum graxit. figuræ RST, ergo datâ hyperb. quadraturâ habetur centrum gravitatis figuræ RST. Quod erat primum.

Præterea datâ Hyperb. quadraturâ habetur Rotundum ex segmento RST circa axem RT (*prop.* 62.) ergo habetur (*prop.* 8. *coroll.* 1.) recta axi RT parallela transiens per centrum gravit. segmenti RST. Habetur autem & alia (ut probatum est in prima parte hujus propos.) parallela BV & transiens per idem centrum gravit. segmenti RST. Ergo datâ Hyperbolæ quadraturà habetur centrum gravit. segmenti RST. Quod erat demonstrandum.

De Tangente Conchoidis Hyperbolicæ.

PROPOSITIO LXIV.

INveniri potest Tangens Conchoidis Hyperbolicæ in dato illius puncto.

DEMONSTRATIO.

HAberur tangens curvæ genitricis BF quæ est hic Hyperbola, ergo (*prop.* 9.) habetut tangens Conchoidis Hyperbolicæ RS. Quod erat demonstrandum.

Plures dare possemus constructiones ad inueniendam hujus Conchoidis tangentem, quemadmodum fecimus pro Conchoide semicirculari. Sed non arbitramur operæ pretium esse hic immorari.

PROPO-

PROPOSITIO LXV.

In qua demonstrantur ea quæ Doctissimus P. Lalovera sine demonstratione tradidit circa novam quamdam figuram quæ maximam cum Conchoide Hyperbolica affinitatem habet.

ESto (*fig.* 21.) Curva RN talis naturæ ut quælibet ejus ordinata TN sit ad TQ ordinatam Hyperbolæ RQ ut BR diameter Hyperbolæ ad BT.

Ait P. Lalovera (*de Cycloid: Appendice* 2. *num.* 5.) duo hæc se invenisse datâ Hyperbolæ quadraturâ.

1. Quadraturam Figuræ RTN.

2. Centrum gravitatis figuræ RNX compositæ ex duabus RTN, RTX æqualibus & similibus.

Hæc duo sic demonstrabimus.

I. *Quadratura Figuræ* RTN.

SIt AB æqualis BR & Hyperbola BF æqualis & similis Hyperbolæ RQ, & Conchois Hyperbolica RS genita ex Hyperbola BF, Polo A, axe BR, basi BV.

Quoniam (*hyp.*) BR, BT : : TN, TQ & AB æqualis est BR; AB, BT : : TN, TQ. Atqui ex proprietate Conchoidis RS, (*prop.* 4. *coroll.* 1.) AB, BT : : QS, QT. ergo TN, TQ : : QS, QT ac proinde TN, QS sunt æquales. Cùm ergo hoc semper eveniat quæcunque TS parallela ducatur, sequitur figuram RTN æquari figuræ RQS. Atqui datâ Hyperbolæ quadraturâ, quadratur segmentum Conchoidicum RTS (*prop.* 58. *Coroll.*) & segmentum Hyperbolicum RTQ, ac proinde eorum differentia RQS, ergo datâ Hyperbolæ quadraturâ quadratur figura RTN. Quod erat ostendendum.

II. *Centrum gravitatis figuræ* RNX.

QUoniam AB, BT : : TN, TQ. Si supponamus rectam AT esse libram, cujus centrum B, segmentum hyperbolicum RTQ suspensum ex A extremo brachii BA æquiponderabit figuræ RTN ut jacet pendenti ex brachio BT (*ex princip. Archimed. in lib. de Parabola.*)

Supponatur rectam parallelam TQ & tranſeuntem per centrum grav. figuræ RTN. ſecare axem RT in puncto Y. erit AB ad BY ut reciprocè figura RTN ad ſegmentum hyperbolicum RTQ pendens ex A. Datâ autem hyperb. quadraturâ, quadratur figura RTN (1. *part. præſ. prop.*) atque ita habetur illius ratio ad ſegmentum hyperbolicum RTQ, quod etiam datâ Hyperb. quadraturâ quadratur ut patet. Ergo datâ hyperb. quadr. habetur ratio AB, BY. ac proinde punctũ Y. Eſt autem Y centrum gravitatis figuræ RNX compoſitæ ex duabus RTN, RTX ſimilibus & æqualibus, ergo datâ hyperb. quadraturâ habetur centrum gravit. figuræ RNX. Quod erat demonſtrandum.

in cæteris earum proprietatibus mira conformitas existit, quam in hoc tractatu explicare aggredimur.

I. Igitur quemadmodum circa Conchoides fecimus, atque ex iisdem ferè principiis, hic Methodos generales trademus ad invenienda in Cissoidibus hæc quinque. 1. Earum dimensionem. 2. Rotunda circa basin. 3. Rotunda circa axem. 4. Centra gravitatis. 5. Tangentes.

II. Methodos illas applicabimus uni speciatim Cissoidi quæ ex semicirculo generatur Polo in extremitate diametri constituto. Hanc autem præ aliis illustrandam selegimus, quoniam inde dabitur occasio fusiùs agendi de nobilissima Cissoide quæ Dioclea appellatur, & una est ex Cissoidibus semicircularibus.

III. Perpetuam admirabilémque inter Conchoides & Cissoides quæ ex eadem figura, eodem polo, eadémque basi generantur affinitatem & Analogiam demonstrabimus, circa Aream, Rotunda, Centra gravitatis, Tangentes.

PROPOSITIO I.

Methodus generalis ad dimensionem Cissoidum.

ESto (*fig.* 2.) Cissois CZ, cujus Polus A, Axis CD, Basis DX, Figura genitrix ABK, ex Polo A ducta quæcunque AF quæ occurrat in E curvæ genitrici BK, in G Cissoidi CG, in F basi DX.

Ex omnibus punctis E curvæ BE intelligantur rectæ EI perpendiculares ad AE & occurrentes axi AB in I. (*ad vitandam linearum confusionem unam solùm* EI *in figura expressimus quæ cæteras omnes repræsentabit.*) Centro A radio AD describatur arcus circularis DL occurrens in L rectæ AF.

Jam intelligatur singulas AI Hypotenusas angulorum rectorum AEI erigi in punctis L respondentibus supra arcum DL & constituere figuram aliquam Cylindricam.

Dico sectorem Cissoidicum ACG æquari Triangulo ADF — figur. genitric. ABE & differentia inter prædictam figuram Cylindricam & duplum figuræ genitricis.

DEMONSTRATIO.

I. QUodlibet quadratũ AF æquatur ex elementis quadr. AE † quadr. EF † Rectang. AEF bis, sive Rectang. AF, AE bis — quadr. AE bis

AE bis. — Ergo summa quadr. AF applicatorum ad arcum DL extensum in lineam rectam æquatur summæ quadr. AE † summæ quadr. EF † summæ Rectang. AF, AE, bis, -- summæ quadrator. AE bis, applicando omnia ad arcum BL.

II. Sũma autem quadr. AF appli. ad arcum DL æquatur solido recto cujus basis Triangulum ADF, altitudo dupla AD (*de Conchoid. prop.* 2.)

Similiter summa quadr. AE applic. ad arcum DL æquatur solido recto cujus basis figura ABE altitudo dupla AD.

Et summa quadrat. EF sive AG (cùm enim ex natura Cissoidis AE, GF æquentur, additâ aut ablatâ communi EG duæ AG, EF æquantur) summa inquam quadr. EF vel AG æquatur solido recto cujus basis figura ACG, altitudo dupla AD.

Summa verò bis sumpta Rectangulorum AF, AE applic. ad arcum DL, æquatur (*Lemm. prop.* 3. *de Conchoid.*) solido recto cujus basis figura Cylindrica genita ex hypotenusis AI erectis in L supra arcum DL, altitudo autem dupla AD.

Denique summa quad. AE bis sumpta applic. ad DL, æquatur solido recto cujus basis figura ABE bis, altitudo dupla AD. (*prop* 2 *de Conchoid.*)

III. Ergo solidum rectum cujus basis Triang. ADF altitudo dupla AD, æquatur solido recto cujus basis figura ABE, altit. dupla AD † solido recto cujus basis figura ACG altitudo eadem. † solido recto cujus basis figura cylindrica ex hypotenusis AI, altitudo eadem — solido cujus basis duplum figuræ ABE altitudo eadem. Hoc est cum eorum solidorum sit eadem altitudo, Solidum rectum cujus basis Triang. ADF altitudo dupla AD æquatur solido recto cujus altitudo eadem, basis autem est ABE † ACG † Figura Cylindr. prædicta — duplũ ABE. Ergo cùm solida recta ejusdem altitudinis sint inter se ut bases, Triangulum ADF æquatur fig. ABE † fig. ACG † Figuræ Cylindr. prædictæ — duplo figuræ ABE. hoc est Triang. ADF æquatur figuræ ABE † fig. ACG † differentiæ inter Figuram Cylindr. prædictam & duplum figuræ ABE.

IV. Ergo figura ACG Cissoidica æquatur Triangulo ADF — figuræ genitrici ABE & differentiæ inter Figuram Cylindricam ex hypotenusis AI & duplum figuræ genitricis ABE. Quod erat demonstaandum.

PROPOSITIO II.

Methodus præcedens applicatur Cissoidi semicirculari.

ESto (*fig* 3.) Cissois CGZ cujus Polus A, axis CD, basis DX, figura genitrix semicirculus AEB. & recta quæcunque AEF occurrens Cissoidi in G, basi in F.

Inter AB, AD sit media proportionalis AH, & radio AH describatur quadrans circuli AHM occurrens in I rectæ AF.

Dico sectorem Cissoidicum ACG æquari Triangulo ADF imminuto figura genitrice ABE & duplo figuræ BHIE duobus arcubus BE, HI & rectis BH, EI comprehensæ.

DEMONSTRATIO.

EX singulis punctis E curvæ genitricis BE intelligantur perpendiculares ad rectas AE, illæ perpendiculares coibunt cum AB in puncto B, quoniam anguli AEB in semicirculo recti sunt. Hypotenusæ ergo angulorum rectorum AEB sunt semper æquales rectæ AB.

Centro A radio AD describatur arcus circuli DL occurrens rectæ AF in L. Quoniam (*hyp.*) tres AB, AH, AD sunt proportionales, arcus HI est ad arcum DL ut AH ad AD sive AB ad AH, quare Rectangulum sub AB & arcu DL (hoc est figura Cylindrica genita ex hypotenusis AB supra arcum DL) æquatur Rectangulo sub AH & arcu HI hoc est duplo sectoris AHI.

Est autem figura BHIE bis sumpta, differentia inter sectorem AHI bis sumptum & figuram genitricem ABE bis sumptam, ergo eadem figura BHIE bis sumpta est differentia inter figuram Cylindricam genitam ex Hypotenusis AB erectis supra arcum DL, & duplum figuræ genitricis ABE.

Atqui ex propos. præcedenti sector Cissoidicus ACG æquatur Triangulo ADF — figuræ genitrici ABE & differentiæ inter figuram Cylindricam ex hypotenusis AB, & duplum figuræ genitricis ABE.

Ergo idem sector Cissoidicus ACG æquatur Triangulo ADF imminuto figura genitrice ABE & duplo figuræ BHIE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Addendo utrinque duplum figuræ BHIE, sector Cissoidicus ACG † duplum figuræ BHIE æquatur Triangulo ADF — figuræ genitrici ABE, hoc est figuræ BDFE.

PROPOSITIO III.

IIsdem positis (*fig.* 3.) Dico figuram Cissoidicam CDFG æquari figuræ genitrici ABE † duplo figuræ BHIE.

Et totum spatium Cissoidicum CDXZ æquari semicirculo genitori AEB † duplo figuræ BHMAE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*Coroll. propos. præc.*) ACG † duplum figuræ BHIE æquatur figuræ BDFE, addendo utrinque figuram ABE, ACG † BHIE bis † ABE æquatur BDFE † ABE sive Triangulo ADF; ergo tollendo utrinque ACG, BHIE bis † ABE æquatur CDFG. Quod erat primum.

Deinde cùm CDFG semper æquetur ABE † BHIE bis, qualiscunque sit angulus DAF, sequitur quando angulus DAF rectus est, puncto F infinitè distante à D, totum spatium Cissoidicum CDXZ æquari semicirculo AEB † duplo figuræ BHMAE. Quod erat secundo loco demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Determinare rationem spatii Cissoidici CDXZ *ad semicirculum genitorem* AEB.

Sit AN (*fig.* 3.) quarta pars AB diametri semicirculi genitoris AEB, & O centrum ejusdem semicirculi.

Dico semicirculum genitorem AEB esse ad spatium Cissoidicum CDXZ ut AN ad AN † OD.

DEMONSTRATIO.

Centro A radio AB sit descriptus quadrans circuli ABP, facilè ostendi potest semicirculum AEB esse dimidium quadrantis ABP. hoc posito Semicirculus AEB ad quadrantem AHM est in ratione composita.

1. Semicirc. AEB ad quadrantem ABP sive 1. ad 2. aut AO, AB.

2. Quadrantis ABP ad quadrantem AHM, id est quadrat. AB ad quadrat. AH, vel rectæ AB ad rectam AD, cùm tres AB, AH, AD sint ex hyp. proportionales.

Duæ autem rationes AO, AB & AB, AD componunt rationem AO, AD, ergo semicirculus AEB est ad quadrantem AHM ut AO ad AD. & dividendo semicirculus AEB est ad figur. BHMAE ut AO ad OD. ergo semicirculus AEB est ad duplum figuræ BHMAE ut AN dimidia ipsius AO ad OD. & componendo semicirculus AEB est ad eumdem semicirc. AEB † duplum figuræ BHMAE hoc est (*prop. præc.*) ad spatium Cissoidicum CDXZ ut AN ad AN † OD. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

SI habeatur in numeris ratio AB, AD facilè determinabitur in numeris ratio semicirculi genitoris ad spatium Cissoidicum.

Fiat enim ut AB ad AD ita numerus 4. ad alium Z. Dico ut 1. est ad Z — 1. ita semicirculum AEB esse rd spatium Cissoidicum CDXZ.

Qualium enim AB est 4. talium AO est 2. & AN 1. est autem AD æqualis Z, ergo OD est Z — 2 & AN † OD est 1. † Z -- 2 hoc est Z — 1. ut autem AN ad AN † OD ita ex præsenti propos. semicirculus AEB est ad spatium Cissoidicum CDXZ, ergo semicirculus est ad spatium ut 1. ad Z — 1.

Exempla. Sit AB tertia pars ipsius AD, ergo AB ad AD ut 4. ad 12. ergo semicirc. AEB ad spatium Cissoidicum CDXZ ut 1. ad 12. — 1. sive ut 1. ad 11.

Sit AB ad AD ut 1. ad 2. ergo erit ut 4. ad 8. ac proinde semicirculus erit ad spatium Cissoidicum ut 1. ad 8 — 1 sive ut 1. ad 7.

Sit AB ad AD ut 1. ad 1. sive AB, AD sint æquales, erit ergo AB ad AD ut 4. ad 4. & semicirculus AEB ad spatium Cissoidicum CDXZ ut 1. ad 3.

LEMMATA.

Ad propositiones sequentes.

ESto (*fig.* 4.) semicirculus AEB & quadrans circuli ABM.

I. Dico quadrantem circuli ABM esse duplum semicirculi AEB.

Cùm enim AB radius quadrantis ABM sit duplus AD radii semicirculi AEB, circulus radii AB quadruplus est circuli radii AD. ergo quadrans ABM æquatur circulo radii AD sive duplus est semicirculi AEB.

II. Ex puncto A ducatur quævis AL quæ occurrat arcui BM in L & arcui AEB in E.

Dico segmentum BEL duplum esse segmenti BE.

Jungatur DE. Sector ABL est ad sectorem BDE in ratione composita ex his tribus.

1. Sectoris ABL ad quadrantem ABM hoc est anguli BAL ad angulum rectum BAM.

2. Quadrantis ABM ad semicirculum AEB hoc est 2. ad 1.

3. Semicirculi AEB ad sectorē DBE, hoc est duorum angulorū rector. ad angulum BDE sive anguli recti BAM ad dimidium anguli BDE.

Prima autem & tertia ratio anguli BAL ad angulum BAM, & anguli BAM ad angulum BAL dimidium anguli BDE se mutuò elidunt.

Ergo

Ergo sector BAL est ad sectorem DBE ut quadrans ABM ad semicirculum AEB, sive ut 2. ad 1. est autem & Triangulum ABE duplum Trianguli DBE, ergo reliquum segmentum BEL est duplum reliqui segmenti BE. Quod erat demonstrandum,

PROPOSITIO V.

Dimensio Diocleæ ejúsque segmentorum.

HAc propositione complectemur non solùm quæcunque à Vvallisio aliisque inventa sunt circa aream Diocleæ, sed etiam alia satis eximia quæ à nobis reperta sunt.

Sed antè omnia supponendum est Diocleam esse unam ex Cissoidibus semicircularibus de quibus actum est in præcedentibus tribus propositionibus.

Sit enim (*fig.* 4.) Dioclea AZ cujus axis AB, asymptotus BF, radio AB descriptus semicirculus AEB.

Ostendendum est Diocleam AZ esse Cissoidem genitam ex semicirculo AEB; Polo A, axe AB, basi BF.

Ducatur per A & G quodcunque Diocleæ punctum recta AGEF occurrens in E semicirculo AEB & in F rectæ BF. Per G ducatur NG perpendicularis ad AB occurrens in Q semicircumferentiæ AEB. ex E ducatur etiam EP perpendicularis ad eamdem AB. His positis.

Proprietas Diocleæ omnibus nota est quod GN ejus ordinata est ad NA, ut NQ ordinata semicirculi AEB ad NB igitur GN, NA :: NQ, NB. sed GN, NA :: EP, PA in Triangulo APE. Ergo EP, PA :: NQ, NB; quare quadr. EP est ad quadr. PA, hoc est BP ad PA, ut quadratum NQ ad quadr. NB hoc est ut AN ad NB. & componendo, BP, BA :: AN, AB, Ergo BP, AN sunt æquales. Ut autem BP ad AN ita est FE ad AG in Triangulo ABF, ergo FE, AG sunt æquales, & additâ vel sublatâ communi GE, duæ AE, FG sunt etiam æquales, Quod cùm eveniat quæcunque ducatur AF, constat ex generatione Cissoidum anteà tradita Diocleam AGZ esse Cissoidem generatam ex semicirculo AEB, Polo A, axe AB, Basi BF. Quod erat ostendendum.

Hoc ita supposito veniamus ad Dimensionem Diocleæ.

THEOREMA I.

Dimensio sectoris concavi Dioclea.

DIco sectorem concavum Diocleæ ACG æquari Triangulo ABF imminuto figura genitrice ABE & segmento circulari BE bis sumpto.

DEMONSTRATIO.

QUoniam Dioclea AZ est Cissois semicircularis, cujus Polus A, axis AB, basis BF, figura genitrix semicirculus AEB; sector Cissoidicus AGG (*prop.* 2.) æquatur Triangulo ABF imminuto figura genitrice ABE & duplo figuræ BEL contentæ duobus arcubus BE, BL. Quoniam autem segmentum BEL contentum rectis BE, EL & arcu BL, duplum est (*Lemm. præc.*) segmenti BE, segmentum BE æquatur figuræ BEL contentæ arcubus BE, BL, ac proinde duplum figuræ BEL æquatur duplo segmenti BE. Ergo sector Cissoidicus ACG æquatur Triangulo ABF imminuto figura genitrice ABE & duplo segmenti circularis BE. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA II.

Dimensio segmenti convexi Dioclea.

IIsdem positis (*fig.* 4.) Dico segmentum convexum ABFG Diocleæ æquari figuræ genitrici ABE † duplo segmenti circularis BE.

DEMONSTRATIO.

SEgmentum ABFG (*prop.* 3.) æquatur ABE † duplo BLE, est autem ut modò ostendimus BLE æquale segmento BE. ergo segmentum ABFG æquatur figuræ genitrici ABE † duplo segmenti BE. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA III.

Dimensio spatii integri Dioclea.

IIsdem positis (*fig.* 4.) Dico spatium integrum Diocleæ ABXZ esse triplum semicirculi AEB.

DEMONSTRATIO.

QUodcunque segmentum ABFG æquatur ut modò diximus (*Theor.* 2.) figuræ ABE † duplo segmenti BE. Segmentum autem ABFG abit in spatium integrum ABXZ puncto F infinitè recedente à B, sector autem ABE simul abit in semicirculum AEB puncto E abeunte in punctum A. & duplum segmenti BE abit similiter in duplum semicirculi AEB. Ergo spatium integrum ABXZ æquatur semicirculo AEB † eidem semicirculo AEB bis sumpto, sive triplum est semicirculi genitoris AEB. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA IV.

Dimensio sectorum convexorum Dioclea.

IIsdem positis, (*fig.* 4.) jungatur BG.

Dico sectorem convexum BAG Diocleæ esse triplum segmenti circularis BE.

DEMONSTRATIO.

QUoniam ex proprietate Cissoidis AGZ, rectæ AE, FG sunt æquales, ablatâ aut additâ communi GE, duæ AG, EF sunt etiam æquales, quare duo Triangula BAG, BEF sunt æqualia (*Elem. Eucl.*) Deinde sector concavus Diocleæ ACG (*Theor.* 1.) æquatur Triangulo ABF imminuto figura ABE & duplo segmenti BE, ergo addendo utrinque triplum segmenti BE, sector Diocleæ ACG † triplum segmenti BE, æquatur Triangulo ABF † segmento BE — figuræ ABE. Hoc est Triangulo BEF aut æquali BAG. Ergo ablato communi sectore Diocleæ concavo ACG, sector convexus BACG Diocleæ est triplus segmenti circularis BE. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA V.

Dimensio Figuræ contentæ Diocleæ portione & arcu circuli.

IIsdem positis. Ex puncto G Diocleæ ducatur GN perpendicularis ad AB & producatur donec occurrat in O semiperipheriæ AOB, jungatúrque AO.

Dico Figuram ACGO contentam Diocleæ portione ACG & arcu AO, rectáque GO esse quadruplam segmenti AO.

DEMONSTRATIO.

EX puncto E sit EP perpendicularis ad AB. Quoniam ut diximus in demonstr. Theor. 4. duæ AG, EF sunt æquales, etiam AN, BP illis proportionales (*Elem.*) æquales sunt. Quare circuli ejusdem segmenta BE, AO sunt æqualia.

Deinde ex proprietate Dioclеæ GN, AN : : ON, NB. Ergo Triangulum OAN æquatur Triangulo BGN, & additâ communi figurâ ACGN, figura ACGO æquatur sectori convexo Diocleæ ACGB. Est autem ACGB (*Theor.* 4.) triplum segmenti BE, ergo ACGO trilineum contentum curva ACG & rectis GO, AO triplum est segmenti AO, quare addito segmento eodem AO, Figura ACGO contenta curva Diocleæ ACG, arcu AO & recta GO quadruplum est segmenti AO. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VI.

Quadratura Figuræ contentæ arcubus circuli & curva Dioclea.

ESto (*fig.* 5.) Dioclea ABX, cujus Polus A, axis AC, basis CZ, semicirculus genitor ABC cujus centrum E. Perficiatur circulus ABCD in quo sit inscriptum quadratum ABCD, & circumscriptum quadratum OPQR. Ex punctis P, Q, R ut centris sint descripti tres quadrantes circuli BGC, CHD, DIA.

Dico Figuram AFBGCHDIA comprehensam tribus circuli quadrantibus prædictis & curva Diocleæ AFB æqualem esse quadrato CEBP.

DEMONSTRATIO.

SEctor Diocleæ convexus CAFB contentus rectis CA, CB & curva Diocleæ AFB est triplus segmenti circularis BLC (*Theor.* 4.) aut illi æqualis BGC. Ergo Figura AFBGC est dupla segmenti BGC aut æqualis est Figuræ BGCL. Ergo addendo ex una parte figuras CHDE, DIAE, & ex altera figuras æquales CGBE, CLBP. Figura, AFBGCHDIA æquatur quadrato BECP. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA

THEOREMA VII.

Quadratura totius spatii contenti arcu semicirculi generatoris, curvâ infinitâ Diocleæ, ejúsque asymptoto.

Iisdem positis (*fig.* 5.) Dico totum spatium contentum semiperipheria ABC, curva infinita Diocleæ ABX & asymptoto CZ, æquari quadrato OPQR circumscripto circulo ABCD.

DEMONSTRATIO.

Totum hoc spatium componitur ex duobus, quorum primum est Figura AFBK, alterum spatium BLCZX.

I. Ostensum est in Theor. 6. figuram AFBGC esse æqualem figuræ BGCL, cùm igitur BGCE æquetur AKBO, sequitur AFBE † AKBO æquari BGCL. Quadrata autem AEBO, BECP sunt æqualia, ergo AFBK æquatur BGCE † BPCL, hoc est BLCP † AKBO.

II. Totum spatium Diocleæ ACZX est triplum semicirculi ABC (*Theor* 3.) ergo æquale est circulo ABCD † semicirculo ACB. Deinde ostensum est in demonstr. *Theor.* 6. spatium AFBLC esse duplum BLCG, ergo est quadruplum segmenti BLC.

Si ergo ex spatio Diocleæ ACZX auferatur figura AFBLC supererit spatium BLCZX. & si ex circulo ABCD † semicirc. ACB auferatur quadruplum segmenti BLC, supererit quadratum ABCD † semicirculus ABC, hoc est Rectangulum AQ (æquale quadrato ABCD) † semicirculus ABC. & cum tota & ablata sint ostensa æqualia, duo reliqua sunt æqualia scilicet spatium BLCZX æquale est Rectangulo AQ † semicirculo ACB. Si igitur spatio BLCZX addatur AFBK, & Rectangulo AQ † semicirculo ABC, BLCP unà cum AKBO quæ num. 1. ostensa sunt æqualia figuræ AFBK. Totum quadratum OPQR invenietur æquale figuræ AFBK † spatio BLCZX. Quod erat demonstrandum.

Dimensio alterius speciei Cissoidis semicircularis.

Hactenùs dedimus dimensionem Cissoidum semicircularium, sive asymptotus DX (*fig.* 3.) secet AB diametrum semicirculi genitoris in D supra B; sive asymptotus BX (*fig.* 4.) secet AB in B in quo casu Cissois est Dioclea. Placet nunc ad perficiendam hanc doctrinam tertium casum examinare quando nimirùm asymptotus secat AB inter A

& B, quo fit ut generetur Cissois semicircularis à prioribus longè diversa. Et quod eximium est, hujus integræ Cissoidis Quadraturam absolutam exhibebimus in eo casu quo asymptotus transit per centrum semicirculi genitoris.

Sit igitur (*Fig. 6.*) Cissois CGAZ, cujus Polus A, semicirculus genitor AEB, basis aut asymptotus DX quæ secet AB inter A & B. axis CD. O punctum ubi DX secat circumferentiam AEB.

In hac Cissoide hoc est speciale quod una illius portio CGA jaceat infra A & altera AZ supra. Portio CGA generatur ab arcu BO, nam ex generatione DC æquatur AB, & FG ipsi AE. Cùm autem AB, AE. sint majores quàm AD, AF, sequitur DC majorem esse quàm DA & FG quàm FA, ac proinde puncta C, G sunt infra A. Altera Cissoidis portio AZ generatur ex arcu OA, & propter eamdem rationem posita est supra punctum A. Hoc supposito.

Quæramus primò dimensionem Figuræ AGC, deinde dimensionem spatii ADXZ, ex his enim duobus habebitur dimensio totius hujus Cissoidis sub axe CD, asymptoto infinita DX, & curva integra CGAZ comprehensæ.

PROPOSITIO VI.

Dimensio Figuræ AGC.

JUngatur recta AO, & radio AO describatur quadrans circuli HOM qui secet AB in H, & in I quamlibet GAE ductam inter AB, AO.

Dico segmentum circulare ABO genitorem Cissoidis AGC æquari Triangulo ADO + Cissoidi AGC + duplo segmenti circularis DHO.

DEMONSTRATIO.

CEntro A radio AD describatur arcus circuli DN qui occurrat in L, N rectis AE, AO; jungatur etiam BE.

Angulus AEB in semicirculo rectus est, ergo Triangula rectangula ABE, ADF sunt similia, quare AB, AE : : AF, AD, ergo Rectangulum AE, AF æquatur Rectangulo AB, AD, & summa Rectangulorum AE AF aapplicatorum in punctis L ad arcum DN extensum in lineam rectam, æquatur summæ Rectangulorum AB, AD applicatorum in iisdem punctis L ad eumdem arcum DN.

Summa autem Rectangulorum AB, AD applicatorum ad arcum DN æquatur ſolido recto cujus altitudo AD, baſis autem figura Cylindrica facta ex lineâ AB erectâ ſupra omnia puncta arcûs DN, ſive ſolido recto cujus baſis altitudo dupla AD, baſis dimidium ejuſdem figuræ cylindricæ, ergo ſumma Rectangulorum AE, AF applicatorum ad arcum DN æquatur eidem ſolido recto cujus altitudo dupla AD baſis autem dimidia figuræ Cylindricæ factæ ex AB ſupra arcum DN.

Quoniam autem ex proprietate circuli, AO & conſequenter AH eſt media proportionalis inter AD, AB, figura Cylindrica facta ex AB erecta ſupra arcum DN, æquatur figuræ Cylindricæ factæ ex AH ſupra arcum HO (*conſtat ex demonſtr. prop. 2. de Ceſſoid.*) ergo dimidium figuræ Cylindricæ factæ ex AB ſupra arcum DN æquatur dimidio figuræ cylindricæ factæ ex AH ſupra arcum HO, ſive ſectori AHO. Ergo cùm ſumma rectangulorum AE, AF applicatorum: ad arcum DN æquetur ſolido recto cujus baſis dimidia figuræ cylindricæ factæ ex AB ſupra DN, altitudo verò dupla AD; ſumpto pro baſi ſectore AHO æquali illi baſi, eadem ſumma Rectang. AE, AF applic. ad arcum DN æquatur ſolido recto cujus baſis eſt ſector AHO altitudo verò dupla AD.

Jam verò ſumma quadratorum AF (radiorum Trianguli ADO) æquatur ſolido recto cujus baſis prædictum Triangulum ADO, altitudo dupla AD. Ergo differentia ſummæ quadrat. AF & ſummæ Rectang. AE, AF applic. ad eumdem arcum, eſt eadem quæ duorum ſolidorum rectorum illis æqual. habentium pro baſibus ſectorem AHO & Triangulum ADO. Altitudinem autem eamdem duplam AD. ac proinde talis differentia æquatur ſolido recto cujus baſis eſt ſegmentum DHO, altitudo dupla AD. & duplum differentiæ eſt duplum hujuſmodi ſolidi recti.

Eſt autem ſumma Rectangulorum AFE applic. ad arcum DN, differentia inter ſummam Rectangulorum AE, AF & ſummam quadratorum AF applicat. ad eumdem arcum DN. Ergo bis ſumma Rectangul. AFE. applic. ad arcum DN, æquatur duplo ſolidi recti cujus baſis DHO.

His ita præmiſſis, facilè concludetur demonſtratio propoſitionis in hunc modum.

Summa quadr. AE applicatorum ad arcum DN æquatur triplici ſummæ, 1. quadr. AE. 2. quadr. EF aut AG æqualium ex natura hujus Ciſſoidis. 3. Summæ Rectang. AFE bis ſumptæ. (applicatis tam quadratis quàm Rectangulis ad arcum DN.)

Jam ſumma quadr. AE applic. ad DN æquatur ſolido recto cujus baſis ABO altitudo dupla AD. (*de Conchoid. prop. 2.*) & ſumma quadr. AF applic. ad DN æquatur ſolido recto cujus baſis Triangulum ADO. altitudo dupla AD.

Et ſumma quadr. AG applic. ad arcum DN æquatur ſolido recto cujus baſis AGC, altitudo dupla AD.

Summa denique bis sumpta rectangulorum AFE applic. ad arcum DN æquatur ut jam diximus solido recto cujus basis duplum segmenti DHO, altitudo dupla AD.

Ergo solidum rectum cujus altitudo dupla AD basis autem ABO æquatur tribus solidis rectis præcedentibus, sive unico solido recto cujus basis ADO † AGC † duplum segmenti DHO, altitudo eadem nempe dupla AD.

Ergo cum solida recta habentia eamdem altitudinem sint inter se ut bases, figura ABO genitrix Cissoidis AGC æquatur Triangulo ADO † Cissoidi AGC † duplo segmenti circularis DHO. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Cissois igitur AGC æquatur figuræ genitrici ABO imminutæ Triangulo ADO & duplo segmenti DHO, sive æquatur segmento BDO — duplo segmenti DHO, & addito communi Triangulo ADO. Cissois AGC † Triangulum ADO æquatur figuræ ABO — duplo segmenti DHO.

PROPOSITIO VII.

Dimensio spatii ADXZ.

Iisdem positis (*fig.* 6) Dico spatium Cissoidicum ADXZ æquari segmento circulari APOD † duplo figuræ APOM.

DEMONSTRATIO.

Sit in angulo OAM ducta quæcunque recta AR occurrens in P arcui AO, in Q Cissoidi AZ, in R basi DX, & in S quadranti circuli HOM.

Ostendetur ut in prop. 2. de Cissoid. sectorem Cissoidicum AQ æquari Triangulo AOR imminuto figura genitrice AOP & duplo figuræ POS.

Unde sequitur Triangulum AOR æquari sectori Cissoidico AQ † figuræ AOP † duplo figuræ POS; & auferendo communem sectorem Cissoidicum AQ, sequitur segmentum convexum Cissoidicum AORQ æquari figuræ AOP † duplo figuræ POS.

Et procedendo in infinitum sequitur totum spatium AOXZ Cissoidicum æquari figuræ genitrici sive segmento circulari APO † duplo figuræ APOM.

Et addendo Triangulum ADO, sequitur spatium Cissoidicum ADXZ æquari spatio circulari APOD † duplo figuræ APOM. Quod erat demonstrandum.

PROPO-

PROPOSITIO VIII.

Quadratura absoluta spatii integri Cissoidis semicircularis cujus asymptotus secat in centro Diametrum semicirculi genitoris.

IIsdem positis (*fig.* 6.) transeat DX asymptotus Cissoidis CGAZ per D centrum semicirculi genitoris AOB.

Dico totum spatium CGADXZ comprehensum axe CD, Cissoide infinita CGAZ, ejusque asymptoto DX æquari quadrato rectæ AO inscripto in circulo AOB.

DEMONSTRATIO.

QUoniam DO transit per centrum semicirculi AOB angulus HAO est semirectus, atque ita arcus HO æquatur arcui OM.

Ex puncto O ducatur TV tangens circulum AOB & compleatur Rectangulum ABTV.

Quoniam arcus HO, OM sunt æquales, manifestum est segmenta DHO, OVM esse æqualia. His ita præmissis.

Figura AGC æquatur segmento BDO — duplo DHO (*Coroll. prop.* 6.) & spatium ADXZ (*prop.* 7.) æquatur quadranti circuli ADO † duplo figuræ APOM, sive quadrato ADOV † figuræ APOV † duplo segmenti OVM.

Ergo Figura AGC † spatium ADXZ æquantur quadranti circuli BDO — duplo DHO aut æqualis OVM † quadrato ADOV † figuræ APOV aut æquali BEOT † duplo OVM. Elidendo igitur † & — duplum OVM. Figura AGC † spatium ADXZ æquantur quadranti circuli BDO † quadrato ADOV † figuræ EOT quæ componunt Rectangulũ ABTV quod est æquale quadrato rectæ AO. Quod erat demonstr.

Analogia Conchoidum & Cissoidum quoad spatia.

Definitio. Si Conchois & Cissois generentur eodem Polo, eadem Basi atque ex eadem figura genitrice, dicantur *Cognatæ.*

PROPOSITIO IX.

IN Conchoidibus & Cissoidibus cognatis quarum Basis communis non secat axem figuræ genitricis, Conchoidis spatiũ

integrum æquatur Ciſſoidis ſpatio † duplo figuræ genitricis.
Idem dicendum de ſegmentis correſpondentibus.

Sint Conchois RV & Ciſſois AZ (*fig.* 4.) Cognatæ ſive genitæ ex eodem Polo A, eadémque baſi BX, ex eadem figura AEB, ſitque Baſis BX ita poſita ut non ſecet AB axem figuræ genitricis AEB inter A & B.

Dico ſpatium Conchoidicum BRVX æquari ſpatio Ciſſoidico ABXZ † duplo figuræ genitricis AEB.

Et ſi ducatur quæcunque AS occurrens in G, E, S Ciſſoidi, figuræ genitrici, & Conchoidi; ducantúrque ex G, E, S ordinatæ GN, EP, ST.

Dico ſegmentum Conchoidicum RST æquari ſegmento Ciſſoidico ANG reſpondenti † duplo ſegmenti BPE.

DEMONSTRATIO.

EX proprietate Conchoidis & Ciſſoidis, tam GF, quàm FS æquatur AE. ergo AS eſt æqualis AG † duplæ AE. Atqui (*Elem Eucl.*) in Triangulo AST propter parallelas GN, EP, ST, AG † dupla AE eſt ad AS ut GN † dupla EP ad ST, ergo GN † dupla EP æquantur ipſi ST.

Rurſus tres AN, BP, RT æquales ſunt. Nam 1. ex proprietate Ciſſoidis AZ duæ AE, GF ſunt æquales, ergo ſublatâ vel additâ communi GE duæ AG, EF ſunt etiam æquales. Ut autem AG, EF ita AN, BP (*Elem.*) ergo AN, BP ſunt æquales.

2. Ex proprietate Conchoidis RV, duæ AE, FS ſunt æquales. Ut autem AE, FS ita AP, BT in Triangulo AST, ergo AP, BT ſunt æquales, ſunt autem ex natura Conchoidis etiam AB, BR æquales, ergo BP, RT ſunt etiam æquales.

Conſiderentur igitur tres figuræ aut ſpatia. 1. ABXZ cujus altitudo eſt AB. 2. BEA cujus altitudo eſt BA. 3. BRVX cujus altitudo eſt RB.

Quoniam hæ figuræ aut ſpatia habent æquales altitudines, & ad æquales diſtantias AN, BP, RT à verticibus A, B, R, quælibet GN ordinata primæ figuræ aut ſpatii † dupla EP ordinatæ ſecundæ figuræ aut ſpatii æquatur ST ordinatæ tertiæ figuræ aut ſpatii, ſequitur ex methodo indiviſibilium primam figuram aut ſpatium ABXZ † duplum ſecundæ figuræ aut ſpatii AEB æquari tertiæ figuræ aut ſpatio BRVX. Quod erat primo loco oſtendendum.

Similiter autem demonſtrabitur ſegmentum AGN † duplum ſegmenti BEP æquari ſegmento BST. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Hinc constat Conchoidem Cissoidémque cognatam, & earum figuram genitricem, tales esse figuras ut si duarum habeatur quadratura, etiam tertiæ habeatur.

Scholion. Ut exemplo aliquo manifesta fiat veritas pulcherrimæ hujus propositionis & simul appareat quàm rectè conveniat cum aliis anteà demonstratis.

Supponamus (*fig.* 4.) figuram genitricem AEB esse semicirculum, & asymptotum BX duci ex puncto B extremo diametri AB. Erit ergo Cissois AZ Dioclea, & Conchois BV illi cognata erit Conchois semicircularis cujus axis BR æquatur AB distantiæ Poli A ab asymptoto BX.

Ostensum est (*de Conchoid. propos.* 39. *Coroll.* 1.) spatium Conchoidicum BRVX quintuplum esse semicirculi genitoris AEB. Ostensum etiam (*de Cissoid. prop.* 3. *Theor.* 3.) spatium Cissoidicum ABXZ esse triplum ejusdem semicirculi genitoris AEB Spatium ergo Conchoid. BRVX æquatur spatio Cissoidico ABXZ † duplo semicirculi AEB. Ut asseritur in præsenti propositione.

PROPOSITIO X.

IN Conchoidibus & Cissoidibus cognatis quarum Basis communis secat axem figuræ genitricis, spatium Conchoidicum integrum æquatur duplo figuræ genitricis — spatio Cissoidis cognatæ.

Sint (*fig.*6.) Cissois AGC, & Conchois *ru* cognatæ genitæ nimirum ex eadem figura ABO, eodem Polo A, eadémque basi DX, secet autem basis DX, AB axem figuræ genitricis inter A & B.

Ostendendum est spatium Conchoidicum *ruy* æquari duplo segmenti BOD — Cissoidi AGC.

DEMONSTRATIO.

IN angulo BAO ducatur quæcunque A *s* quæ occurrat in F, basi DX, in E curvæ genitrici BO, in *s* Conchoidi *ru*, & in G Cissoidi AGC. atque ex punctis G, E, *s* ordinentur rectæ G *g*, E *e*, *s t*.

Quoniam ex proprietate Cissoidis AGC, AE, FG sunt æquales, AG, FE, sunt etiam æquales, cùm ergò AF æquetur AE — FE, AF æquatur AE — AG.

Deinde ex proprietate Conchoidis *ru*, AE, F *s* sunt æquales, est autem A *s* æqualis F *s* † AF, ergo A *s* est etiam æqualis AE † AF; est autem AF æqualis AE — AG. Ergo A *s* æquatur AE † AE — AG. hoc est duplæ AE — AG.

In Triangulis autem A st, AE e, AGg, ut A s est ad duplam AE — AG ita est st ad duplam E e — Gg. Quare st æquatur duplæ Ee — Gg.

Jam tres lineæ Cg, Be, rt sunt æquales, nam 1. duæ AE, FG æquantur, ergo (*Elem.*) duæ Ae, Dg etiam æquantur (nam AE AF : : Ae, AD, & AF, FG : : AD, Dg. Ergo ex æquo AE, FG : : Ae, Dg) sunt autem AB, CD æquales ex natura Cissoidis ergo Be, Cg sunt æquales.

2. Similiter AE, Fs sunt æquales ex natura Conchoidis ru, ergo Ae, Dt ipsis proportionales sunt etiam æquales. Æquantur autem & AB, Dr (ex natura Conchoidis) ergo Be, rt sunt etiam æquales.

Denique in tribus figuris ruy, BDO, AGC altitudines ry, BD, AC æquales sunt. Nam 1. ex natura Cissoidis AGC duæ AB, CD sunt æquales, ergo ablatâ communi AD, reliquæ BD, AC sunt æquales. 2. Ex natura Conchoidis ru, AO radius figuræ genitricis AEB æquatur OV ab asymptoto DX ductæ ad Conchoidem, ergo illis proportionales AD, DY sunt æquales. Sunt autem ex natura Conchoid. AB, DR etiam æquales, ergo reliquæ DB, ry sunt æquales.

Quoniam igitur tres figuræ ruy, BDO, AGC tales sunt ut earum altitudines ry, BD, AC sint æquales, & ad æquales rt, Be, Cg distantias à verticibus r, B, C ordinata st sit æqualis duplo ordinatæ Ee — ordinatæ Gg.

Ex methodo indivisibilium Figura ruy æquatur duplo figuræ BDO — figur. AGC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Methodus generalis ad dimensionem Rotundorum ex Cissoidibus circa basin.

ESto (*fig.* 7.) Cissois CZ, cujus Polus A, axis CD, basis DX, figura genitrix ABK, cui æqualis & similis descripta intelligatur CDL subcontrariè posita.

Sumpto quocunque puncto G in Cissoide, ordinetur GH quæ producta occurrat CL in I.

Dico GH esse ad HI ut AH ad HD.

DEMONSTRATIO.

JUngatur AG quæ producta occurrat BK curvæ genitrici in E, & basi in F. Ex E ordinetur EN ad axem AB.

Ex

Ex natura Cissoidis CZ, AE æquatur GF, est autem etiam AE, GF :: AN, HD. Ergo AN, HD æquantur. Est autem etiam AB æqualis CD. Ergo BN æquatur CH. Cùm igitur figuræ ABK, CDL sint similes & æquales, & BN, CH æquales, evidens est ordinatas NE, HI æquales esse. Quoniam ergo in Triangulo ANE, AH, AN :: HG, NE sive æquales GH, HI. Est autem AN æqualis ut diximus, HD, ergo GH, HI :: AH, HD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Si jungeretur recta DI, hæc foret parallela rectæ AF. Triangula enim rectangula ANE, DHI sunt similia & æqualia, unde anguli alterni ADI, DAF sunt æquales. Et AF, DI parallelæ. Unde etiam sequitur quadrilaterum DIGF esse parallelogrammum, & DI, GF esse æquales. Nec non DF, GI sive DF, GH † HI.

PROPOSITIO XII.

Iisdem positis. Per Polum A ducatur AM parallela DX basi Cissoidis.

Dico Rotundum ex spatio Cissoidico CDXZ circa basin DX æquari Rotundo ex figura CDL (æquali & simili genitrici ABK) circa AM.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ex præced. quælibet GH est ad HI ut AH ad HD, Rectangulum sub GH, HD æquatur rectangulo sub AH, HI.

Jam quando spatium CDXZ volvitur circa DX, quælibet GH producit superficiem Cylindricam, cujus altitudo GH, basis autem est peripheria radii DH.

Similiter quando figura CDL volvitur circa AM, quælibet HI generat superficiem Cylindricam cujus altitudo HI, basis autem est circumferentia radii AH.

Hæ autem duæ superficies Cylindricæ sunt inter se in ratione composita altitudinum GH, HI, & basium sive radiorum DH, AH. Ergo sunt inter se ut Rectangula sub GH, DH, & sub HI, AH. Quare cùm Rectangula sint æqualia, etiam superficies Cylindricæ sunt æquales, & cùm hoc semper eveniat, sequitur ex methodo indivisibilium Rotundum ex spatio CDXZ circa DX, æquari Rotundo ex figura CDL circa AM. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. 1. Similiter ostendetur Rotundum ex quocunque segmento Cissoidis verbi gratia CGH circa basin DX æquari Rotundo ex segmento CHI respondenti circa rectam AM.

Corollarium 2. Cùm figuræ CDL, ABK sint æquales & similes, & præterea rectæ AC, BD æquales (eò quod ex natura Cissoidis duæ AB, CD æquentur) manifestum est Rotundum ex DCL circa AM æquari Rotundo ex ABK circa DX, quare cum Rotundum ex CDL circa AM æquetur Rotundo ex CDXZ circa DX, etiam Rotundum ex CDXZ circa DX æquatur Rotundo ex ABK figura genitrice circa eamdem DX.

Similiter cùm figuræ CHI, BNE sint æquales & similes (eò quod BN æquetur CH, ut ostensum est in demonstr. prop. 11.) ac proinde Rotundum ex CHI circa AM æquetur Rotundo ex BNE circa DX, sequitur Rotundum ex segmento Cissoidico CHG circa basin DX (quod æquale est (*Coroll.*1.) Rotundo ex CHI circa AM) æquale etiam esse Rotundo ex BNE circa DX.

PROPOSITIO XIII.

Methodus præcedens applicatur Rotundis ex Dioclea ejúsque segmentis circa Basin sive asymptotum.

ESto (*fig.* 8.) Dioclea ACZ, cujus Polus A, axis AB, basis BX, semicirculus genitor ACB, cujus centrum O.

QUoniam axis AB semicirculi genitoris ACB, est etiam axis Dioclææ, manifestum est semicirculum BCA haberi posse pro figura simili & æquali & subcontrariè positâ figuræ genitrici ACB. Hoc posito. Demonstrabimus sequentibus quatuor Theorematibus tum quæ à Vvallisio circa Rotunda ex Cissoide circa asymptotum ostensa sunt, tum alia nonnulla quæ nullus quod sciam animadvertit.

THEOREMA I.

Dimensio Rotundi ex spatio integro Dioclea ABXZ *circa asymptotum* BX.

DIco Rotundum hujusmodi æquari semi-cylindro, cujus basis est semi-circulus genitor ABC, altitudo autem est circumferentia ejusdem circuli cujus diameter AB.

DEMONSTRATIO.

CEntrum gravitatis semicirculi ACB est in recta OC, ergo Rotundum ex semicirculo ACB circa AM (hoc est *propos.*12. Rotundum ex ſpatio Diocleæ ABXZ circa BX) æquatur ſemicylindro cujus baſis eſt ſemicirculus ACB, altitudo autem circumferentia radii BO (*Tacq. lib. 5. cylindr. & annul.*) Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA II.

Dimenſio Rotundi ex quocunque ſegmento Diocleæ AKL *circa aſymptotum* BX (*fig.* 8.)

Dico Rotundum hujuſmodi haberi ſive ad Sphæram reduci datâ circuli quadraturâ.

DEMONSTRATIO.

Rotundum ex ſegmento Ciſſoïdico AKL circa BX æquatur (*Coroll. prop.* 12.) Rotundo ex circulari ſegmento AKH circa AM.

Datâ autem circuli quadratura habetur recta parallela OC ſive AM tranſiens per centrum gravitatis ſegmenti circularis AKM (ut oſtenſum eſt in prop. 26. de Conchoidibus) habitâ autem illa rectâ parallelâ AM tranſeunte per centrum gravitatis ſegmenti AKH, & ſimul quadraturâ circuli datâ, quadratur ſegmentum AKM, ergo datâ circuli quadraturâ habetur Rotundum ex ſegmento circulari AKM circa AM (*de Conchoid. prop.* 8. *Coroll.* 2.)

Ergo datâ circuli quadraturâ habetur Rotundum ex ſegmento Diocleæ AKL circa aſymptotum BX.

Hæc duo Theoremata jam à clariſſimo Wallisio demonſtrata erant. Nos duo ſequentia ſubjungimus.

THEOREMA III.

Dimenſio Rotundi geniti ex ſpatio BICZX *circa aſymptotum* BX.

Dico hujuſmodi Rotundum æquale eſſe ſphæræ diametri AB.

DEMONSTRATIO.

In curva infinita CZ ſumatur quodcunque punctum F per quod ducatur FG ordinata Diocleæ occurrens in I arcui BIC Jungatur etiam AF quæ occurrat in H arcui AC, & ex puncto H ſit ut antè ordinata HK.

Ex proprietate Ciſſoidis AG, BK ſunt æquales ut jam ſæpiùs diximus, & AK, BG; & AO, BO. Quare & GO, KO, & GK dupla eſt GO.

Deinde ex proprietate Diocleæ BG, GI :: AG, GF. Cùm ergo AG, BK ſint æquales, BG, GI :: BK, GF. & permutando BG, BK :: GI, GF. & dividendo BG, GK :: GI, IF. Ergo Rectangulum ſub BG, IF æquatur Rectangulo ſub GK, GI. aut duplo Rectanguli GO, GI (cùm GK dupla ſit GO ut dictum eſt.)

Eſt autem Rectangulum ſub BG, IF ad Rectangulum ſub GO, GI ut ſuperficies cylindrica ex IF circa BX ad ſuperficiem cylindricam ex GI circa OC. Ergo ſuperficies cylindrica ex IF circa BX, dupla eſt ſuperficiei Cylindr. ex GI circa OC. Summa ergo ſuperficierũ ex IF circa BX ſive Rotundum ex ſpatio BIC ZX circa BX, eſt dupla ſummæ ſuperficierum ex GI circa OC (hoc eſt Hemiſphærii radii BO.) Ergo Rotundum ex ſpatio BICZX circa BX, æquatur ſphæræ diametri AB. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA IV.

Dimenſio Rotundi ex figura ALCH *circa aſymptotum* BX.

DIco etiam illud Rotundum æquari ſphæræ diametri AB.

DEMONSTRATIO.

SUmatur in curva ALC quodcunque punctum L per quod ordinetur KL quæ producta occurrat arcui AC in H, & per H ducatur AHF quæ occurrat Diocleæ in F, & per F ordinetur FG quæ occurrat arcui BIC in I. Oſtendetur ut antè AG, BK, & OG, OK eſſe æquales.

Jam ex proprietate Diocleæ, BK, KH :: AK, KL, & permutando BK, AK aut BK, BG :: KH, KL. & per converſ. rationis BK, GK :: KH, LH. Ergo Rectangulum ſub BK, LH æquatur Rectangulo ſub GK, KH, ſive duplo Rectanguli OK, KH. Inde autem ut in præcedenti propoſitione facilè oſtendetur ſummam omnium ſuperficierum Cylindricarum ex LH circa BX, hoc eſt Rotundum ex figura ALCH circa BX duplum eſſe hemiſphærii ex quadrante circuli AOC circa OC, ſive æquari ſphæræ diametri AB. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Rotunda ergo ex ſpatio BICZX & ex figura ALCH circa aſymptotum BX ſunt æqualia inter ſe, cùm utrumque ſit æquale ſphæræ diametri AB.

PROPOSI-

PROPOSITIO XIV.

Analogia Conchoidis & Cissoidis quoad Rotunda ex spatiis & segmentis circa basin.

SInt (*fig.* 7.) Conchois OP & Cissois CZ cognatæ quarum Polus A, figura genitrix ABK, basis DX quæ non secet axem AB figuræ genitricis inter A & B.

Dico Rotundum genitum ex spatio Conchoidico DOPX circa basin DX æquari Rotundo ex spatio Cissoidico CDXZ circa eamdem basin DX † duplo Rotundi ex figura genitrice ABK circa AK parallelam basi DX.

DEMONSTRATIO.

EX Polo A ducatur quæcunque AP quæ occurrat in G Cissoidi CZ, in E curvæ genitrici BK. & in P Conchoidi OP, atque ex punctis G. E, P ordinentur rectæ GH, EN, PQ perpendiculares ad AO.

Ex generatione Conchoidis & Cissoidis rectæ AE, FG, FP sunt æquales, atque ita rectæ AN, DH, QD ipsis proportionales sunt etiam æquales.

Deinde ordinata PQ Conchoidis æquatur GH ordinatæ Cissoidis † duplo EN ordinatæ figuræ genitricis ut probatum est in demonstratione propos. 9.

Ut autem PQ æquatur GH † duplo EN, ita propter æquales DQ, AN, DH, sumptis æqualibus circumferentiis radiorum DQ. AN, DH Rectangulum sub circumferentia radii DQ & PQ æquatur Rectangulo sub circumf. radii DH & GH † duplo Rectanguli sub circumf. radii AN & EN, sive superficies cylindrica ex PQ circa DX æquatur superficiei cylindricæ ex GH circa DX † duplo superficiei cylindricæ ex EN circa AM.

Ergo ex methodo indivisibiliũ Rotundum ex spatio Conchoid. DOPX circa DX æquatur Rotundo ex spatio Cissoid. CDXZ circa DX † duplo Rotundi ex figura genitrice ABK circa AM. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Similiter ostendetur Rotundum ex segmento Conchoidico OPQ circa DX æquari Rotundo ex segmento Cissoidico CGH respondenti circa DX † duplo Rotundi ex segmento BEN respondenti figuræ genitricis circa AM.

PROPOSITIO XV.

Analogia Rotundorum eorumdem cum centro gravitatis figuræ genitricis.

Iisdem positis (*fig.* 7.) transeat RS parallela AK per centrum gravitatis figuræ genitricis ABK.

Dico Rotudunm ex spatio Conchoidico DOPX circa basin DX esse ad Rotundum ex spatio Cissoidico CDXZ circa eamdem basin DX ut AD † AR ad DR.

DEMONSTRATIO.

Rotundum ex spatio Cissoidico CDXZ circa DX æquatur (*prop.*12.) Rotundo ex figura CDL circa AM aut quod idem est Rotundo ex figura genitrice ABK circa DX.

Atqui Rotundum ex spatio Conchoidico DOPX circa DX æquatur (*prop.*14.) Rotundo ex spatio Cissoidico CDXZ circa DX † duplo Rotundi ex ABK circa AM.

Ergo Rotundum ex DOPX circa DX æquatur Rotundo ex ABK circa DX † duplo Rotundi ex ABK circa AM. Quare Rotundum ex DOPX est ad Rotundum ex CDXZ ut Rotundum ex ABK circa DX † Rotundum ex ABK circa AM bis ad Rotundum ex ABK circa DX.

Est autem (*Tacquet lib.* 5. *Cylindr. & annul.*) Rotundum ex ABK circa DX æquale solido recto cujus basis ABK, altitudo circumferentia radii DR. Similiter Rotundum ex ABK circa AM æquatur solido recto cujus basis ABK altitudo circumf. radii AR, ergo Rotundum ex DOPX circa DX est ad Rotundum ex CDXZ circa DX ut solidũ rectum cujus basis ABK, altitudo circumferentia radii DR † circumf. radii AR bis ad solidum rectum cujus basis ABK, altitudo circumferentia radii DR. hoc est ut DR † AR bis, sive ut AD † AR ad DR. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. 1. Hinc data rectâ RS parallela basi DX transeunte per centrum gravitatis figuræ genitricis ABK, habetur ratio Rotundi ex spatio Conchoidico DOPX circa basin DX ad Rotundum ex spatio Cissoidico CDXZ circa eamdem basin.

Exemplum sit in Conchoide semicirculari RV (*fig.* 4.) & Dioclea ipsi cognata AZ. Constat figuræ genitricis quæ semicirculus est AEB centrum grav. esse in recta transeunte per centrum D. Est ergo ut AB † AD ad BD sive ut 3. ad 1. ita Rotundum ex spatio Conchoidico BRVX circa basin BX, ad Rotundum ex spatio Diocleæ ABXZ circa eamdem BX. quod egregiè convenit cum eo quod demonstratum est pro Rotundo Conchoidico (prop. 41. de Conchoidibus) & pro Rotundo ex Dioclea (prop. 13. de Cissoidibus Theor. 1.)

Corollarium. 2. Vicissim si habeatur ratio Rotundorum circa basin ex spatiis Conchoidis & Cissoidis cognatarum, habebitur recta basi parallela transiens per centrum gravitatis figuræ genitricis.

Unde (*fig.* 7.) si OP supponatur Conchois Nicomedea genita ex quadrante circuli ABK. Si haberetur ratio Rotundi ex spatio Conchoid. DOPX circa basin DX ad Rotundum ex spatio CDXZ Cissoidis cognatæ circa eamdem DX, haberetur RS recta transiens per centrum gravitatis quadrantis ABK. Quod sufficeret ad circuli quadraturam.

Corollarium 3. quæ dicta sunt de Rotundis ex spatiis integris Conchoidum & Cissoidum Cognatarum applicari possunt Rotundis ex earum segmentis respondentibus circa basin communem rotatis.

Ita (*fig.* 7.) Rotundum ex segmento Conchoidico OPQ circà DX, est ad Rotundum ex segmento Cissoidico CGH respondenti circa eamdem DX ut AD † distantia rectæ AK à ceutro grav. segmenti BEN figuræ genitricis, ad distantiam ejusdem centri à basi DX. Demonstrabitur planè eodem modo quo propositio præcedens.

Corollarium 4. Applicari etiam possunt segmentis quæ dicta sunt in Coroll. 1. & 2. pro spatiis integris. nimirùm

1. Si habeatur recta parallela DX (*fig.* 7.) & transiens per centrum grav. segmenti BEN figuræ genitricis, habebitur ratio Rotundi ex segmento Conchoid. OPQ circa DX ad Rotudum ex segmento Cissoid. respondenti CGH circa eamdem DX.

2. Et vicissim si nota sit ratio quam habent hæc duo Rotunda, habebitur recta parallela DX transiens per centrum gravitatis segmenti BEN.

Si igitur quemadmodum habetur ratio Rotundorum ex Conchoidis semicircularis & Dioclea spatiis integris BRVX, ABXZ (*fig.* 4.) circa basin DX, ut ostensum est in Corollario 1. præcedenti, ita haberetur ratio Rotundorum ex duobus segmentis RST, & AGN respondentibus, circa basin BX rotatis, haberetur hinc recta parallela BX transiens per centrum gravit. segmenti circularis BEP. Quod sufficeret ad circuli quadraturam.

SCHOLION.

DUabus præcedentibus propos. earúmque Corollariis explicuimus analogiam Rotundorum circa basin ex Conchoide & Cissoide cognatis & in quibus basis communis DX (*fig.* 7.) non secat AB axem figuræ genitricis inter A & B sed vel in B ut in Dioclea vel supra B. Simili autem ratiocinio prosequi possemus analogiam eorundem Rotundorum quando basis DX secat axem AB inter A & B ut in *fig. 6.* Sed ubi methodus nota est, quæ ex ea deduci possent in singulis casibus, non est operæ pretium fusè & laboriosè prosequi.

PROPOSITIO XVI.

Methodus generalis ad Dimensionem Rotundorum ex Cissoidibus circa axem.

ESto (*fig.* 7.) Cissöis CZ, cujus Polus A, basis DX, axis CD, figura genitrix ABK.

Dico 1. si habeatur summa quadratorum omnium AG (ductarum à Polo A ad curvam CG) applicatarum ad puncta H respondentia, haberi Rotundum ex segmento CGH circa axem CH.

DEMONSTRATIO.

QUodlibet quadratum AG æquatur quadrato AH † quadrato GH. Habetur autem summa quadr. AH applicatorum in H. Ergo si habeatur summa quadr. AH applic. in H, habebitur summa quadr. GH, ac proinde summa circulorum radiorum GH, hoc est Rotundum ex segmento CGH circa CH. Quod erat ostendendum.

Dico 2. Si habeatur summa quadratorum AF † summa quadrat. AE † summa Rectangulorum AEF applicatorum in N, habebitur Rotundum ex segmento CGH circa CH,

DEMONSTRATIO.

HAbébitur enim summa quadratorum EF applicatorum in N, (Cùm quodlibet quadr. AF æquetur quadrato AE † quad. EF † Rectangulo AEF bis.) Cùm autem AG, EF sint æquales (propter æqualitatem AE, GF ex natura Cissoidis) etiam ipsis proportionales AH, ND sunt æquales, sunt autem æquales AB, CD ergo reliquæ BH, CN sunt æquales, ac proinde summa quadr. AG applicat. in H æquatur summæ quadratorum EF applicatorum in N. Cùm ergo habeatur summa quadr. EF applic. in N, habebitur & summa quadr. AG applic. in H, ac proinde (*num.* 1.) Rotundum ex CGH circa CH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSI-

PROPOSITIO XVII.

Methodus præcedens applicatur Dioclea.

ESto (*fig.* 4.) Dioclea AGZ, cujus Polus A, basis BX, figura genitrix semicirculus AEB.

Dico datâ Hyperbolæ quadraturâ haberi Rotundum ex quolibet segmento AGN circa axem AN.

DEMONSTRATIO.

JUncta AG & producta occurrat semicirculo AEB in E, & asymptoto BX in F, atque ex E ordinetur EP.

Rectæ AF applicatæ in P constituunt segmentum Hyperbolæ secundi generis in quâ quadrata ordinatarum sunt reciprocè ut abscissæ (*de Conchoid. propos.* 42.) & summa quadr. ordinatarum hujus segmenti Hyperbolici sive rectarum AF, cubatur datâ Hyperbolæ quadraturâ. (*de Conchoid. prop.* 45.)

Prætereà rectæ AE subtensæ semicirculi applicatæ in P, generant segmentum Parabolæ cujus vertex A, axis AB (*de Conchoid. prop.* 43.) summa ergo quadratorum AE applic. in P cubatur, cùm summa circulorum quorum radii sunt AE applicatæ in P & ordinatæ Parabolæ, reducatur ad Sphæram (*Archim.*) Denique cùm Angulus AEB in semicirculo sit rectus quodlibet Rectangulum AEF æquatur quadrato BE, rectæ autem BE applicatæ in P generant aliam Parabolam cujus vertex est B axis BA, ac proinde cubatur summa quadratorum BE sive rectangulorum AEF applicatorum in P.

Quoniam igitur datâ Hyperbolæ quadraturâ cubatur. 1. Summa quadratorum AF. 2. Summa quadratorum AE. 3. Summa Rectangulorum AEF, applicando tam quadrata prædicta quàm rectangula ad puncta P. Sequitur (*prop. præc. num.* 2.) datâ Hyperbolæ quadraturâ haberi Rotundum ex segmento Dioclæ AGN circa axem AN. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Analogia Conchoidum & Cissoidum cognatarum quoad Rotunda ex illarum segmentis circa axem genita.

REsumatur (*figura* 7.) in qua ductæ sint lineæ ut antè sæpiùs dictum est. Sitque prætereà Figura CTH talis ut quodlibet ejus quadratum HT æquetur Rectangulo GHI. contento sub GH ordinata Cissoidis CGZ, & HI ordinata figuræ CDL similis & æqualis genitrici ABK.

Dico Rotundum ex segmento Conchoidico OPQ circa axem OQ æquari Rotundo ex segmento Cissoidico CGH circa axem CH † quadruplo Rotundi ex segmento CHI circa CH; vel quod idem est quadruplo Rotundi ex segmento BEN circa BN † quadruplo Rotundi ex segmento CHT circa CH.

DEMONSTRATIO.

Ordinata PQ Conchoidis æquatur GH ordinatæ Cissoidis † duplo EN ordinatæ figuræ genitricis aut æqualis HI (*prop. 9. de Cissoid. in demonstratione.*) Quadratum autem GH † 2. HI æquatur quadr. GH † quad. 2. HI aut 4. quadratis HI † duplo Rectanguli sub GH & 2. HI aut 4. Rectangulis GHI aut æqualibus 4. quadratis HT. Cùm ergo quadrata rectarum sint inter se ut circuli quorum radii sunt hujusmodi rectæ, circulus radii PQ æquatur circulo radii CH † quadruplo circuli radii HI † quadruplo circuli radii HT.

Cùm igitur hoc semper eveniat, & aliunde rectæ OQ, CH sint æquales (nam AE, FG, FP æquantur ex natura Conchoid & Cissoidis, ergo & AN, DH, DQ: sunt autem & AB, CD, DO etiam æquales, ergo & BN, CH, OQ.)

Sequitur ex methodo Indivisibilium Rotundum ex OPQ circa OQ æquari Rotundo ex CGH, circa CH † quadruplo Rotundi ex CHI circa CH, sive BEN circa BN † quadruplo Rotundi ex CHT circa CH, Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Applicatur præcedens propositio Dioclea & Conchoidi semicirculari ipsi cognatæ.

Resumatur (*fig.* 4.) Dico Rotundum ex segmento RST Conchoidis semicircularis, circa axem RT æquari Rotundo ex segmento Diocleæ AGN respondenti circa axem AN † sphæræ cognitæ.

DEMONSTRATIO.

SEmicirculus AOB est figura similis & æqualis genitrici AEB. Deinde ex proprietate Dioclea AZ, tres GN, AN, NQ vel NO sunt in continua ratione, quare quadratum AN æquatur Rectangulo GNO. Denique rectæ AN applicatæ in N generant Triangulum, & circuli harum rectarum generant Conum cujus vertex A, qui ex Archimede reducitur ad Sphæram ac proinde ejus quadruplum. His præmissis.

Rotundum ex RST circa RT (*prop. prac.*) æquatur Rotundo ex AGN circa AN † quadruplo Rotundi ex ANO circa AN † quadruplo Rotundi quod est summa circulorum quorum radii sunt AN medii proportionales inter GN, NO hoc est † quadruplo Coni prædicti aut Sphæræ illi æqualis.

Cùm igitur reducatur ad sphæram (*Archim.*) Rotundum ex segmento circulari ANO circa AN ac proinde ejus quadruplum. Sequitur Rotundum ex RST circa RT æquari Rotundo ex AGN circa AN † duabus sphæris cognitis aut reducendo duas sphæras ad unam, † uni sphæræ cognitæ. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SI liceret comparare inter se magnitudines absolutè infinitas, dici posset Rotundum ex Conchoide integra BRVX circa axem BR æquari Rotundo ex Dioclea integra ABXZ circa axem AB † quadruplo sphæræ ex semicirculo AOB circa AB † quadruplo Coni ex Triangulo Isoscele cujus ordinatæ sunt AN applicatæ ad omnia puncta N axis AB. Facilè autem ostendi potest hunc Conum duplum esse sphæræ diametri AB, ergo quadruplum Coni est octuplum sphæræ, quare Rotundum ex Conchoide integra semicirculari BRVX circa axem BR æquatur Rotundo ex Dioclea integra ABXZ circa axem AB † sphæræ diametri AB duodecies sumptæ.

PROPOSITIO XX.

Methodus Generalis ad inveniendum centrum gravitatis in Cissoide.

ESto (*fig. 7.*) Cissois CZ, cujus Polus A, basis DX, figura genitrix ABK, eique similis, æqualis & subcontrariè posita CDL; GH ordinata Cissoidis, HI ordinata figuræ CDL.

Sitque præterea in CH punctum V per quod transit recta parallela DX ducta per centrum gravitatis segmenti CHI; & Y punctum per quod transit recta parallela DX ducta per centrum gravitatis segmenti Cissoidis CGH.

Dico AV esse ad DY ut segmentum Cissoidicum CGH ad segmentum CHI.

DEMONSTRATIO.

ROtundum ex segmento CGH circa basin DX æquatur (*propos.* 12. *Coroll.* 1.) Rotundo ex segmento CHI circa AM parallelam DX. Æquatur autem Rotundum ex CGH circa DX solido recto cujus basis CGH, altitudo circunferentia radii DY (*Tacq. lib.* 5. *Cylindr.*) & Rotundum ex CHI circa AM æquatur similiter solido recto cujus basis CHI, altitudo circumferentia radii AV. Ergo duo hæc solida recta æquantur inter se, quare habent bases altitudinibus reciprocas, ergo ut circumf. radii AV ad circumf. radii DY, sive ut AV ad DY, ita est segmentum CGH ad segmentum CHI. Quod erat demonstrandum.

Corollarium 1. Hinc si habetur ratio segmentorum CGH, CHI & recta parallela DX transiens per centrum gravit. segmenti CHI, ac proinde punctum V, & recta AV, habebitur recta DY, ergo & punctum Y & recta parallela DX transiens per centrum gravit. segmenti Cissoid. CGH.

Corollarium 2. Quod dictum est de segmentis applicari debet spatiis integris Cissoidum. Ita si supponatur punctum V esse in quo parallela basi DX, transiens per centrum gravitatis figuræ CDL secat axem CD, & punctum Y esse illud in quo parallela basi DX, transiénsque per centrum gravit. spatii Cissoidici CDXZ secat axem CD, ostendetur ut priùs AV esse ad DY ut spatium Cissoid. CDXZ ad figuram CDL.

Unde sequitur si nota sit ratio spatii Cissoid. ad figuram CDL vel illi æqualem genitricem ABK, & simul habeatur recta parallela basi DX transiens per centrum grav. figuræ CDL sive genitricis ABK, haberi rectam parallelam DX quæ transeat per centrum gravitatis spatii Cissoid. CDXZ.

SCHOLION.

MEthodum seu Theorema generale tradidimus ad inveniendam rectam basi parallelam quæ transit per centrum gravit. segmentorum & spatii Cissoidici, ad inveniendam autem rectam aliam axi parallelam quæ transeat per idem centrum gravitatis, non aliam assignamus methodum quàm quæ pro Conchoidibus data est (*prop.* 8. *de Conchoid.*) quámque *in Corollario* 2. *ejusdem propos.* valere diximus pro quibuscunque figuris.

PROPO-

PROPOSITIO XXI

Applicatur methodus præcedens Dioclea.

DAta circuli & Hyperbolæ quadratura habetur centrum gravitatis segmenti Diocleæ.

DEMONSTRATIO.

REsumatur figura 4. cum lineis ibi sæpiùs notatis. Inveniendúmque sit centrum grav. segmenti Diocleæ AGN.

Datâ circuli quadraturâ, quadratur segmentum Diocleæ AGN (*prop.* 5.) atque ita habetur ratio segmenti AGN ad segmentum circulare AON. Præterea datâ circuli quadraturâ habetur recta parallelà BX transiens per centrum grav. segmenti circularis ANO. Ergo datâ circuli quadraturâ habetur recta parallela BX transiens per centrum gravit. segmenti Diocleæ AGN (*prop. præced.*)

Jam datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur Rotundum ex segmento AGN circa AN (*prop.*17.) Quoniam ergo datâ circuli quadraturâ quadratur segmentum AGN, sequitur (*de Conchoid.prop.* 8. *Coroll.* 1.) datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ haberi rectam axi AN parallelam transeuntem per centrum gravitatis segmenti Diocleæ AGN.

Ergo cùm datâ circuli & Hyperb. quadraturâ habeantur duæ rectæ transeuntes per centrum gravit. segmenti AGN. manifestum est iisdem datis haberi centrum gravitatis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

CEntrum gravitatis totius spatii Diocleæ ABXZ distat ab asymptoto BX sexta parte diametri AB.

Jam Vvallisius hoc adverterat.

DEMONSTRATIO.

ROtundum ex spatio ABXZ circa BX æquatur (*prop.* 13. *Theor.* 1.) semicylindro cujus basis est semicirculus AEB, altitudo verò æqualis circumf. radii BD. Est autem idem Rotundum æquale solido recto cujus basis spatium ABXZ, altitudo autem circumf. cujus radius est distantia centri gravitatis prædicti spatii à recta BX (*Tacquet lib.* 5. *Cylindr.*) ergo semicylinder & solidum rectum prædictum sunt æqualia, habentque bases altitudinibus reciprocas.

Est autem semicirculus AEB tertia pars spatii Cissoidici ABXZ (*prop.* 5. *Theor.* 3.) Ergo distantia centri grav. spatii Cissoid. ABXZ à recta BX, est tertia pars radii ABD, ac proinde sexta pars diametri AB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Analogia Conchoidis & Cissoidis quoad centra gravit.

SInt (*fig.* 7.) Conchois OP, & Cissois CZ cognatæ, quarum idem Polus A, basis DX, figura genitrix ABK. Sitque præterea recta RS parallela DX transiens per centrum gravit. figuræ genitricis ABK.

Dico distantiã centri grav. spatii aut figuræ Conchoid. DOPX à basi DX, ad distantiam centri grav. spatii aut figuræ Cissoidis CDXZ ab eadem basi DX, esse in ratione composita spatii figurævε Cissoid. CDXZ ad spatium figurámve Conchoid. DOPX, & rectæ AD † AR ad DR.

DEMONSTRATIO.

ROtundum ex spatio Conchoid. DOPX circa DX ad Rotundum ex spatio Cissoid. CDXZ circa eamdem DX est ut AD † AR ad DR. (*prop.* 15. *de Cissoid.*)

Est autem idem Rotundum Conchoid. ad idem Rotundum Cissoid. in ratione composita ex his duabus. 1. spatii Conchoid. DOPX ad spatium Cissoid. CDXZ. 2. Distantiæ centri grav. spatii DOPX à recta DX, ad distantiam spatii CDXZ ab eadem recta DX (*Tacq.*) Ergo ratio AD † AR, DR componitur ex duabus prædictis rationibus. Et addita communi ratione spatii Cissoid. CDXZ ad spatium Conchoid. duæ rationes 1. AD † AR, DR. 2. spatii Cissoid. CDXZ ad spatium Conchoid. DOPX componunt eamdem quam tres 1. spatii Conchoid. ad spatium Cissoid. 2. Distantiæ centri grav. spatii Conchoid. à recta DX ad distantiam centri grav. spatii Cissoid. ab eadem recta DX. 3, Spatii Cissoid. ad spatium Cnnchoid. Prima autem & tertia ratio se elidunt. Ergo secunda nempe ratio distantiæ centri grav. spatii Conchoid. ad distantiam centri grav. spatii Cissoid. à recta DX, composita reperitur ex his duabus. 1. AD † AR, DR. 2. Spatii Cissoidici CDXZ ad spatium Conchoidicum DOPX. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Quod dictum est de spatiis integris Conchoidis & Cissoidis, applicari potest segmentis earum sibi respondentibus, estque eadem ferè demonstratio.

PROPOSITIO XXIV.

Methodus generalis ad inveniendā tangentem Cissoidum.

Esto (*fig.* 9.) Cissois FM, cujus Polus A, basis DE. Figura genitrix ABC, axis DF, radius quicunque Cissoidis AI (qui occurrat in G curvæ genitrici BC, & in H basi DE) ex punctis G, I sint tangentes GV, IE quæ occurrant in V, E rectis AC, DE parallelis.

Dico AV, HE : : AG, AI.

DEMONSTRATIO.

Sumpto alio quocunque puncto M in Cissoide, jungatur AM quæ occurrat in K, L curvæ genitrici BC & basi Cissoidis DE. Per I, M, & G, K ducantur secantes IMP, GKO quæ occurrant in P, O rectis DE, AV. Prætereà per puncta L, M ducantur LN, RS parallelæ AI & occurrentes in N, R rectæ IR parallelæ DE, & in L, S, ipsi DE. Denique jungatur NM quæ producta occurrat DE in Q. His positis.

I. Lineæ AO, LQ sunt æquales. Nam in Triangulis AGK, LNM, duo latera AG, AK duobus LN, (sive HI) LM sunt æqualia ex natura Cissoidis, & anguli A, L illis comprehensi, æquales propter parallelas AG, LN (*hyp.*) ergo reliquus angulus AGK reliquo LNM æqualis est. Jam in Triang. AGO, LNQ, cùm latera AG, LN sint æqualia, & angulus G angulo N, & angulus GAO angulo NLQ (Cùm GAO, AHD alterni, & AHD, NLH æquētur) sequitur basin AO basi LQ æqualē esse.

II. Jam recta LQ est ad SQ ut LN ad SM, sive ut HI (æqualis LN) ad SM, sive ut HP ad SP, ergo permutando LQ, HP : : SQ, SP.

III. Propter parallelas IR, SP, SQ est ad SP ut RN ad RI, sive ut LS ad SH, sive ut LM ad AM.

IV. Quoniam igitur LQ, HP : : SQ, SP (*ut ostensum est num.* 2.) & SQ, SP : : LM, AM (*num.* 3.) ergo LQ, HP : : LM, AM. Est autem LQ æqualis AO (*num.* 1.) & LM æqualis AK ex natura Cissoidis, ergo AO, HP : : AK, AM.

V. Cùm igitur habeatur semper hæc analogia AO, HP : : AK, AM, quantumvis sumatur punctum M propinquum puncto I. Sequitur abeunte puncto M in punctum I, & consequenter puncto K in punctum G, cùm subsecans AO abeat in subtangentem AV & subsecans HP in subtangentem HE, & AK in AG, & denique AM in AI: sequitur inquam ex methodo desinentium esse AV, HE :: AG, AI. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc manifestum est si habeatur tangens curvæ genitricis haberi quoque tangentem Cissoidum omnium quæ ab ea ex quocunque puncto generari possunt.

Sit enim GV tangens genitricis BC in G, si fiat ut AG ad AI ita AV ad quartam HE, juncta IE tanget Cissoidem FM in I.

PROPOSITIO XXV.

Altera constructio generalis ad inveniendas Tangentes Cissoidum.

Iisdem positis (*fig.* 9.) sit GT tangens curvæ genitricis BC, quæ occurrat in T basi Cissoidis DE, & IX tangens Cissoidis FM occurrens in X rectæ AC parallelæ DE.

Dico AG, AI :: HT, AX.

DEMONSTRATIO.

AG, IH æquales sunt ex natura Cissoidis FM, ergo sublatâ vel additâ communi IG, duæ AI, GH sunt etiam æquales; quare curva BGC est Cissois genita ex curva FM, Polo A & basi DE. Ergo (*prop. præc.*) AG, AI :: HT, AX.

PROPOSITIO XXVI.

Aliæ duæ Constructiones.

Iisdem positis (*fig.* 9.) Dico 1. Rectas HE, HT esse æquales.
Dico 2. Quadratum HE aut HT æquari Rectangulo XAV.

DEMONSTRATIO.

1. HE, AV :: AI, AG (*prop.* 24.) Atqui AI æquatur GH. Ergo HE, AV :: GH, AG. Atqui GH AG :: HT, AV ob similia Triangula GHT, GAV, ergo HE, AV :: HT, AV. Quare HE, HT sunt æquales.

2. AX, HT :: AI, AG (*propos.* 25.) sed AI, AG :: HE, AV

AV (*prop.* 24.) sive HT, AV cùm HE, HT sint æquales ut modò ostensum est. Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Variæ constructiones & novæ ad inveniendam Tangentem Dioclea.

ESto (*fig.* 10.) Dioclea AMN, genita ex semicirculo AFD, cujus centrum V, Polo A, basi DR tangente semirculum in D. Sit etiam punctum M datum in Dioclea ex quo ducenda est tangens.

Jungatur AM quæ occurrat in F semicirculo AFD, & in I basi seu asymptoto DR, ex puncto F sit F, HY tangens circulum & occurrens in H asymptoto DR, & in Y rectæ AC parallelæ DR.

Prima Constructio.

FIat ut AF ad AM ita AY ad IX. Juncta MX tanget Diocleam in M.

Patet ex propos. 24.

Secunda Constructio.

FIat ut AF ad AM ita IH ad AL. Juncta ML tanget Diocleam in M,

Patet ex propos. 25.

Tertia Constructio.

FIat ut AY ad HI ita HI ad AL. Juncta ML tanget Diocleam in M,

Patet ex propos. 26. num. 2.

Quarta Constructio.

SIt HI æqualis IX. Juncta MX tanget Diocleam in M.

Patet ex prop. 26. num. 1.

Quinta Constructio.

SIt DX tripla DH. Juncta MX tanget Diocleam in M.

DEMONSTRATIO.

Nam in Triangulis similibus FHI, FAY; FH, HI :: FY, AY. Sunt autem FY, AY tangentes ejusdem circuli æquales, ergo FH, HI sunt etiam æquales. Sunt autem & DH, FH æquales, ergo DH, HI æquales sunt (*constr.* 4.) posito quod MX tangat Diocleam, ergo si MX tangit Diocleam in M, DX tripla est ipsius DH. Unde viceversâ. cùm (*hyp*) DX sit tripla DH, juncta MX tangit Diocleam in M.

Sexta Constructio.

Ex puncto M demittatur in AC perpendicularis MK. Fiátque ut EF ordinata circuli ad DH, ita AK aut MO ordinata Diocleæ ad AL.

Juncta ML tanget Diocleam in M.

DEMONSTRATIO.

Hoc manifestum erit, si ostendamus positâ ML tangente esse AL, AK :: DH, EF.

Probatum est in demonstr. constr. 5 DH, IX esse æquales positâ tangente LMX. Atqui AL, IX :: AM, MI, Ergo AL, DH :: AM, MI :: AO, OD. Sunt autem ex proprietate Diocleæ OM, OA, OQ, OD, continuè proportionales, ergo OM, OQ :: OA, OD, sive AK, OQ :: OA, OD. Cùm ergo OQ æquetur EF (nam AO æquatur DE sicut AM, FI ex natura Cissoidis) ergo AK, EF :: AL, DH. Et permutando AL, AK :: DH, EF. Quod erat demonstrandum.

Septima Constructio.

Ut DO (intercepta inter asymptotum DR & ordinatam OM Diocleæ) est ad DV (radium semicirculi generatoris) ita Fiat OM (ordinata ex puncto M) ad AL. Juncta LM tanget Diocleam in M.

DEMONSTRATIO.

Hoc patebit si probetur viceversa, positâ tangente LM esse DO, DV :: OM, AL. Hoc autem sic ostendetur.

Producatur FH tangens circulum donec occurrat AD in B. Ex proprietate circuli, BV, DV :: DV, EV. Ergo reliqua BD est ad reliquam DE ut DV ad EV. Ergo BD est ad BD † DE sive ad BE ut DV ad DV

† EV five ad DO. Eſt autem BD, BE :: DH, EF, Ergo DV, DO :: DH, EF. Atqui DH, EF :: AL, AK five AL, OM (*conſtr.* 6.) ergo DV, DO :: AL, OM. & invertendo DO, DV :: OM, AL. Quod erat oſtendendum.

Octava Conſtructio.

ANgulo MAC fiat æqualis angulus AMZ & rectæ AZ recta IX.

Juncta MX tanget Diocleam in M.

DEMONSTRATIO.

IN Triangulo AMZ cum anguli A, M ſint æquales, latera AZ, MZ ſunt etiam æqualia, æquantur autem & AY, FY tangentes circuli, quare MZ, FY ſunt parallelæ. Eſtque AF, AM :: AY, AZ aut AY, IX (*hyp.*) ergo (*conſtruct.* 1.) MX tangit Diocleam.

Nona Conſtructio.

Eſt Clariſsimi Viri Petri Fermatii Operum Variorum pag. 70. *ſed abſque demonſtratione.*

EX puncto M ſit in AD perpendicularis MO, & radio VD ſit æqualis DS. Applicetúrque ad rectam SO Rectangulum DOA faciens latitudinem OG.

Juncta MG tanget Diocleam in M,

DEMONSTRATIO.

SIt ML tangens Diocleam in M & occurrens AD in G, & AC in L. Oſtendendum eſt Rectangulum DOA applicatum ad SO habere latitudinem OG, ſive Rectangulum DOA æqaari Rectangulo S[illegible], OG ſumptâ DS æquali radio VD.

Triangula GAL, GOM, ſunt ſimilia, ergo AG, GO :: AL, OM. Atqui AL, OM :: VD, DO (*conſtr.* 7.) ergo AG, GO :: VD aut SD, DO. & componendo AO, GO :: SO, DO. Quare Rectangulum ſub AO, DO æquatur Rectangulo ſub GO, SO. Quod erat demonſtrandum.

Decima Constructio.

Est Doctissimi Barrovii Lect. Geom. 9. num xvi. Quam placet ex nostris principiis demonstrare.

Ex puncto Q (ubi OM ordinata Diocleæ secat semicirculum genitorem) ducatur tangens QP quæ occurrat in P diametro DA, & fiat ut PO † PA ad PO ita AO ad QG,

Juncta MG tanget Diocleam in M.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AM, FI ac proinde AO, DE sunt æquales, manifestum est subtangentes BE, PO; & BD, PA æquales esse. Igitur ratio BE † BD ad BE est eadem cum ratione PO † PA ad PO.

Ostendendum igitur BE † BD esse ad BE ut AO ad GO.

Ex præcedenti constructione AO, GO :: SO, DO. Ostendendum est igitur SO esse ad DO ut BE † BD ad BE.

Ex proprietate BF tangentis circulum BV, DV, EV sunt proportionales, ergo BD, DE :: DV, EV. & componendo BE, DE :: DV † EV, EV; sive cùm EV, VO sint æquales, BE, DE :: DO, VO. & per conversionem rationis BE, BD :: DO, DV. Sive DO, DS (cùm DV, DS sint æquales (*Construct. præc. 9.*) ergo BE † BD, BE :: DO † DS sive SO, DO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Analogia Conchoidum & Cissoidum quoad Tangentes.

Sint (*fig. 9.*) Cissois FIM, & Conchois *f i m* Cognatæ genitæ nimirùm ex eadem figura ABC, Polo A, basi DE. Ducatur quæcunque recta AI*i* occurrens Cissoidi in I, Conchoidi in *i*, curvæ genitrici BG in G, basi DE in H.

Ex I sit IE tangens Cissoidis occurrens basi DE in E, sit etiam ex *i* tangens Conchoidis *i e* occurrens eidem basi DE in *e*.

Dico HE, H*e* :: AI, A*i*.

DEMONSTRATIO.

Ex G sit GV tangens in G curvam genitricem BC, & occurrens in V rectæ AC parallelæ basi DE. AI, AG :: HE, AV (*prop. 24. hujus*) AG, A*i* :: AV, H*e* (*prop. 9. de Conchoid.*) ergo ex æquo AI, A*i* :: HE, H*e*. Quod erat demonstrandum.

DE

DE NATURA VARIARUM CONCHOIDUM ET CISSOIDUM.

EXERCITATIO GEOMETRICA.

PRÆTER eas Conchoides ac Cissoides quas prioribus Exercitationibus fusiùs explicuimus, alias multas contemplatus sum è variis figuris ortas tum antiquis, tum novis. Prolixior sim si quæcunque mihi circa fœcundissimum hoc argumentum occurrerunt referre velim. Non tamen injucundum erit ut spero paucis accipere quæ sit natura Conchoidum nonnullarum & Cissoidum celebriorum, utpote quæ ex lineis rectis ac sectionibus Conicis atque etiam ex ipsis Conchoidibus & Cissoidibus variis modis generantur; unde Conchoides & Cissoides Triangulares dici possunt, Parabolicæ, Hyperbolicæ, Ellipticæ, atque Conchoidum Conchoides & Cissoidum Cissoides, prout ex radiis Triangulorum, Parabolarum &c. efformantur. Atque in his quemadmodum & in præcedentibus videre licuit, perpetuam inter Conchoides, Cissoidésque Cognatas Analogiam intercedere advertemus.

DE CONCHOIDIBUS ET CISSOIDIbus Triangularibus.

PROPOSITIO I.

CONchois genita ex linea recta quæ parallela est basi Conchoidis, est linea recta.

Sit (*fig.* 1.) Conchois EH cujus Polus A, linea genitrix recta BF, basis DG. Dico Conchoidem EH esse rectam linem.

DEMONSTRATIO.

EX natura Conchoidis, rectæ AB, DE, & AF, GH sunt æquales, Ergo AB, AF :: DE, GH. Sed propter parallelas BF, DG, AB, AF :: AD, AG, ergo DE, GH :: AD, AG. Unde patet puncta omnia E, H esse ad eamdem rectam parallelam DG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Cissois genita ex linea recta basi Cissoidis parallela est etiam linea recta.

ESto (*fig.* 1.) Cissois DG genita ex linea recta BF, Polo A, basi EH parallelâ BG. Ostendendum est DG esse lineam rectam.

DEMONSTRATIO.

EX naturâ Cissoidis, AB, DE & AF, GH sunt æquales. Ergo AB, AF :: DE, GH. Sed propter parallelas BF, EH, AB, AF :: AE, AH. Ergo AE, AH :: DE, GH. Unde rursus patet puncta omnia D, G esse ad eamdem rectam parallelam EH aut DG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Conchois genita ex linea recta non parallela basi Conchoidis est Hyperbola.

ESto (*fig.* 2.) Conchois IF, genita ex recta KC, Polo A, basi NM non parallela rectæ genitrici KC. Ostendendum est Conchoidem IF esse Hyperbolam.

DEMONSTRATIO.

QUoniam KC, NM non sunt parallelæ, concurrunt in aliquo puncto B, juncta AB & producta occurrat Conchoidi IF in I. Ducatur autem ex Polo A quæcunque alia recta AF occurrens in D, rectæ genitrici KC, in E basi NM, in F Conchoidi I F. Ex I, F ducantur IK, FL parallelæ NM occurrentes KC in K, L. Ducantur item IG, FH parallelæ KC & occurrentes in G, H rectæ ACH parallelæ NM.

Ex natura Conchoidis IF, rectæ AB, BI sunt æquales, ergo in Triangulis similibus ABC, BIK, CB, BK sunt etiam æquales. Similiter ex naturâ Conchoidis, duæ AD, EF sunt æquales, ergo in Triangulis similibus ADC, EFM, DC, FM sunt æquales. Æquantur autem FM, BL; ergo DC, BL æquantur, igitur BK, BL :: BC, DC. Sed ob æquales BC, HM & DC, FM; BC, DC :: HM, MF :: AE, EF :: DF, AD :: HC, CA :: FL, IK. Ergo BK, BL :: FL, IK. Quare puncta I, F. sunt ad eamdem Hyperbolam descriptam centro B, asymtotis BK, BM. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hyperbolæ IF centrum est in B concursu rectæ genitricis KC & basis NM. Asymptoti autem sunt rectæ BK, BM.

PROPOSITIO IV.

Cissois genita ex linea recta non parallela basi Cissoidis est etiam Hyperbola.

POlo A (*fig.* 3.) basi BD, ex linea recta EI generetur Cissois GH. Sitque EI non parallela BD sed concurrat cum illa in E. Dico Cissoidem GH esse Hyperbolam.

DEMONSTRATIO.

DUctâ AI parallelâ BD ac proinde conveniente cum EI in puncto I. Compleatur parallelogr. ABEI, & ipsi EB sit æqualis, BK, & ex K ducatur KL parallela EI occurrens AI in M. Erit ergo MI dupla AI. Jam per A intelligatur ducta quæcunque AD occurrens rectæ BD in D, Cissoidi GH in H, rectæ EI genitrici Cissoidis in F, & rectæ KL in L.

Quoniam ex natura Cissoidis rectæ AF, DH æquales sunt, est autem AF æqualis AL, cùm sint AF, AL :: BE, BK. Ergo DH, AL sunt æquales. Quare punctum H ex Conicis est ad Hyperbolam descriptam centro K, asymptotis KD, KL per punctum A. Idem ostendetur de alis omnibus punctis Cissoidis GH. Ergo Cissois GH Hyperbola est. Quod erat demonstrandum.

DE CONCHOIDIBUS ET CISSOIDIbus Parabolicis.

PROPOSITIO V.

Conchois genita ex Parabola, Polo in curva Parabolica constituto, basi autem rectâ parallela axi, est alia Parabola.

ESto segmentum Parabolæ ABC (*fig.* 4.) cujus axis BO, ordinata ad axem AC; axi BO parallela DE. Polo A, basi DE ex Parabola ABC sit genita Conchois FN.

Dico FN esse Parabolam.

DEMONSTRATIO.

SIt DHF alterum segmentum Parabolæ simile similitérque positum & æquale segmento ABC. Sitque FK Parabolæ FH tangens in F, occurrénsque DE in K. Fiat ut AC ad AD ita DK ad DE, & jungatur FE. Ex quocunque puncto N Conchoidis FN ducatur NG parallela DE occurrens in H, I, M, Parabolæ FHD, & rectis FK, FE.

Quoniam (*hyp.*) FN est Conchois genita Polo A, ex Parabola ABC, cui similis est Parabola DHF, AD est ad DG ut HN ad GH (*prop.* 4. *de Conchoidibus.*) Ratio autem AD, DG est composita ex duabus 1. AD, DF. 2. DF, DG.

Et cùm AC, DF sint æquales ex natura Conchoidis, ratio AD, DF est eadem cum ratione AD, AC, sive (*hyp.*) DE, DK sive æquali GM, GI.

Ratio autem DF, DG est eadem cum ratione GI, GH (*Archim. de Parab. prop.* 5.)

Ergo ratio AD, DG sive illi æqualis HN, GH componitur ex duabus GM, GI, & GI, GH: sive est eadem cum ratione GM, GH. Ac proinde rectæ HN, GM sunt æquales, ergo sublatâ communi HM, duæ GH, MN æquales sunt. Similiter ostendetur ductâ quâcunque aliâ *g n* parallelâ DE, *g h*, *m n* æquales esse. Ergo omnia puncta N, *n*, Conchoidis sunt ad eamdem Parabolam transeuntem per F, E ut ostendetur Lemmate sequenti. Quare Conchois FN est Parabola. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

SIt segmentum Parabolæ FHD cujus diameter GH eique parallela DE & juncta quæcunque FE, sintque singulis GH, *g h*, parallelis æquales MN, *m n*. Dico puncta F, *n*, E esse ad eamdem Parabolam, cujus vertex N, diameter MN, ordinatim applicata FE.

DEMONSTRATIO.

EX proprietate Parabolæ DHF, quadrata GH, *g h*, sunt ut Rectangula DGF, D *g* F, sed quadrata GH, *g h* sunt ut quadrata æqualium (*hyp.*) MN, *m n*. Et Rectangula DGF, D *g* F sunt ut Rectangula EMF, E *m f* (eò quòd rectæ DF, EF similiter secentur in punctis G, M, *g*, *m*.) Ergo quadrata MN, *m n* sunt inter se ut Rectangula EMF,

EmF

E *m* F. Unde patet puncta F, *n*, N, E esse ad eamdem Parabolam FNE cujus vertex est in N, diameter NM, applicata FE. Quod erat, &c.

PROPOSITIO VI.

Cissois genita ex Parabola, Polo in curva constituto, Basi autem rectâ Parallelâ axi est alia Parabola.

ESto segmentum Parabolæ ABC (*fig.* 5.) cujus axis BO ordinata ad axem AC, axi BO parallela DE. Polo A, Basi DE ex Parabola ABC sit genita Cissois FN.

Dico FN esse Parabolam.

DEMONSTRATIO.

SIt aliud in puncto D infra DE segmentum Parabolæ DHF æquale & simile segmento ABC sed subcontrariè positum (quanquam hic erit etiam similiter positum propter similitudinem segmentorum ABO, BCO.) Sitque in F, FK tangens Parabolam FH & occurrens DE in K, ut AC ad AD ita sit DK ad DE, jungatúrque FE.

Ex quocunque puncto N Cissoidis FN ducatur NG parallela DE & occurrens FD in D, Parabolæ FH in H, & rectis FK, FE in I, M.

Ex proprietate Cissoidis FN (*de Cißoidibus prop.* 11.) AG, GD :: GN, GH. Ergo componendo AD, GD :: GN † GH, GH.

Sed AD, GD ratio componitur ex rationibus 1. AD, FD (sive AD, AC, sive (*hyp.*) DE, DK, sive GM, GI.) 2. FD, GD (sive GI, GH. *Archim.* 5. *de Parab.*) ergo ratio AD, GD sive illi æqualis GN † GH, GH est eadem cum ratione GM, GH (quæ componitur etiam ex duabus GM, GI, GH.) Ergo GM æquatur GN † GH, & sublatâ communi GN. Duæ GH, NM æquantur.

Punctum igitur N & alia omnia Cissoidis FN sunt (*Lemm. praeced.*) ad Parabolam eamdem transeuntem per F, E. Quare Cissois FN est Parabola. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Conchois genita ex Parabola, Polo in vertice Parabolæ constituto, Basi autem axi Parallelâ est alia Parabola.

ESto (*fig.* 6.) Conchois DMO genita ex Parabola ABC, Polo A vertice Parabolæ, Basi DE axi AH parallelâ.

Dico Conchoidem DMO esse Parabolam.

DEMONSTRATIO.

OCcurrat Parabola ABC rectæ DE in C. Et Figuræ ADC similis similitérque posita & æqualis statuatur DKG. Jungatúrque DG, & ducatur quæcunque IM parallela DE occurrens in I, L rectis DF, DG, & in K, M Parabolæ DKG, & Conchoidi DMO.

Ex proprietate Parabolæ DKG cujus vertex D, axis DE, & FG parallela axi, FG, IL : : IL, IK. Sed FG, IL : : DF, DI, sive AD, DI. Ergo AD, DI : : IL, IK. Sed ex proprietate Conch. DMO (*prop.* 4. *de Conch.*) AD, DI : : MK, IK. Ergo MK, IK : : IL, IK. ac proinde MK, IL sunt æquales, & sublatâ communi KL, duæ IK, LM sunt æquales. Ergo (*Lemm. seq.*) punctum M est ad Parabolam cujus vertex D, tangens DG. Idem ostendetur de aliis omnibus punctis Conchoidis DM. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

SIt Parabola DKG, cujus axis DE, tangens DF, axi parallela FG, junctáque DG. Sit etiam curva DMO talis ut singulæ IK, FG respondentibus LM, GO sint æquales. Ostendendum est DMO esse Parabolam.

Ex proprietate Parabolæ DKG, rectæ FG, IK sunt ut quadrata AF, AI. Sed FG, IK sunt ut æquales GO, LM, & quadrata AF, AI ut quadrata AG, AL. Ergo ex Conicis DMO est Parabola, cujus vertex D, tangens DG, Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VIII.

Cissois genita ex Parabola, Polo in vertice Parabolæ constituto, Basi autem rectâ axi parallelâ, est etiam Parabola.

ESto (*fig.* 7.) Cissois DMO genita ex Parabola ABC, Polo A vertice Parabolæ, Basi DE, axi AG parallela.

Dico Cissoidem DMO esse Parabolam.

DEMONSTRATIO.

OCcurrat Parabola ABC rectæ DE in C. & Figuræ parabol. ADC similis & æqualis sed subcontrariè posita sit DFG. Jungatúrque DG, & ducatur quæcunque IM parallela DE occurrens in I, L, rectis DF, DG, & in K, M, Parabolæ DKG & Cissoidi DMO.

Ex proprietate Parabolæ DKG cujus vertex D, axis DE, FG parallela axi; FG, IL : : IL, IK. Sed FG, IL : : DF, DI sive AD, DI; ergo AD, DI : : IL, IK. Sed ex proprietate Cissoidis DMO (*prop.* II. *de Cissoidibus*) AI, ID : : IM ordinata Cissoidis, IK ordinata figuræ subcontrariæ, & componendo AD, DI : : IM † IK, IK. Ergo IM, † IK, IK : : IL, IK, ac proinde IM † IK & IL sunt æquales, & sublata communi IM, duæ IK, LM sunt æquales. Ergo (*Lemm. præc.*) punctum M est ad Parabolam cujus vertex D, tangens DG. Idem ostendetur de aliis omnibus punctis Cissoidis DMO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Conchois ex Parabola, Polo in vertice, Basi ordinatâ ad axem.

ESto (*fig.* 8.) Parabola AC cujus vertex A, axis AB, ordinata BC, & ex eâ Polo A, basi BC genita Conchois EF.

Dico EF esse curvam cujus ordinatæ æquantur ordinatis Parabolæ † ordinatis Hyperbolæ secundi generis, in qua quadrata ordinatarum sunt reciprocè ut abscissæ.

DEMONSTRATIO.

PRoductâ AB in G ita ut BG sit æqualis AB, sit semi-segmentum Parabolæ BGH æquale & simile similitérque positum semi-segmento ABC. Et centro B, asymptotis BC, BG per H descripta intelligatur Hyperbola HL secundi generis in qua quadrata ordinatarum GH, IL sint ut reciprocè abscissæ BI, BG. Sumpto autem inter B, G; quocunque puncto I ducatur IF ordinata Conchoidis EF, occurrens in K, L, Parabolæ BH, & Hyperbolæ HL.

Ex proprietate Hyperbolæ HL quadratum IL est ad quadr. GH ut BG ad BI, sive ex natura Parabolæ BH, ut quadratum GH ad quadratum IK. Ergo tres IL, GH, IK sunt proportionales. Estque IL ad IK ut quadratum GH ad quadr. IK.

Rursus ex proprietatate Conchoidis EF (4. *prop. de Conchoid.*) FK est ad IK ut AB ad BI, sive ut BG ad BI, sive ut quadr. GH ad quadr. IK. Ostensum est autem quadr. GH esse ad quadr. IK ut IL ad IK. Ergo FK est ad IK ut IL ad eamdem IK. Quare FK, IL sunt æquales, & sublatâ communi KL, FL IK sunt etiam æquales, ergo FI ordinata Conchoidis EF æquatur IK ordinatæ Parabolæ † IL ordinatæ Hyperbolæ secundi gradûs prædictæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Conchoides genitæ ex Parabolis cujuscunque gradûs.

SIt (*fig.* 8.) Parabola ABC secundi generis quæcunque, atque ex illa, Polo A vertice, Basi BC ordinatâ, genita sit Conchois EF.

Dico Conchoïdem EF esse talem curvam ut ejus ordinatæ IF æquentur IK ordinatis Parabolæ BGH similis genitrici ABC † IL ordinatis Hyperbolæ alicujus secundi generis.

DEMONSTRATIO.

SIt itaque HL curva talis ut IK † IL æquentur IF ordinatis Conchoidis EF genitæ ex Parabola AC. Ostendendum est, HL esse aliquam Hyperbolam secundi generis.

Sit verbi gratia Parabola ABC ac proinde similis & æqualis BGH talis ut abscissæ BI, BG sint ut cubi IK, GH.

Quoniam (*hyp.*) IK † IL æquantur IF. IL æquatur FK. Et IK, IL : : IK, KF. Atqui (*de Conchoid.* 4.) IK, KF : : BI, BA seu BG. Ergo IK, IL : : BI, BG. Est autem ratio BI, BG æqualis (*hyp.*) triplicatæ IK, GH. Ergo ratio IK, IL est triplicata rationis IK, GH. Sed ratio IK, IL componitur ex duabus IK, GH; GH, IL, ergo composita ex duabus IK, GH; GH, IL est triplicata rationis IK, GH. Quare ratio GH, IL est duplicata rationis IK, GH. & triplicata GH, IL est sextuplicata rationis IK. GH. Cùm autem (*hyp.*) triplicata IK, GH sit ipsa ratio BI, BG, sextuplicata IK, GH est duplicata BI, BG. Ergo triplicata GH, IL est duplicata BI, BG. Sive cubus GH est ad cubum IL ut quadratum BI ad quadratum BG. Quare curva HL est Hyperbola secundi generis centro AB, asymptotis BC, BG descripta per H.

Sit iterum Parabola AC ac proinde BH talis ut quadrata BI, BG sint quemadmodùm cubi IK, GH.

Ostendetur ut antè rationem IK, IL eamdem esse cum ratione BI, BG. Ergo quadrata IK, IL sunt ut quadrata BI, BG sive (*hyp.*) ut cubi IK, GH. Componitur autem ratio quadrati IK ad quadr. IL ex rationibus quadratorum IK, GH, & quadratorum GH, IL, ergo composita ex duplicatâ IK, GH & duplicatâ GH, IL æquatur rationi cuborum IK, GH sive triplicatæ IK, GH. Quare duplicata GH, IL æquatur.

tur rationi IK, GH. Ergo sextuplicata GH, IL æquatur triplicatæ IK, CH sive (*hyp.*) duplicatæ ipsius BI, BG. Quare triplicata GH, IL æquatur rationi BI. BG. Ergo ut BI ad BG ita est reciprocè cubus GH ad cubum IL.

Eodem modo demonstrabitur in aliis Parabolis, ergo &c. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. 1. Innotescet autem cujus gradûs sit Hyperbola HI per hanc regulam universalem.

Centro B, *asymptotis* BC, BG *per* H *descripta sit Hyperbola* HL *in qua exponens potestatis ordinatarum* GH, IL *idem sit cum exponente potestatis ordinatarum Parabola* BGH *sive* ABC, *exponens autem potestatis abscissarum* BI, BG, *sit differentia inter exponentes potestatis abscissarum & ordinatarum in prædicta Parabola* ABC.

Hyperbola HL *erit talis ut ejus ordinata* IL † *ordinata* IK *sint æquales ordinatis* IF *Conchoidis genita ex parabola* ABC, *Polo* A, *basi* BC. Ex allatis exemplis hoc satis liquet.

Corollarium. 2. Ex præcedenti propositione patet haberi quadraturam omnium Conchoidum quæ generantur ex Parabola, Polo in vertice constituto, assumptâ autem pro basi quâcunque ordinatà ad axem.

Cùm enim (*fig.* 8.) singulæ IF ordinatæ Conchoidis EF æquantur IK † IL, segmentum IGEF æquatur segmento IGHK † segmento IGHL, cùm ergo segmentum IGHK sit Parabolæ alicujus generis, segmentū autem IGHL sit Hyperbolæ secundi generis, quadrentur autem tam Parabolæ cujuscumque generis quàm Hyperbolæ secundi generis ut Geometris notum est. Manifestum est segmentum IGEF quadrari.

Eadem ratione totus locus Conchoidicus BGEFM æqualis est segmento Parabolico BGH † loco Hyperbolico BGHLM.

SCHOLION.

De Conchoidibus genitis ex Parabolis cujuscunque generis Polo in vertice constituto, Basi autem Parallela axi.

POstquam præcedentem propositionem demonstravimus, advertimus etiam quadraturam haberi omnium Conchoidum quæ ex Parabolis cujuscunque generis generantur, polo in vertice constituto, basi autem axi parallela.

THEOREMA.

RESumatur enim figura 6. in qua AC est Parabola cujus axis AH; vertex A, DC parallela axi, Conchois MO genita ex Parabola AC, Polo A, basi DC.

Dico Conchoidem MO esse curvam cujus ordinatæ IM æquantur ordinatis IK Parabolæ DG similis ipsi AC † ordinatis IL lineæ GL, quæ vel recta est vel Parabolica alicujus generis.

DEMONSTRATIO.

NAm primò sit AC eique similis & æqualis DG Parabola communis. Probatum est in demonstratione (*prop.* 7.) hujus Exercit. junctâ DG quæ occurrat IM in L., duas. IL & KM æquales esse, ergo IM æquatur IK † IL, ordinatæ ad rectam GL quæ in hoc casu recta est.

Sit secundò AC, eique similis DG Parabolica secundi generis, verbi gratiâ, in qua cubi abscissarum DI, DF sunt ut ordinatæ IK, FG. Sit linea GL talis ut semper IL † IK æquentur IM.

Ostendendum est lineam GL esse Parabolicam alicujus generis.

Cùm IL † IK æquentur IM, duæ IL, KM æquales sunt, ac proinde ratio IK, IL æqualis rationi IK, KM sive (*de Conchoid. prop.*4.) rationi DI, DA aut DI, DF.

Jam (*hyp.*) ratio IK, FG est triplicata DI, DF ergo addita communi FG, IL, ratio compos. ex IK, FG; FG, IL, sive ratio IK, IL, sive ratio DI, DF componitur ex triplicata DI, DF & ex ratione FG, IL. Sive ex tribus 1. DI, DF. 2. quadr. DI ad quadr. DF. 3. FG, IL. Componitur autem ratio eadem DI, DF ex tribus. 1. DI, DF. 2. FG, IL. 3. IL, FG cùm hæ duæ ultimæ facientes rationem æqualitatis nihil immutent. Ergo tres. 1. DI, DF. 2. quad. DI. quad. DF. 3. FG, IL componunt eamdem quam tres. 1. DI, DF. 2. FGIL. 3. IL, FG. Ergo sublatis utrinque duabus communibus. DI, DF; & FG, IL. Remanet ratio quadr. DI, ad quadr. DF, æqualis rationi IL, FG. Quare linea GL non est recta in hoc casu sed Parabolica cujus vertex D, tangens DF, súntque ordinatæ IL, FG ut quadrata abscissarum DI, DF,

Eodem modo demonstrabitur in aliis Parabolis.

Cognoscetur autem cujus gradûs sit Parabolica GL per regulam sequentem similem ei quam antè tradidimus.

Vertice D, *per* G *describatur Parabola* DLG *in qua exponens ordinatarum* IL, FG *sit idem cum exponente potestatis ordinatarum* IK, FG *in*

Parabola DKG *sive* ABC *proposita. Exponens autem potestatis abscissarum* DI, DF *sit differentia inter exponentes potestatis abscissarum & ordinatarum in prædicta Parabola* ABC *vel* DKG.

Parabola GLD *erit talis ut ejus ordinata* IL † *ordinata* IK *æquentur* IM *ordinatis Conchoidis* DMO *genita ex Parabola* ABC, *Polo* A, *Basi* DC.

PROPOSITIO XI.

Cissois genita ex Parabola, Polo in vertice Parabolæ constituto, Basi autem ordinatâ ad axem Parabolæ.

ESto (*fig.* 9.) Parabola ABC cujus vertex A, axis AB, BC ordinata ad axem. Polo autem A, Basi BC, ex Parabola AC generetur Cissois AFE.

Dico FE esse curvam cujus ordinatæ æquantur ordinatis Hyperbolæ secundi generis (in qua quadrata ordinatarum sunt reciprocè ut abscissæ) — ordinatis Parabolæ.

DEMONSTRATIO.

SIt BGH Parabola similis & æqualis Parobolæ ABC sed subcontrariè posita, & productâ CB in M. Centro B, asymptotis BG, BM per H descripta intelligatur Hyperbola HL in qua quadrata ordinatarum GH, IL sint ut reciprocè abscissæ BI, BG. Sumpto autem inter B, G, quocunque puncto I ducatur IF ordinata Cissoidis EF, occurrens in K, L, Parabolæ BH, & Hyperbolæ HL.

Ex proprietate Hyoerbolæ HL, quadratum IL est ad quadratum GH, ut BG ad BI, sive ex natura Parabolæ BH ut quadratum GH ad quadratum IK. Ergo tres IL, GH, IK sunt proportionales, estque IL ad IK ut quadratum GH ad quadratum IK.

Rursus ex proprietate Cissoidis EF (*prop.* 11. *de Cissoid.*) FI, IK : : AI, IB, & componendo FK, IK : : AB, BI, sive BG, BI. Sive ut quadr. GH ad quadr. IK. Ostensum est autem quadr. GH esse ad quadr. IK ut IL ad IK. Ergo FK, IK : : IL, IK. Quare FK, IL æquales sunt, & sublata communi IK, FI ordinata Cissoidis æquatur KL, sive IL ordinatæ Hyperbolæ HL — IK ordinatæ Parabolæ BH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Cissoides genitæ ex Parabolis cujuscunque gradûs.

SIt (*fig*, 9.) Parabola ABC secundi generis quæcunque, atque ex illa, Polo A vertice, Basi BC ordinata, genita sit Cissois EF.

Dico Cissoidem EF talem esse curvam ut ejus ordinatæ IF æquentur IL ordinatis Hyperbolæ secundi generis — IK ordinatis Parabolæ similis genitrici ABC.

DEMONSTRATIO.

SIt itaque HL curva talis ut IL — IK æquentur IF ordinatis Conchoidis EF genitæ ex Parabola AC. Ostendendum est HL esse aliquam Hyperbolam secundi generis.

Sit, verbi gratiâ, Parabola ABC ac proinde similis BGH talis ut abscissæ sint ut cubi ordinatarum respondentium.

Quoniam (*hyp.*) IL — IK æquatur IF. Additâ communi IK. IL æquatur FK. Et IL, IK : : FK, IK. Atqui (*de Cissoid. prop.* 11.) FK, IK : : AB seu BG, BI. Ergo IL, IK : : BG. BI. Et invertendo IK, IL : : BI, BG. Est autem ratio BI, BG (*hyp.*) triplicata IK, GH. Ergo ratio IK, IL triplicata est rationis IK, GH. Sed ratio IK, IL componitur ex duabus IK, GH; GH, IL. Ergo composita ex duabus IK, GH; GH, IL, est triplicata rationis IK, GH. Quare ratio GH, IL duplicata est rationis IK, GH, & triplicata GH, IL est sextuplicata IK, GH. Cùm autem (*hyp.*) triplicata IK, GH. sit ipsa ratio BI, BG, sextuplicata IK, GH est duplicatata BI, BG. Ergo triplicata GH, IL est duplicata BI, BG. Sive cubus GH, est ad cubum IL ut quadratum BI ad quadratum BG. Quare curva HL est Hyperbola secundi generis centro B asymptotis BM, BG descripta per H.

Eodem propè modo in aliis Parabolis cujuscunque gradûs fuerint demonstratio procedet.

Ergo &c. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. 1. Cujus autem gradûs sit Hyperbola HL innotescet per Regulam quam in Coroll. 1. præced. propos. tradidimus.

Corallarium. 2. Hinc etiam habetur quadratura omnium Cissoidum genitarum ex Parabolis, Polo in vertice constituto, Basi autem ordinata ad axem.

Est enim summa rectarum IF, æqualis summæ notæ rectarum IL — summæ item notæ rectarum IK.

SCHOLION.

SCHOLION.

De Cissoidibus genitis ex Parabolis cujuscunque generis Polo in vertice constituto, basi autem axi parallela.

Resumatur (*fig.* 7.) in qua ABC est Parabola cujus axis AG, vertex A, DC parallela axi, Cissois DMO genita ex Parabola ABC, Polo A, basi DC.

Dico Cissoidem DMO esse curvam cujus ordinatæ IM æquantur ordinatis IL lineæ GLD quæ vel recta est vel Parabolica alicujus generis — ordinatis IK Parabolæ similis ipsi AC sed subcontrariè positæ.

Nam primò sit ABC eique similis & æqualis DKG Parabola cõmunis. Probatum est in demonstratione prop. 8. hujus Exercit. IM + IK æquari ipsi IL. Ergo IM æquatur IL − IK. Est autem in hoc casu DG recta, ut ibidem ostensum est.

Sit secundò ABC, eique similis DKG Parabolica secundi generis, in qua verbi gratiâ cubi abscissarum DI, DF sunt ut ordinatæ IK, FG. Sitque linea DLG talis ut semper IM æquetur IL — IK.

Ostendendum est lineam DLG esse Parabolicam alicujus generis.

Cùm IM æquetur IL — IK, IM + IK æquatur IL. Et IK est ad IL ut IK ad IM + IK sive ut DI, ad DF. (*de Cissoid. prop.* 11.)

Hoc posito. Jam eodem modo iisdémque verbis demonstrationem absolvere potes, ut factum est antè in Scholio prop. 10. pro Conchoid.

Et cognoscetur cujus gradûs sit Parabolica curva DLG, utendo Regula quam ibidem tradidimus. Erit enim DLG Parabola cujus vertex D, tangens DF, ordinatæ IL, FG. Exponénsque ordinatarum erit idem qui ordinatarum Parabolæ ABC vel DKG, exponens autem abscissarum erit differentia inter exponentes ordinatarum & abscissarum ejusdem Parabolæ ABC vel DKG.

PROPOSITIO XIII.

Conchois genita ex Parabola Polo in axe constituto, Basi autem parallelâ axi.

Esto (*fig.* 10.) Parabola ABC cujus vertex C, axis AC BE parallela axi BC, & sumpto in axe quocunque puncto A. Polo A, ex Parabola BC, Basi BE, genita sit Conchois DK.

Dico DK curvam talem esse ut ejus ordinatæ æquales sint ordinatis Parabolæ genitricis † ordinatis segmenti Hyperbolæ determinati.

DEMONSTRATIO.

SIt Parabola BDE similis & æqualis similitérque posita Parabola ABC. Junguntúrque BC, DE, & sumpto inter B, D quocunque puncto F, per illud agatur FK parallela BE, occurrens in G rectæ DE, in H Parabolæ DHE, & in K Conchoidi DK. linea DI intelligatur talis ut semper AB, BF sit ut FI, FH.

Quoniam ut AB ad BF ita ex hypothesi est tota FI ad totam FH; & ut AB ad BF sive BD ad BF, ita est etiam ablata FG ad ablatam GH *Archim. 4. de quadrat. Parabolæ*) erit ut AB ad BF, ita reliqua GI ad reliquam FG. Ergo punctum I est ad Conchoidem ex recta BC descriptam Polo A, Basi BE (*de Conchoid. 4.*) hujusmodi autem Conchois est Hyperbola transiens per D, cujus centrum B, asymptoti BE, BL, productâ CB in L. (*prop. 3. hujus Exercit.*) Ergo omnia puncta I lineæ DI sunt ad eamdem Hyperbolam. Et figura FDI est segmentum seu Trilineum Hyperbolicum. Jam verò quoniam ex hyp. DK est Conchois genita Polo A, Basi BE, ex Parabola ABC, cui similis & æqualis est BDE similitérque pósita, AB, BF :: KH, FH. Sed AB, BF :: FI, FH (*hyp.*) ergo KH, FI æquales sunt, æquatur autem FK, FH † HK. ergo eadem FK ordinata Conchoidis DK æquatur FH ordinatæ, Parabolæ DHE † FI ordinatæ Trilinei Hyperb. FDI. Quod erat demonstr.

Corollarium. Hinc constat hujusmodi Conchoidem etiam quadrari datâ Hyperbolæ quadraturâ.

PROPOSITIO XIV.

Cissois Cognata Conchoidi præcedenti.

ESto (*fig.* 11.) Parabola ABC cujus vertex C, axis AC, ordinata AB, BEM axi AC parallela. Polo A quocunque axis puncto, ex Parabola BC, basi BM generetur Cissois AK.

Dico AK curvam talem esse, ut ejus ordinatæ æquales sint ordinatis segmenti Hyperbolici determinati — ordinatis in segmento Parabolico.

DEMONSTRATIO.

SIt Parabola BDE similis & æqualis, sed subcontrariè posita Parabolæ ABC, junguntúrque BC, DE, & sumpto inter B, D quocunque puncto F, per illud agatur FK parallela BE, occurrens in G rectæ DE, in H Parabolæ DHE, & in K Conchoidi AK. Sit etiam ex recta BC, Polo A, Basi BM genita Cissois AI. Quæ erit Hyperbola (ut probatum est antè in prop. 4. hujus Exercitationis.) Occurrat autem in I rectæ FK.

Erit ergo AF, FB :: IF, FG (*prop.* 11. *de Cissoid.*) cùm Triangulum DBE sit simile & æquale & subcontrariè positum Triangulo ABC, ergo componendo AB, BF :: IG, FG.

Rursus quoniam AK est Cissois genita ex Parabola ABC, cui similis æqualis & subcontraria est DHE; KF, FH :: AF, FB; (*prop.* 11. *de Cissoid.*) & componendo AB, BF :: KH, FH.

Quoniam igitur ut AB, ad BF ita est tota KH ad totam FH, & ablata IG ad ablatam FG, etiam ut AB ad BF erit reliqua IK † GH ad reliquam GH. Ut autem AB ad BF ita est etiam FG ad GH (*Archim.* 4. *de Parabol.*) ergo IK † GH, GH :: FG, GH. Quare IK † GH & FG æquales sunt. Et additâ communi IF, KF † GH æquantur IG. Ergo KF ordinata Cissoidis AK æquatur IG ordinatæ in segmento seu trilineo Hyperbolico AGI — GH ordinatæ in segmento Parabolico DHE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc constat hujusmodi Cissoidem etiam quadrari datâ Hyperbolæ quadraturâ.

DE CONCHOIDIBUS ET CISSOIDIbus Hyperbolicis.

PROPOSITIO XV.

Conchois genita ex Hyperbola, Polo in curva constituto, Basi autem asymptoto.

ESto (*fig.* 12.) Hyperbola AB cujus centrum C, asymptoti CD, CE, & in ea sumpto quovis puncto A, Polo A, basi ipsa asymptoto CE, genita sit ex Hyperbola AB Conchois FG.

Dico FG esse aliam Hyperbolam transeuntem per Polum A, & habentem pro asymptoto ipsam CD.

DEMONSTRATIO.

EX A ducatur AD parallela CE, & AH parallela CD. Sumptâque CL æquali CD, & per L ductâ LM parallelâ CE. Centro L, asymptotis LC, LM descripta sit Hyperbola HK similis & æqualis similiterque posita Hyperbolæ AB. Sumpto verò quocunque puncto O inter CL, ducatur OG parallela CE, occurrens in G Conchoidi FG, in K Hyperbolæ HK, & in N rectæ AH productæ in P ubi secat LM.

Quoniam ex hypoth. FG est Conchois genita ex Hyperbola AB cujus axis AH, & cui similis & æqualis est Hyperbola HK. AH, HN :: GK, KN. (*de Conchoid.* 4.) & componendo AN, HN :: GN, KN.

Jam ex natura Hyperbolæ HK cujus centrum L, asymptoti LC, LM. LC, LO :: OK, CH sive PH, PN :: KO, ON, & dividendo HN, NP :: KN, NO.

Cùm ergo sit AN, HN :: GN, KN. Et HN, NP :: KN, NO. Ex æquo AN, NP :: GN, NO. Et componendo AP, PN sive DL, LO :: GO, ON sive GO, DA.

Punctum ergo G est ad Hyperbolam cujus centrum L asymptoti LD, LM, descriptam per A. Idem ostendetur de aliis punctis Conchoidis FG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Cissois Cognata præcedenti non est Hyperbola, sed linea recta.

ESto (*fig.* 13.) Hyperbola AB, cujus centrum C asymptoti CD, CE. Polo A puncto aliquo Hyperbolæ, basi CE asymptoto genita sit aliqua Cissois.

Dico illam esse lineam rectam, alteri asymptoto CD parallelam.

DEMONSTRATIO.

EX A ducatur ad CE recta AF asymptoto CD parallela, & in CE sumatur FG æqualis CF, atque per G ducatur GI parallela CD.

Dico GI esse Cissoidem Polo A, basi CE, genitam ex hyperbola AB.

Ducatur enim per A quæcunque DE, occurrens asymptotis in D, E, Hyperbolæ AB in B, & rectæ GI in H. Quoniam CF, FG æquales sunt (*hyp*) etiam AD. AH sunt æquales. Atqui ex proprietate Hyperbolæ AB, duæ AD, BE sunt etiam æquales; ergo AH, BE æquales sunt, quare additâ communi HB, etiam AB, HE, æquales sunt. Ergo punctum H est ad Cissoidem genitam Polo A, basi CE ex Hyperbola AB. Idem autem ostendetur de omnibus aliis punctis rectæ GI. Ergo GI Cissois est ex Hyperbola AB, Polo A, basi FE. Quod erat demonstrandum.

PROPO-

PROPOSITIO XVII.

Conchois genita ex Hyperbola, Polo in curva constituto, basi autem parallela uni asymptoto in certo casu est altera asymptotus, in aliis Hyperbola.

SIt Hyperbola AB cujus centrum C (*fig.* 13.) & ductâ AF parallelâ asymptoto CD, sumptáque FG æquali CF, per G ducta sit GI parallela eidem CD. Atque Polo A, basi GI ex Hyperbola AB generetur Conchois.

Dico illam esse alteram asymptotum CE.

DEMONSTRATIO.

PAtet ex præcedenti, ibi enim ostensum est ductâ quâcunque AE, esse AB æqualem HE. Ergo punctum E est ad Conchoidem Polo A, basi GI, genitam ex Hyperbola AB. Idem ostendetur de aliis punctis. Ergo &c.

SIt jam secundò (*fig.* 14.) Hyperbola AB, cujus centrum C, asymptoti CD, CE & sumpto in curva AB quocunque puncto F, atque ex illo ductâ GF parallelâ CE quæ occurrat CD in G. Sit GH æqualis GC.

Sumatur jam in GD asymptoto infinita aliud punctum quodcunque K extra H, per quod ducatur KL parallela CE. Et intelligatur Polo F, basi KL, ex curva Hyperbolica FB generari Conchois O *o*, ductâ nimirùm ex F ad quodcunque hyperbolæ punctum M rectâ FM quæ occurrat KL in N, & sumptâ NO æquali ipsi FM.

Dico Conchoidem O *o* esse Hyperbolam.

DEMONSTRATIO.

SUper KL intelligatur constituta Hyperbola ST similis & æqualis similiterque posita Hyperbolæ FB, ac proinde cujus centrum R tantumdem distet à K, quantùm C centrum Hyperbolæ FB distat à G. Per R ducatur XZ parallela CE; juncta etiam FS producatur in V.

Sumpto jam in Conchoide O *o* quocunque puncto O per illud ducatur OV parallela CE, occurrens rectæ CD in D, & hyperbolæ ST in T, & rectæ FV in V.

Quoniam O *o* (*Hyp.*) est Conchois Hyperbolæ FB & super basi KL constituta est Hyperbola ST similis similiterque posita genitrici FB, est FS, SV (4. *de Conchoid.*) sive GK, KD : : OT, TV. Atqui KD, KR : : TV, DT ex natura hyperbolæ ST (est enim KS sive DV, DT : : RD, RK. Ergo dividendo DK, KR : : TV, DT.)

Cùm igitur sit GK, KD : : OT, TV. Et KD, KR : : TV, DT. Ex æquo GK, KR : : OT, DT. Similiter ostendetur esse GK, KR : : *ot*, *dt*. Ergo OD, DT : : *od*, *dt*. Et permutando OD, *od* : : DT *dt*. Est autem DT, *dt* : : R*d*, RD ex natura hyperbolæ NT cujus centrum R, asymptoti RD, RZ. Ergo OD, *od* : : R*d*, RD. Ac proinde O*o* Conchois est Hyperbola cujus centrum R, asymptoti RD, RX. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Conchois ex Hyperbola, Polo in centro Hyperbolæ, basi autem parallelâ asymptoto.

ESto (*fig.* 15.) Hyperbola AB cujus centrum C, asymptoti CD, CE. Et DF parallela CE. Polo C, basi DF genita sit Conchois GH.

Dico Conchoidem GH esse curvam cujus ordinatæ æquantur ordinatis Hyperbolæ genitricis † ordinatis hyperbolæ secundi generis.

DEMONSTRATIO.

SUper DF sit DIKLF Hyperbola similis & æqualis similiterque posita hyperbolæ CDBAE, sit autem & KN curva talis ut DI, DM : : MN, ML.

Ex hyp. DI, DM : : MN, ML. Sed DI, DM : : ML, KI, ex proprietate hyperb. KL. Ergo MN, ML : : ML, IK quare MN, IK : : quadr. ML, quadr. IK. Sive quadr. DI. quad. DM. Igitur curva KN est hyperb. secundi generis in qua ordinatæ MN, IK sunt ut quadrata abscissarum DI, DM reciprocè. Jam quoniam GH (*hyp.*) Conchois est Hyperbolæ AB, cui similis est KL, HL, ML : : CD, DM. Sed CD, DM vel DI, DM : : MN, ML ut dictum est. Ergo HL, ML : : MN, ML. Quare HL æquatur MN. Ergo MH ordinata Conchoidis GH æquatur ML ordinatæ Hyperbolæ KL similis & æqualis genitrici AB † MN ordinatæ hyperbolæ KN secundi generis. Quod erat demonstrandum.

Corollar. Hinc tales Conchoides quadrantur datâ Hyperbolæ communis quadraturâ, nam Hyperbolarum secundi generis quadratura habetur.

PROPOSITIO XIX.

Conchois ex Hyperbola secundi generis.

SIt (*fig.* 15.) Hyperbola AB non communis & primi generis sed secundi, & cætera ponantur ut in propos. præced.

Dico Conchoidem GH esse talem ut ejus ordinatæ MH æquentur ordinatis ML Hyperbolæ KL similis genitrici † MN ordinatis KN Hyperbolæ alterius secundi generis.

DEMONSTRATIO.

SIt verbi gratia AB ac proinde KL talis Hyperbola ut ordinatæ ML, IK sint ut quadrata abscissarum DI, DM.

Positâ rursus KN tali ut DI, DM :: MN, ML. Ostendetur facilè KN esse Hyperbolicam.

Nam MN, IK ratio componitur ex MN, ML (sive DI, DM) & ML, IK (sive quadr. DI ad quadr. DM.) Ergo MN, IK ratio est triplicata rationis DI, DM, sive MN est ad IK ut cubus DI ad cubum DM. Est ergo KN una ex Hyperbolicis.

Sit jam KL alia Hyperbola in qua nimirum quadrata ML, IK sint ut abscissæ DI, DM. Sitque rursus KN talis ut MN, ML :: DI, DM. Ostendetur KN esse Hyperbolicam.

Nam quadrati MN ad quadratum IK ratio componitur ex ratione quadr. MN ad quadr. ML (sive quadrati DI ad quadr. DM) & quadrati ML ad quadr. IK (sive DI, DM.) Ergo quadr. MN est ad quad. IK in triplicata ratione DI, DM, sive ut cubus DI ad cubum DM. Ergo KN Hyperbolica est.

Ut autem statim cognoscas cujus gradûs sit Hyperbola KN hanc accipe Regulam.

Hyperbola KN *talis est ut exponens potestatis ordinatarum* MN, IK *sit idem cum exponente potestatis ordinatarum* ML, IK *Hyperbola proposita, exponens autem potestatis abscißarum* DI, DM *sit aggregatum exponentium potestatis ordinatarum & abscissarum in eadem Hyperbola* KL.

Hoc autem semel ostenso facilis est jam demonstratio propositionis. Quoniam enim (*hyp.*) GH est Conchois Hyperbolæ BA, Polo C, basi DF. atque Hyperbolæ BA similis, æqualis & similiter posita est KL, HL est ad LM ut CD ad DM (*de Conchoid.* 4.) hoc est ut DI ad DM, hoc est (*hyp.*) ut MN ad ML. Ergo HL & MN sunt æquales, ac proinde MH æquatur ML ordinatæ Hyperbolæ KL similis genitrici BA † MN ordinatæ Hyperbolæ KN quam esse Hyperbolam secundi generis ostensum est. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc Conchoidum hujusmodi quæ generantur ex Hyperbolis secundi generis habetur quadratura. Summa enim ordinatarum ML, MN quadratur (cùm KL, KN sint Hyperbolæ secundi generis, ergo utrique summæ æqualis summa ordinatarum MH in Conchoide GH pariter quadratur.

PROPOSITIO XX.

Cissois Cognata Conchoidi de qua agitur in prop. 18. *præcedenti.*

ESto (*fig.* 16.) Hyperbola AB cujus centrum C, asymptoti CD, CE, & BDF parallela CE. Polo C basi DB genita sit Cissois GH.

Dico Cissoidem GH esse curvam cujus ordinatæ æquantur ordinatis Hyperbolæ secundi generis — ordinatis Hyperbolæ similis genitrici.

DEMONSTRATIO.

SIt Hyperbola KL similis & æqualis genitrici AB sed subcontariè posita, ejúsque centrum sit D, asymptoti DI vel DC & DF. Sit autem & KN curva talis ut ductâ quâcunque ordinatâ MN sit DI, DM :: MN, ML. Occurrat autem MN Cissoidi GH in H.

Ratio MN, IK componitur ex rationibus MN, ML (sive DI, DM) & ML, IK sive iterum DI, DM (propter Hyperbolam KL.) Ergo ratio MN, IK duplicata est rationis DI, DM, sive MN est ad IK ut quadratum DI ad quadr. DM reciprocè. Quare KN est Hyperbola secundi generis. Hoc posito facilè absolvetur demonstratio hoc modo. Quoniam GH est Cissois hyperbolæ AB, cui similis & subcontraria est KL. CM, MD :: HM, ML (*de Cissoid. prop.* 11.) & componendo CD, MD :: HL, ML. Sed CD, MD sive DI, DM :: MN, ML ex natura curvæ KL. Ergo HL, ML :: MN, ML. Unde HL & MN sunt æquales. Ergo HM ordinata Cissoidis GH, æquatur MN ordinatæ Hyperbolæ KN secundi generis — ML ordinatæ Hyperbolæ KL æqualis & similis genitrici AB. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hujusmodi ergo Cissoides quadrantur datâ Hyperbolæ communis quadraturâ.

PROPO-

PROPOSITIO XXI.

Cissois Cognata Conchoidi, de qua agitur in prop. 19. præcedenti.

SIt (*fig.* 16.) Hyperbola AB non communis sed secundi generis, & cætera ponantur ut in prop. 20. proximè antecedenti.

Dico Cissoidem GH esse talem ut ejus ordinatæ æquentur ordinatis MN Hyperbolæ secundi generis — ML ordinatis hyperbolæ KL similis genitrici AB.

DEMONSTRATIO.

SIt verbi gratia AB ac proinde KL talis Hyperbola ut ordinatæ ML, IK sint inter se ut quadrata abscissarum DI, DM reciprocè. Sitque KN talis ut DI, DM : : MN, ML. Ostendetur primò KN esse Hyperbolam secundi generis.

Nam MN, IK ratio compon. ex MN, ML (sive DI, DM) & ML., IK [sive quad. DI, quad. DM.) Ergo ratio MN, IK triplicata est rationis DI, DM. Sive MN est ad IK ut cubus DI ad cubum DM, est ergo KN una ex Hyperbolicis.

Quo posito facilè ostendetur propositio, nam HL, ML : : DI, DM (*de Cissoid.* 11.) : : MN, ML. ergo HL æquatur MN & HM est MN — ML.

Similiter ostendetur propositio quæcunque alia Hyperbola supponatur AB. Quod erat demonstrandum.

Porrò ut habeatur gradus Hyperbolæ KN, utendum est Regula quam tradidimus in prop. 19.

DE CONCHOIDIBUS ET CISSOIDIBUS genitis ex Figuris Homogeneis.

D*Efinitio.* Figuræ Homogeneæ dicantur illæ quæ axem eumdem habent. & ordinatas proportionales. Ita (*fig.* 17.) si figuræ ABC, ABD sint tales ut & axem eumdem habeant AB & ductis quibuscunque ordinatis ACD, EFG sit semper AC, AD : : EF, EG vel permutando AC, EF : : AD, EG. Figuræ ABC, ABD dicuntur Homogeneæ.

PROPOSITIO XXII.

Homogenearum Figurarum Analogia.

SI habeatur unius Figuræ Homogeneæ ABC quadratura; Rotundum circa axem, Rotundum circa basin, centrum gravitatis, & tangens.

Dico hæc eadem in altera Homogenea haberi.

DEMONSTRATIO.

HÆc jam à multis aliis demonstrata sic breviter ostenduntur.

1. SI habeatur quadratura figuræ ABC, habetur & quadratura figuræ Homogeneæ ABD.

Est enim (*hyp.*) perpetuò AC, AD :: EF, EG. Ergo ex methodo indivisibilium figura ABC est ad figuram ABD ut AC, ad AD.

2. SI habeatur Rotundum ex ABC circa axem AB, habetur Rotundum ex ABD circa eumdem axem AB.

Cùm enim sit semper AC, AD :: EF, EG. Circulus radii AC est ad circulum radii AD ut circulus radii EF ad circulum radii EG. Ergo ex methodo indivis. summa circulorum ex radiis AC, EF hoc est Rotundum ex ABC circa AB est ad summam circulorum ex radiis AD, EG sive ad Rotundum ex ABD circa AB ut circulus radii AC ad circulum radii AD. sive ut quadratum AC ad quadratum AD.

3. SI habeatur Rotundum ex ABC circa basin AC, habetur Rotundum ex ABD circa AD basin.

Dum enim volvuntur ABC, ABD circa bases AC, AD, singulæ ordinatæ EF, EG describunt superficies Cylindricas quæ sunt inter se ut ordinatæ ipsæ EF, EG. (Sunt enim ut rectangula AEF, AEG.) Ergo summæ illarum superficierum sive Rotunda sunt inter se ut una ordinata AC ad alteram AD.

4. SI habetur centrum gravitatis figuræ ABC, habetur & figuræ ABD.

Est enim Rotundum ex ABC circa AB ad Rotundum ex ABD *circa*

AB in ratione compos. figurarum ABC, ABD & viarum rotationis sive distantiarum centrorum grav. ab axe revolutionis AB (*Tacquet. lib. 5. Cylindric. & Annularium,*) ratio autem Rotundorum nota est, eadem nempe quæ qurdratorum AC, AD (*num.* 2.) ergo illi æqualis ratio composita nota est. Est autem nota ratio figurarum ABC, ABD. Eadem nempe quæ AC, AD. Ergo & nota est ratio distantiarum centrorum ab axe AB, eadem nempe erit etiam quæ AC, AD. Unde si habeatur una distantia nempe centri grav. figuræ ABC, ab axe AB, habetur & alia figuræ ABD.

Similiter ostendetur si habeatur distantia centri grav. figuræ ABC à basi AC, haberi distantiam centri gravit. figuræ ABD à basi AD.

Jam si habetur centrum grav. figuræ ABC habetur ejus distantia tum ab axe AB, tum à basi AC. Ergo habebitur etiam distantia tum ab axe AB tum à basi AD centri grav. figuræ ABD ac proinde ejus centrum gravitatis.

5. DEnique si habeatur tangens in C curvæ BC, habetur tangens in D curvæ BD.

Sit enim AE infinitè exigua, ergo curvæ CF, DG haberi possunt ut particulæ tangentium. Cùm verò sit (*hyp.*) AC, EF :: AD, EG. rectæ CF, DG conveniunt in idem punctum H. Jam si habetur tangens CH, habetur punctum H, ergo & recta DH. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

COnchoides genitæ ex Figuris Homogeneis eodem Polo eadémque basi, sunt etiam Figuræ Homogeneæ.

DEMONSTRATIO.

EX figuris Homogeneis ABC, ABD, (*fig.* 18.) Polo eodem A, eadémque basi GX generentur Conchoides HI, HK. Ostendendum est eas esse Homogeneas.

Super Basi GX sint figuræ similes, æquales, & similiter positæ GHO, GHP figuris ABC, ABD, & ducatur quæcunque LMNIK occurrens in M, N curvis HO, HP, & in I, K Conchoidibus HI, HK.

Ratio LI, LK componitur ex tribus 1. LI, LM; 2. LM, LN 3. LN, LK. Prima autem ratio LI, LM est eadem (*de Conchoid. prop* 4) cum ratione AL, GL, cùm HM sit curva similis BC ex qua genita est Conchois HI. Tertia ratio LN, LK est similiter eadem quæ GL, AL cùm HN sit curva similis BD ex qua genita est Conchois HK. Duæ ergo rationes LI, MM; LN, LK æquales duabus AL, GL: GL, AL se mutuò elidunt. Ergo ratio LI, LK est æqualis secundæ rationi LM, LN. Et hoc perpetuò evenit quæcunque ducatur LK. Est autem eadem semper ratio LM, LN, ubicunque sumatur punctum L inter G, H. Ergo eadem quoque est ratio LI, LK ubicunque sumatur punctum L inter G, H. Igitur figuræ HLI, HLK Homogeneæ sunt. Idem dicendum de figuris integris aut spatiis CHIX, CHKX. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Cissoides genitæ ex Figuris Homogeneis sunt etiam Homogeneæ.

EX figuris Homogeneis ABC, ABD (*fig.* 19.) Polo A, Basi GX, generentur Cissoides HI, HK. Ostendendum est eas esse Homogeneas.

DEMONSTRATIO.

EAdem omninò est quæ propositionis præcedentis, nam super basi XG producta versus G sint figuræ GHO, GHP similes & æquales sed subcontrariè positæ figuris ABC, ABD: tum quæcunque ducatur NK parallela GX, occurrens Cissoidibus in I, K, rectæ GH in L. & in M, N curvis HO, HP.

Ratio LI, LK componitur ex tribus, 1. LI, LM sive (*Cissoid. prop.* 11.) AL, LG. 2. LM, LN. 3. LN, LK (sive LG, LA.) Prima autem & tertia se elidunt. Ergo ratio LI, LK æquatur rationi LM, LN quæ cùm sit semper eadem ex natura figurarum Homogenearum GHO, GHP. Etiam eadem est ratio LI, LK quæcunque ducatur LK. Ac proinde Figuræ HLI, HLK sunt Homogeneæ (*defin.*) idem dicendum de Figuris aut spatiis integris GHIX, GHKX. Quod erat demonstrandum.

DE CONCHOIDIBUS ET CISSOIDIBUS Ellipticis.

PROPOSITIO XXV.

COnchoides Ellipticæ Polum habentes in centro vel in extremo diametri, basin autem axi perpendicularem Homogeneæ sunt Conchoidi Nicomedeæ & Semicirculari.

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

SIt ſemiellipſis BCZ cujus centrum A (*fig.* 18.) & eodem axe BZ ſemicirculus BDZ. Hæ duæ figuræ ſunt Homogeneæ.

Ducantur enim quæcunquæ ordinatæ ACD, RST: Sunt tam quadrata AC, RS, quàm AD, RT, ut Rectangula BAZ, BRZ. Ergo AC, RS :: AD, RT.

Si ergo Polo A, baſi GX ad AB perpendiculari, ex quadrantibus ſemiellipſis & circuli ABC, ABD generentur Conchoides HI, HK. Illæ erunt Homogeneæ (*prop.* 23. *præced.*)

Et ſi Polo Z baſi GX generari intelligantur aliæ duæ Conchoides ex ſemiellipſe BCZ & ſemicirculo BDZ, erunt illæ etiam Homogeneæ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Hinc (*prop.*24.) eodem modo habetur quadratura Conchoidis Ellipticæ HI, & Rotundum tam circa baſin quàm circa axem, & centrum gravitatis & Tangens, quo modo hæc haberi in Conchoide Nicomedea oſtenſum eſt, ubi de illa egimus in Exercit. de Conchoidibus.

Similiter hæc omnia habebuntur in Conchoide ſemielliptica, quomodo haberi demonſtravimus in ſemicirculari ubi de illa egimus.

PROPOSITIO XXVI.

CIſſoides Ellipticæ Polum habentes in centro vel extremo axis, baſin verò axi perpendicularem, Homogeneæ ſunt Ciſſoidibus ex ſemicirculo genitis, eodem Polo, eademque baſi.

DEMONSTRATIO.

SInt (*fig.*19.) ſemiellipſis BCZ, & ſemicirculus BDZ, habentes eumdem axem BZ, & idem centrum A. Polo A baſi GX ex quadrante ellipſis ABC & circuli ABD generentur Ciſſoides HI, HK.

Cùm quadrantes ellipſis & circuli Homogenei ſint ut diximus, etiam Ciſſoides Homogeneæ ſunt.

Idem dicendum de Ciſſoidibus quæ generarentur ex ſemiellipſi BCZ & ſemicirculo BDZ, Polo Z baſi GX.

Corollarium. Quæ igitur in Dioclea haberi oſtenſum eſt circa Quadraturam, Rotunda, Centrum gravitatis & Tangentes ubi de Ciſſoidibus actum eſt, eodem modo habebuntur circa Ciſſoidem Ellipticam Diocleæ Homogeneam.

Quod attinet ad Ciſſoidem quæ generari poteſt ex quadrante circuli ABD, Polo in centro A conſtituto, de illa quidem non egimus ſpecialiter, ſed cum cognata ſit Conchoidi Nicomedeæ eodem Polo eadémque baſi genitæ, ex iis quæ de Conchoidum & Ciſſoidum analogia in universum dicta sunt, facilè colligi potest quæ habentur circa Quadraturam, Rotunda, &c. in Conchoide Nicomedea, haberi etiam in hac Cissoide ipsi cognata. Hæc igitur etiam habebuntur in alia Cissoide Elliptica ipsi Homogenea, genitâ nimirum ex semiquadrante Ellipseos ABC. Polo A, basi GX.

PROPOSITIO XXVII.

De Conchoidibus & Cissoidibus Hyperbolicis Homogeneis.

SInt (*fig.* 20) duæ Hyperbolæ BD, BE habentes eumdem axem transversum AB, verticem B, tangentem BX.

Dico Conchoides & Cissoides genitas ex his Hyperbolis Polo eodem ut A, basique eadem ut BX esse Homogeneas.

DEMONSTRATIO.

HOc constat ex prop. 23. & 24. præc. si Hyperbolæ BD, BE, Homogeneæ sint. Has autem esse Homogeneas facilè ostendetur.

Ducantur enim quæcunque ordinatæ CDE, FGH occurrentes Hyperbolis in D, E. G, H.

Tam quadrata CD, FG, quàm quadrata CE, FH sunt inter se ut Rectangula ACB, AFB, ex proprietate Hyperbolæ, ergo quadrata CD, FG, & CE, FH sunt proportionalia, quare CD, FG :: CE, FH. Et permutando CD, CE :: FG, FH. Segmenta igitur BCD, BCE Homogenea sunt. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Supponatur BE esse Hyperbolam circularem sive cujus axes æquales sunt. Ostensum est in Exerc. de Conchoid. parte 4. Quomodo in Conchoide genita ex illa Hyperbola Polo A, basi BX, habeantur Dimensio, Rotunda, Centrum gravitatis &c. Eadem igitur eodem modo habebuntur in Conchoidibus aliis omnibus genitis ex quacunque Hyperbola BD eumdem axem BC habente.

DE CONCHOIDUM CONCHOIDIBUS & Cissoidum Cissoidibus.

PROPOSITIO XXVIII.

COnchoides Conchoidum eodem Polo eademque basi genitæ quo prima Conchois, sunt Conchoides ipsius figuræ genitricis primæ Conchoidis.

DEMONSTRATIO.

SIt (*fig.* 21.) figura ABC, ex qua Polo A, basi DX generetur Conchois GH; Polo autem eodem A, basique eadem DX, ex Conchoide GH generetur alia Conchois IK. Ostendendum est IK esse Conchoidem genitam ex figura ABC genitrice primæ Conchoidis GH. Sumatur DL æqualis AD. Et ducatur LQ parallela DX. Ducatur item quæcunque AK occurrens in N, O, P, Q, lineis BC, DX, GH, LQ.

Quoniam AD, DL sunt æquales (*hyp.*) etiam AO, OQ æquales sunt. Sunt autem & AP, OK æquales, eò quod IK sit Conchois genita ex GH, Polo A, basi DX. Ergo subtractis AO, OQ æqualibus ex AP, OK item æqualibus, remanent æquales OP, QK. Est autem OP æqualis AN eò quod GH sit (*hyp.*) Conchois genita ex BC, Polo A, basi DX. Ergo QK æquatur etiam ipsi AN. Quare cùm hoc semper eveniat quæcunque ducatur AK, manifestum est IK esse Conchoidem genitam ex BC, Polo A, basi LQ. Quod erat ostendendum.

Similiter si ex secunda Conchoide IK generaretur tertia RS, Polo eodem A, eadémque basi DX, ostendetur RS esse Conchoidem genitam ex figura genitrice ABC.

Sumptâ enim LT æquali ipsis AD, DL, & ductâ TV parallelâ DX quæ occurrat rectæ AKS in V. Quoniam AL, DT æquantur, etiam æquantur AQ, OV. Sed AK, OS etiam æquantur (cùm RS sit Conchois ex IK, basi DX, Polo A) ergo subtractis AQ, OV ex AK, OS, remanet VS æqualis QK siue ut antè probatum est ipsi AN. Quare RS est Conchois ex BC. Polo A, basi TV.

Similiter si ex tertia Conchoide generetur quarta & ex quarta quinta & sic in infinitum, ostendetur omnes has Conchoidum Conchoides in infinitum esse Conchoides genitas ex figura genitrice primæ Conchoidis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Cissois Cissoidis est ipsamet linea genitrix prima Cissoidis.

DEMONSTRATIO.

SIt (*fig.* 22.) Cissois DE genita ex linea BC, Polo A, basi FG. Ostendendum est ipsam BC esse Cissoidem suæ Cissoidis DE, genitam Polo A, basi FG.

Ducatur quæcunqee AK occurrens DE, BC, in H, I, & basi FG in K. Quoniam DE Cissois est ipsius BC basi FG, AI æquatur KH, ergo additâ vel sublatâ HI, AH æquatur KI. Ergo BC est Cissois ex DE. Polo A, basi FG. Quod erat demonstrandum.

FINIS.