Google

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

Digitized by Google

<36603792230010
<36603792230010
Bayer. Staatsbibliothek
Digitized by Google

248

Digitized by Google

<36602779460019

<36602779460019

Bayer. Staatsbibliothek

Digitized by Google

Phu. 569-2

Philos. Instit. 437.

R.

Digitized by Google

INTERPRETATIO NATURÆ,

SEU

PHILOSOPHIA

NEWTONIANA METHODO

EXPOSITA,

ad Conv. [illegible] O. Erm. S. Aug. 1792

ET

ACADEMICIS USIBUS

ADCOMMODATA

A

JACOBO ZALLINGER

PHILOSOPHIÆ ANTEA PROFESSORE
ET SS. THEOLOGIÆ DOCTORE.

TOMUS II.

COMPLECTENS
PRINCIPIA MECHANICÆ TERRESTRIS
ET CÆLESTIS.

PERMISSU SUPERIORUM.

AUGUSTÆ VINDELICORUM
SUMPTIBUS JOSEPHI WOLFF
M DCC LXXIV.

Digitized by Google

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MÜNCHEN

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

PRÆFATIO.

Duo sunt, quæ Newtonianæ rationi philosophandi vitio dari, non aliorum narratione accepi, sed cum eandem sequerer ipse, ex reprehendentium ore hausi. Primum est: qui Newtonum sequuntur philosophiæ ducem, in solis fere naturæ legibus observando atque experiundo cognitis conquiescunt, de remotissimis caussis rerum, de corporum elementis, de natura virium, & generali earum theoria, ad

 quam

Digitized by Google

quam omnia naturæ effecta referri debeant, nihil magnopere definiunt, ac ne statuunt quidem adfirmate, eæne vires ad unicam simplicemque legem pertineant, ex interna natura materiæ, an Dei actione, vel principio quodam latente dimanent; atqui, aiunt, id proprium philosophiæ, & velut legitimum est, de rerum caussis disceptare. Alterum vero est: ea methodus, quæ Newtoniana dicitur, tota in analyticis formulis construendis hæret, & sublimioris etiam Geometriæ mysteriis tractandis, ut universa propemodum Physica Matheseos dominatui subiiciatur; quæ res admodum aspera est, & perdifficilis, captuque discentium & ingenio haud parum superior. De utroque accusationis genere, quoniam præsenti instituto meo obesse videtur, præfari me oportere censui.

Quæ de caussis rerum iis, quas synthetico ordine primas, analytico

ul-

Digitized by Google

ultimas, & remotissimas dicimus, statui ab homine veritatis, quam litium amantiore queunt, ea neque ratio Newtoniana repudiat, neque ego, cum tempestiva videbitur ea tractatio, penitus prætermittam. At enim ex metaphysicis contemplationibus de corporum natura ferre sententiam, ex arbitrariis notionibus, & vocabulorum farragine de occultissimis caussis disputare, ab ipso Physices limine in intimas velle naturas penetrare, secundum congeriem idearum, quæ temere collectæ sunt, & generalis theoriæ vel systematis nomine passim insigniuntur, omnia naturæ arcana explicare, maximamque curam in conciliandis cum assumta theoria phœnomenis collocare, ut, quæ dissentire videntur, ea leviter prætereantur, vel ut quævis tractatio ad obscurissimas de illa altercationes revolvatur; id vero nec progressibus pulcherrimæ disciplinæ conducibile, nec perficiendæ *diſcentium menti, optimisque cognitionibus imbuendæ idoneum, nec philoſophiæ in humana vita uſui, rerumque publicarum, vel artium commodis ullo pacto neceſſarium, vel adcommodatum eſſe arbitror. Quid enim voluptatis, quid ingenuæ eruditionis, quid emolumenti habet philoſophia, quæ ex incertiſſimis de natura virium, primorumque elementorum diſputationibus prope tota compacta eſt, de qua, cum pedem extuleris ex inſtitutione, in cætu doctorum hominum ne verbum quidem facere poſſis. Newtoniana igitur ratio philoſophandi aliis aliorum generibus ſine dubio longe præferenda eſt, quæ obſervationum ſolertia, adcurationeque, & matheſeos ope naturam rerum a divino Artifice conditam, non humano adumbratam ingenio vere fideliterque interpretari conatur, mentemque certiſſimis, & fœcundiſſimis cognitionibus exornat, atque ad veritatem recta*

me-

Digitized by Google

methodo investigandam tum in usu humanæ vitæ, tum in aliis disciplinis informat; ut adeo Philosophus, si nominis dignitatem sustinet, non nisi interpres naturæ, nec aliud Philosophia, nisi interpretatio naturæ sit. Atque hic quidem scribenti mihi de rebus physicis propositus scopus fuit; eritque penes Benevolum Lectorem dispicere, quatenus eundem in amplissimo, & perdifficili argumento adsequutus sim. Eundem certe in finem veluti clave quadam genuinæ interpretationis Geomotriæ & Algebræ elementis sæpenumero usus sum; quæ res, uti reprehensionis apud nonnullos, ita præfationis meæ alterum caput est.

Divinæ matheseos præstantissimum esse in philosophia excolenda usum, summi quique, & doctissimi nostræ ætatis viri re ac verbo docuerunt; nec vero, qui Newtonianæ rationi adversantur, totum hoc reprehendunt

Digitized by Google

mathematice philosophari, si modo remissius id agatur, atque, ut aiunt, adcommodate ad discentium ingenia; sed tantum studium, tamque multam operam, quantam a quibusdam poni in ea re sibi persuadent, ponendam esse haud arbitrantur. Atque isti quidem, quibus ita placet, mathesin ad naturæ interpretationem adhibere, ut id moderate fiat, difficilem quandam temperantiam postulant in eo, quod semel admissum coerceri, reprimique vix potest, ut propemodum iustioribus utamur illis, qui omnino avocant a mathesi, & historiam quandam philosophiæ, ac philosophorum petunt, quam iis, qui infinitis rebus modum constituunt, in reque eo meliore, quo maior est, mediocritatem desiderant. Quibus ego primum respondeo, non esse in meo, nec cuiusvis philosophantium arbitrio positum, si verum sectari, naturamque explicare velimus, arripiendi viam, seu methodum, quam

quis-

Digitized by Google

quisque maxime optarit; cum enim divinus Conditor res corporeas certis veluti numeris, menſuris, proportionibus, & virium rationibus adſtrinxerit, ſiquis eas res cognoſcere ex nobis avet, matheſeos uſu, adplicationeque ſuperſedere minime poſſumus.
„ *In Geometriæ adita quædam, in-*
„ *quit Krafftius P. II. Prælectio-*
„ *num Academic. in Præf. me ſub-*
„ *inde penetraſſe, moleſtum erit ne-*
„ *mini, niſi illis forſitan, qui ne-*
„ *gligunt ſapientiſſimum illud effa-*
„ *tum:* Pondere, menſura, nu-
„ mero Deus omnia fecit; *qui oc-*
„ *culta naturæ artificia, & non cre-*
„ *dibilem diligentiam, venuſtatemque*
„ *negligunt, quique adeo phyſicam*
„ *fractam, & elumbem oſcitanter co-*
„ *lere, quam circino, & regulæ ad-*
„ *ſuefacere ſe, malunt, excidentes*
„ *ſic fine ſalutari, qui eſt, ut in*
„ *ſummo naturæ artificio detegamus,*
„ *& veneremur ſummum artificem,*

5 &

*„ & rebus a tanto fabricatore decir-
„ cinatis delectemur innocenter. „ Si-
quid igitur de Mechanica terrestri, quæ leges motuum in terrestribus corporibus, & generatim examinat, siquid de Mechanica cœlesti, quæ easdem in cælestibus corporibus investigat, paullo adcuratius differendum est, si theoria gravitatis universalis, verbo, si Physica Newtoniana explicanda est, elementorum Algebræ, & Geometriæ usus eripi nobis haud potest, nec sane debet; quæ est enim in iis rebus perdiscendis tanta difficultas, ut ab adolescentibus, qui ingenium & industriam, ut par est, ad philosophiam adferunt, superari haud possit. Ignavia autem nonnullorum, aut hebetudo mentis progressibus aliorum, quos natura, ac solertia scientiis tractandis addixit, fraudi esse haud debet. Nulla est paullo longior, aut difficilior demonstratio in tota scriptione hac, quæ non pluribus locis*

Digitized by Google

& temporibus a me proposita, & adcurate percepta fuit ab iis, qui prælectionibus meis audiendis operam, quam oportebat, navarunt; cuius rei specimen in exercitationibus publicis cum admiratione plausuque spectantium dederunt. Et vero si rationem, ac viam, quam in diducendis principiis utriusque Mechanicæ tenui, relegam animo, vereor sane, ne in usu elementorum matheseos aliis modum excessisse, aliis ne attigisse quidem videar, eodemque tempore & de intemperantia quadam mathematica, & de nimia parcitate accuser. Quis omnium doctorum hominum iudiciis ac desideriis faciet satis? Quapropter cum pluribus annis in exponendis Philosophiæ institutionibus essem versatus, experientiæ potissimum subsidio definire adlaboravi, quatenus in ea re progredi liceret. Vale, Benigne Lector, & conatus nostros æqui boni consule.

Digitized by Google

SERIES TRACTATIONUM

TOMI II.

SECTIO I. INTRODUCTIO AD MECHANICAM.

SECTIO II. DE MOTU CORPORUM RECTILINEO.

SECTIO III. DE CONTRARIIS ACTIONIBUS VIRIUM IN CORPORIBUS SOLIDIS.

C. III.

Digitized by Google

SECTIO IV. DE PRESSIONE, ÆQUILIBRIO, ET RESISTENTIA FLUIDORUM.

SECTIO V. DE MOTU CORPORUM CURVILINEO.

SECTIO VI. DE ANALYTICA INVESTIGATIONE GRAVITATIS UNIVERSALIS.

SE-

Digitized by Google

SECTIO VII. DE SYNTHETICA DIDUCTIONE GRAVITATIS UNIVERSALIS.

PHYSI-

Digitized by Google

PHYSICES
PARS PRIMA.
SECTIO I.
INTRODUCTIO AD MECHANICAM.
CAPUT I.
Regulæ Physicæ Newtonianæ.

Newtonus initio L. III. princip. Math. Phil. Natur. regulas quasdam philosophandi ad Physicam maxime pertinentes præscripsit; quæ si observentur adcurate, uti par est, methodum Newtonianam ab omni alio genere Philosophiæ plurimum distinguunt. Cum igitur magnopere intersit, quam viam quisque in naturæ investigatione primo ingrediatur, ut, si quis primos pressus recte fecerit, ad maximarum rerum cognitionem pervenire possit; idcirco eas regulas totidem pæne verbis, quibus propositæ sunt ab incomparabili viro, recensebimus.

§. I.

Regula I. *Caussæ rerum naturalium non plures*
„ *admitti debent, quam quæ veræ sunt, & earum phæ-*
„ *nomenis explicandis sufficiunt.* Dicunt utique Philoso-
„ phi: Natura nihil agit frustra; & frustra fit per plu-
„ ra, quod fieri potest per pauciora. Natura enim sim-
„ plex est, & rerum caussis superfluis non luxuriat. „

Hæc regula opponitur dicto CARTESII 3. Part. Princip. ita ſcribentis: *ſe velle conſiderare, non quomodo mundus defacto ſit conditus, ſed quomodo condi potuerit.* At Newtonus, cum a Philoſophorum ſomniis, & diſſidiis abhorreret, & divini conditoris opera, non humani ingenii figmenta noſſe vellet, illud primo conſtituit, quæ cauſſæ rerum pro genuinis habendæ, quæ repudiandæ ſint. Cauſſa genuina eſt, quæ & *vera* eſt, & *ſufficiens*, hoc eſt, cuius & exiſtentia realis, & ſufficientia oſtendi poteſt. Exiſtentia rerum corporearum ſolo uſu ſenſuum, & inſtitutis obſervationibus, atque experimentis innoteſcit. Sufficientia cauſſæ ope Matheſeos demonſtranda eſt; cum enim cauſſa, quæ genuina eſt, effectui proportionalis, & effectus cauſſæ eſſe debeat, neceſſe eſt, ut & magnitudo effectuum, & quantitas virium cauſſæ ad calculum revocetur; quod ſine Matheſi, quæ rerum quantitates examinat, fieri nequit.

Recte Newtonus ad Philoſophorum auctoritatem provocat, ut de prima Phyſices lege cum iis quodam modo tranſigat, ſuamque methodum eorundem qui alia omnia ſentiebant, dictis vindicet. Quod non exiſtit, cauſſa eſſe realium phænomenorum plane nequit; quique pro cauſſa habet quidquam, nec id revera exiſtere in natura, iisque phænomenis efficiendis ſufficere docet, Philoſophiam cum vanis commentis miſcet, aut hypotheſes fingit, quarum idea ab idea cauſſæ diligenter ſegreganda eſt ei, qui naturam interpretari, aut contemplari amat. Hypotheſis ſi legitima eſt, non exiſtentiam, & veritatem realem, ſed idealem duntaxat, & ſolam poſſibilitatem exhibet. Et quamvis in particulari caſu, quando ex obſervatione, atque experimentis certitudo, atque evidentia erui nequit, uſus ſit hypotheſium; tamen reiiciendæ ſunt generales hypotheſes, queis tota Phyſica, aut quidem maxima eiusdem pars ceu fundamento nititur; quales ſunt de æthere quaquaverſus diffuſo, omnisque figuræ, actionis, ac motus capaci, de natura primorum elementorum corporum, utcumque tali hypotheſi ſuffragari videatur Metaphyſica, quam ex præconceptis opinionibus, & in favorem Phyſices non nulli condunt. Nam, ut Newtonus L. III. Princip. in Schol. gen. inquit, hypotheſes ſeu metaphyſicæ, ſeu

phy-

physicæ, ſeu qualitatum occultarum, ſeu mechanicæ in Philoſophia elementari locum non habent. Denique & illud conſtat, repudiandas eſſe cauſſas ſuperfluas. Inepte igitur quis dicat, æſtum maris legibus attractionis conformari, ſed pro cauſſa illius etiam ingurgitationes in cavernas terræ, & regurgitationes admitti poſſe. Si enim vera eius phænomeni cauſſa ex principiis obſervando, atque experiundo ſtabilitis deprehenſa eſt, vana eſt, & otioſa quævis alia cauſſa, quia Deus & natura nil faciunt fruſtra, atque, ut VV. Metaphyſici dicebant, entia non ſunt multiplicanda ſine neceſſitate; cuius effati rationem a priori derivarunt ex ſapientia divini conditoris, & ex legibus ordinis, ac finium univerſi, ob quas nihil ſupervacui haberi in natura conſtat.

§. II.

Regula II. „ *Ideoque effectuum naturalium eiusdem* „ *generis eædem adſignandæ ſunt cauſſæ, quatenus fieri* „ *poteſt*, uti reſpirationis in homine, & in beſtia; de- „ ſcenſus lapidum in Europa, & in America; lucis in „ igne culinari, & in ſole; reflexionis lucis in terra, „ & in planetis. „ His quidem exemplis iſtam regulam Newtonus illuſtrat cit. loc. eamque ex priori deducit. Natura admodum ſimplex eſt, & in rebus eiusdem generis, aut ſpeciei efficiendis & conſervandis uniformis, ſibique conſona. Eadem paucis viribus & agendi inſtrumentis inſtructa efficit opera inter ſe magnopere diſcrepantia. Sapienter autem in hac enuncianda regula addidit Newtonus :, *quatenus fieri poteſt*; nam ingenti ſolertia, & acumine opus eſt, ne quavis adparente ſimilitudine effectuum in errorem inducamur; quod non nullis contigiſſe arbitror, qui ſimilitudine, & proportione quadam effectuum, quos lumen, ac ſonus nobis offerunt, utrumque in motu vibrationis cuiusdam materiæ ſitum eſſe voluerunt. Felicis ingenii eſt, in diſſimilibus phœnomenis veram ſimilitudinem invenire, quemadmodum Newtonus inter motum proiectorum in ſuperficie telluris, & inter planetarum motus orbitas ſuas circa ſolem deſcribentium detexit; unde

Digitized by Google

concludendum est vi huius regulæ, utriusque motus eandem statui caussam debere, & quemadmodum planetarum revolutiones per systema vorticum, aut pressionem cuiusdam subtilis materiæ, quæ secundum leges fluidorum adhuc cognitas ageret, minime effici possunt; ita nec terrestrium corporum gravitatem ab eadem materia provenire.

§. III.

Regula III. „ *Qualitates corporum, quæ intendi,* „ *& remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus com-* „ *petunt, in quibus experimenta instituere licet, pro qua-* „ *litatibus corporum universorum habendæ sunt.* Nam „ qualitates corporum non nisi per experimenta inno- „ tescunt, ideoque generales statuendæ sunt, quotquot „ cum experimentis generaliter quadrant; & quæ mi- „ nui non possunt, non possunt aufferri. Certe con- „ tra experimentorum tenorem somnia temere confin- „ genda non sunt, nec a naturæ analogia recedendum „ est, cum ea simplex esse soleat, & sibi semper con- „ sona. - - Corpora omnia impenetrabilia esse, non ra- „ tione, sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impe- „ netrabilia inveniuntur, & inde concludimus, impe- „ netrabilitatem esse proprietatem corporum universo- „ rum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus qui- „ busdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare „ in motu, vel quiete, ex hisce corporum visorum „ proprietatibus colligimus. - - Impenetrabilitas, mo- „ bilitas, & vis inertiæ totius oritur ab impenetrabili- „ tate, mobilitate, & vi inertiæ partium: & inde con- „ cludimus, omnes omnium corporum partes minimas „ - - esse & impenetrabiles, & mobiles, & viribus „ inertiæ præditas. Et hoc est fundamentum Philoso- „ phiæ totius. - - Denique si corpora omnia in cir- „ cuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quanti- „ tate materiæ in singulis, & lunam gravem esse in „ terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare „ nostrum grave esse in lunam, & planetas, omnes „ graves esse in se mutuo, & cometarum similem esse „ gravitatem in solem, per experimenta & observa- „ tiones astronomicas universaliter constet, dicendum „ erit per hanc regulam, quod corpora omnia in se

„ mu-

„ mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum „ ex phœnomenis de gravitate univerſali, quam de „ corporum impenetrabilitate, de qua utique in corpo- „ ribus cæleſtibus nullum experimentum, nullam pror- „ ſus obſervationem habemus. Attamen gravitatem „ corporibus eſſentialem eſſe, minime adfirmo. Per „ vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc im- „ mutabilis eſt; gravitas recedendo a terra minuitur.

Newtonus extenſionem quoque & duritiem non modo omnium corporum, ſed minimarum quoque partium, ex quibus coaleſcunt corpora, generalem eſſe proprietatem concludit, propterea quod omnia corpora, quæ ſub ſenſus cadunt, & extenſa ſint, & dura; ac durities & extenſio totius a partium extenſione, & duritie, uti arbitratur, proveniat; Sed hæc quidem prætermiſi, ne aliorum opinioni videar detrahere, qui elementa corporum non modo ſimplicia, ſed omnis extenſionis penitus expertia ſtatuunt.

§. IV.

Regula IV. „ *In Philoſophia experimentali propoſi-* „ *tiones ex phœnomenis per inductionem collectæ, non ob-* „ *ſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut adcura-* „ *te, aut quam proxime haberi debent, donec alia occur-* „ *rerint phœnomena, per quæ aut adcuratiores reddan-* „ *tur, aut exceptionibus obnoxiæ.* Hoc fieri debet, ne „ argumentum inductionis tollatur per hypotheſes. „ Credebatur olim magnes ex obſervatione acus polos adcurate reſpicere; ſed obſervationes poſteriores directionem acus magneticæ multis variationibus atque adeo eam legem exceptionibus obnoxiam eſſe docuerunt. Aiebant Philoſophi: corporum terreſtrium gravitas quantitati materiæ proportionalis eſt; ſed detecta variatione gravitatis in variis terræ locis addendum ad eam propoſitionem fuit limitatio: in eodem terræ tractu. Sic corpora perpendiculariter ad centrum terræ tendunt; ſed in quibusdam locis ob præaltos montes, ipſamque internam telluris ſtructuram deviationes quædam in pendulis ſunt obſervatæ. Quapropter ſiqua occurrunt diſcrepantia phœnomena, neceſſe eſt, ut generales propoſitiones inductione collectæ aptis exceptionibus, ſeu

Digitized by Google

determinationibus limitentur, ac restringantur; id quod hac lege significandum erat.

Nemo est fere hac ætate, qui hasce leges non probet, & magnopere tenendas putet. At ipso progressu Physices vel æstu quodam inveniendæ veritatis, vel impatientia indagandæ, vel ob sectarum, & auctoritatis præiudicia, proclive est, contra eas peccare, & a recto tramite discedere. Contemplationes Metaphysicæ de continuo in Philosophiam experimentalem passim intruduntur; atque ita fundamentum philosophandi, quod in solis observationibus, atque experimentis deductisque matheseos ope ratiociniis situm, ex obscurissimis, incertisque de natura primorum elementorum principiis, seu potius opinionibus sumunt; cumque omnem a natura saltum instar terrifici monstri exclusum velint, passim a consideratione paucorum phænomenorum, & externa corporum specie ad remotissimas quasque caussas, intimamque rerum naturam explicandam transiliunt, prætermissis tractationibus mediis, a quibus, siqua iis opinionibus, verisimilitudo inest, tota pendet. Cæterum lucem quandam hisce regulis affundent tum ipsa earum adplicatio, tum ea, quæ in Logica de analogia, inductione, & hypothesibus dicta sunt §. XCI.

CAPUT II.

De Expressionibus Rationum in Mechanica usitatis.

Secundum primam Newtoni regulam investigandum est, an data caussa phænomenis explicandis sufficiat, id est, an sit effectui proportionalis. Quapropter generales quædam expressiones rationum, seu formulæ proportionem caussarum, & effectuum exprimendi tradendæ sunt. Nihil igitur in hac re ita proprium est Mathematicis, ut non iure quodam pertineat ad genuinam Physicam, quæ profecto quantitatem effectuum, & virium caussæ inter se comparare, atque earum rationem definire debet. Nulla etiam in tractatione harum formularum maior difficultas est, quam in vulgari usu regulæ aureæ, quam opinor, discentium captu superiorem esse, nemo facile adfirmarit.

§. V.

§. V.

Definitio I. Quantitates, quæ crescunt, vel decrescunt, dicuntur *variabiles*: Si autem aliis variatis quantitas quædam non mutatur, sed eadem manet, vocatur *constans*, seu invariabilis. Siquod mobile eadem constanter celeritate movetur continuo crescit spatium confectum, & tempus motus: at celeritas, ut ponitur, non crescit, neque decrescit. Est ergo spatium, & tempus quantitas variabilis; at celeritas est constans. Si bini cursores eandem emetiuntur viam, sed inæquali tempore, & celeritate, spatium est constans, at tempus, & celeritas quantitates sunt variabiles. In circulo ordinatæ, sive lineæ rectæ a Diametro usque ad peripheriam normaliter erectæ a vertice diametri usque ad centrum perpetuo crescunt; inde a centro usque ad alterum verticem iterum decrescunt; sunt igitur hæ ordinatæ quantitas variabilis, at Diameter circuli est constans. Notandum vero, quod magnitudo quantitatum variabilium determinetur comparatione, seu relatione unius quantitatis ad aliam cum ea quomodocunque connexam, ita ut una variata etiam altera varietur constanti quadam lege, atque ita altera alterius mensura fiat. Hæc comparatio, seu relatio fere est ratio, & proportio geometrica, de qua sola in præsenti agitur: estque ea ratio vel *simplex*, si variatio, & determinatio quantitatis ab unica mensura, sive a variatione unius duntaxat quantitatis alterius pendet; vel est ratio *composita*, si variatio, & determinatio quantitatis pendet a pluribus.

Determinatio solius dimensionis in longum pendet ab unica mensura pro arbitrio assumta: e. g. a numero pedum, vel hexapedarum, ita ut longitudo sit duplo, triplo, aut in quacunque serie multipla vel submultipla maior, aut minor, si numerus pedum, vel hexapedarum est duplo, triplo, vel in quacunque serie multipla aut submultipla maior, aut minor. Hinc si longitudo spatii A est 1000 *pedum, & longitudo spatii a* 2000 *pedum erit* $A : a = 1000 : 2000 = 1 : 2$.

Hoc igitur casu ratio simplex habetur. At variatio, & determinatio superficierum a pluribus quantitatibus,

Digitized by Google

seu mensuris, nimirum tum a longitudine, tum a latitudine alicuius superficiei, vel areæ. Sit area A, cuius longitudo B contineat 36 pedes, latitudo C 24 pedes, & area a, cuius longitudo b contineat 12 pedes, & latitudo c 8 pedes, erit prima area ad secundam, ut $36 \times 24 : 12 \times 8$; *sive* $A : a = BC : bc = 864 : 96 = 9 : 1$. *Pariter determinatio solidi, quod trinam habet dimensionem, pendet tum ex longitudine, tum latitudine, tum altitudine, seu profunditate. Sit solidum A; eius longitudo* $B = 4$, *latitudo* $C = 2$, *altitudo* $D = 1$; *& solidum a, cuius longitudo* $b = 7$, *latitudo* $c = 5$, *altitudo* $d = 3$; *erit* $A : a = BCD : bcd = 8 : 105$. *Sic ergo ratio habetur composita.*

§. VI.

Definitio II. quando in Mechanica ratio caussarum, & effectuum determinari dicitur, vox *caussa* latius sumitur, nempe pro omni eo, ex quo intelligitur, cur aliquid sit tantum, quantum est, non maius, aut minus, sive cur hanc, & non aliam magnitudinis rationem habeat. Pariter *effectus* censetur, cuius magnitudo ab altero, nempe a caussa, vel mensura pendet, ac determinatur.

Longitudo, superficies, solidum spectantur instar effectuum, qui a numero pedum in longum, vel a longitudine, latitudine, altitudine, seu profunditate tanquam a suis caussis, vel mensuris pendent.

§. VII.

Definitio III. Caussæ *homogeneæ* sunt, quæ eodem modo agunt, sive ad effectum concurrunt. Caussæ *heterogeneæ*, quæ ad effectum concurrunt dispari modo.

Si currum & homines, & equi, & boves trahunt, translatio currus est effectus productus a caussis homogeneis. Quia vero ad currum transferendum aliter concurrit numerus, aliter robur equorum, item aliter pondus impositum, & longitudo viæ (ab his enim omnibus translatio currus velut a caussis quibusdam pendet) idcirco istæ sunt caussæ heterogeneæ.

§. VIII.

§. VIII.

Definitio IV. Caussae *agentes in ratione directa* sunt, quibus crescentibus effectus crescit, decrescentibus decrescit: caussae agentes in *ratione reciproca*, quibus crescentibus effectus decrescit, decrescentibus crescit. Universe A est reciproce ut B, si A crescente, B decrescit, vel A decrescente, B crescit: directe vero A est ut B, si uno crescente etiam alterum crescat, vel uno decrescente pariter decrescat alterum.

Pondus currui impositum, & longitudo viae, qua transferendus est currus, sunt caussae agentes in ratione reciproca; nam quo maius est pondus impositum, aut quo maior conficienda est via, eo minor, ac difficilior est currus translatio. At commoditas viae, & numerus, & robur equorum sunt caussae in ratione directa agentes.

§. IX.

Definitio V, Quia omnis proportio est similitudo rationum, idcirco in ea proportione geometrica, in qua ratio effectuum ex ratione caussarum determinatur, binae rationes, ac proin quatuor termini spectandi sunt. In his bini sunt *homogenei*, bini *respondentes*, quorum nempe singuli prioribus singulis respondent, vel cum iis connectuntur. Si in proportione $A : a = B : b$. A & a habeantur pro terminis homogeneis, erunt B, & b respondentes, ita, ut homogeneus A, & terminus respondens B ad eundem casum, vel rem eandem pertineant; pariter alter terminus a, & respondens b ad eundem casum vel rem sint referendi. Hoc modo celeritas C, & spatium S, & tempus T eundem motum, vel eundem casum, aut idem mobile respiciunt; & celeritas c, spatium s, tempus t ad alium motum, vel ad alium casum, aliudve mobile referri debent.

Maxime naturalis proportionem concipiendi modus est, ut, si homogeneus A ponitur primo loco, homogeneus a secundo loco, tertio loco consistat terminus respondens homogeneo A, & quarto loco terminus respondens homogeneo a; qui quidem ordo etiam in ratione reciproca servari potest, si nimirum termini unius rationis fiant denominatores fractionum, quarum numerator est unitas, vel quaevis quantitas constans. Sit ratio reciproca, $A : a$

 $= b : B$;

Digitized by Google

$= b : B$; *fieri poterit* $A : a = \frac{1}{B} : \frac{1}{b}$ *uti ex elementis constat. Atque hinc caussæ directe agentes uti quantitas integræ, vel ut numeratores fractionum ponendæ sunt, caussæ vero reciproce agentes, ut denominatores fractionum ponendæ sunt, quarum numerator vel est caussa directe agens, vel si nulla adsit unitas servato eo, quem diximus, ordine maxime naturali.*

§. X.

Axioma. Effectus semper sunt proportionales suis caussis. Ac si effectus ab unica pendeat caussa vel mensura, ex ipsa notione caussæ, & effectus sæpe admodum perspicuum est, an sit directe, vel reciproce proportionalis, sive an sit caussa in directa ratione, vel reciproca agens. Si e. g. duo mobilia, quorum utrumque suam celeritatem, quam habet, semper eandem, & constantem retinet, spatia conficiant æqualia, manifestum est tempora, & celeritates esse reciproce proportionalia; quia, quanto celerius unum progreditur, tanto minore tempore indiget ad idem spatium percurrendum. Sæpe non nisi experientia, & ratiocinio deducitur, utrum ratio sit directa, vel reciproca, uti cum ostendemus, gravitatem corporum in suum centrum esse in ratione quadam reciproca distantiarum ab eodem centro. Ex axiomate illud quoque deducitur: siquis effectus non nisi a caussis eodem modo agentibus, quæ sint inter se homogeneæ, pendet, erit is ut summa caussarum homogenearum directe agentium, minus summa caussarnm homogenearum reciproce agentium. Si currum homines, equi, & boves eadem trahunt directione, erit effectus, sive translatio currus, cæteris paribus, uti summa virium, quibus homines, equi, & boves trahunt. Siquod corpus impellitur vi & celeritate ut 1, dein iterum vi & celeritate ut 1; erit vis & celeritas corporis, ut $1 + 1 = 2$. Si navis adverso flumine trahitur, a summa virium, quibus trahitur, subtrahenda est vis contraria fluminis, ceu caussa reciproce agens. Ut habeatur magnitudo, seu quantitas motus alicuius corporis, in quo omnes minimæ partes eadem celeritate progrediuntur, ea est, ut summa

ma

Digitized by Google

ma virium, quæ insunt in omnibus minimis partibus, sive quia omnes minimæ partes pari vi, & celeritate progrediuntur, erit quantitas motus ut factum ex intensione vis, aut celeritatis unius in summam omnium partium.

Si effectus ab unica caussa vel a pluribus homogeneis pendet, haud ægre simplici proportione effectuum ratio exprimitur. At si a pluribus pendet heterogeneis directe, & reciproce agentibus, quæritur, quomodo ratio effectuum relate ad omnes caussas simul concurrentes determinanda sit. Qua quidem de re theorema generale adferemus æque fæcundum, ac facile, quod per totam Mechanicam amplissimi usus est. Eundem in finem unicum præmitto

§. XI.

Porisma. *Si ad binas quantitates, vel in proportione ad binos terminos unius rationis accedit eadem tertia quantitas heterogenea, per quam uterque terminus æqualiter intenditur, aut remittitur, id est, eodem modo sumitur, ratio earum quantitatum, vel proportio terminorum non mutatur, perinde ac si ea quantitas heterogenea non accessisset.* Nam ex Elem. Si est $A : a = B : b$, erit etiam $A : a = Bm : bm$, sive m sit quantitas integra, sive fracta.

Istuc quidem etiam in vulgari usu regulæ aureæ sæpe occurrit. Sint quantitates homogeneæ A, & a operarii 10, *& operarii* 5; *illi intra diem murum* 6 *ped. construant, hi eodem tempore murum* 3 *ped. eritque proportio,* $10 : 5 = 6 : 3$. *Accedat nunc ad binos terminos quantitas heterogenea m, nempe tempus* 3 *dierum, & perficient operarii A murum* 18 *ped. & operarii a murum* 9 *ped. quemadmodum ergo prius fuit ratio inter muros ceu effectus ut* $10 : 5$ *sic erit & postea ut* 30, *&* 15, *sive ut* $6 : 3$. *Ratio ergo effectuum non mutatur. Nempe quantum caussæ intenduntur a tertia heterogenea m, in eadem ratione intenduntur effectus, qui erunt ut* $18 : 9$. *Similiter res habet, si ad caussas accedit eadem heterogenea quantitas reciproce agens; quantum enim caussæ impediuntur, vel minuuntur ab eadem tertia, tantundem impeditur, vel minuitur effectus.*

§. XII.

§. XII.

Theorema generale. *Effectus quicunque productus a pluribus caussis heterogeneis est in ratione composita directa caussarum agentium in ratione directa, & reciproca caussarum agentium in ratione reciproca.* Dem.

I. Si effectus producuntur a pluribus caussis heterogeneis, & directe agentibus, erunt ii in ratione composita directa omnium caussarum directe agentium. Sit effectus E productus ab eiusmodi caussis C, & M; effectus e a caussis c, & m. Dico esse E : e = C M : c m. Concipiatur enim tertius effectus x productus a caussis C, & m, quarum una effectui E, altera effectui e communis est; quoniam effectus E producitur a caussis c, & M; effectus x a caussis C, & m, manifestum est, quod utrinque ad caussas M, & m accedat eadem tertia heterogenea C; quæ rationem effectuum non mutat, perinde, ac si non accessisset; erit igitur $E : x = M : m$, adeoque $x = \frac{E\,m}{M}$.

Cumque effectus e sit productus a caussis c, & m; effectus x a caussis C, & m, erit ob m = m
$e : x = c : C$ consequenter $x = \frac{C\,e}{c}$

Quare ob binos valores æquales tertio valori x, erit

$$\frac{E\,m}{M} = \frac{C\,e}{c}$$

$$E\,c\,m = C\,M\,e.$$

Qua æquatione in analogiam resoluta fiet

$$E : e = C\,M : c\,m.$$

Ponatur effectus E productus a tribus caussis heterogeneis C, M, N, & effectus e a caussis heterogeneis c, m, n, sintque hæ caussæ, ut ante, directe agentes. Dico esse E : e = C M N : c m n. Nam concipiatur denuo a caussis C, M, & n productus effectus x, ut aliquæ huius effectus x caussæ, vel aliqua, quæ-

cun-

cunque sit, communis ponatur cum effectu E, & aliquæ, vel aliqua, quæcunque sit, communis cum effectu e. Quia in nostra hypotesi effectus E pendet a caussis C, M, N: effectus x a caussis C, M, n, patet, ad caussas N & n accedere eandem, vel easdem heterogeneas C, & M, quæ perinde se habent, ac si non accessissent; erit igitur E: x = N : n.

& $$x = \frac{E\,n}{N}:$$

rursus ob eandem rationem, si effectus x comparatur cum effectu e, erit ob prius demonstrata e : x = c m : C M, hinc $x = \frac{C\,M\,e}{c\,m}$

ob binos valores æquales tertio x, fiet

$$\frac{E\,n}{N} = \frac{C\,M\,e}{c\,m}$$

sublatis fractionibus E c m n = e C M N factaque resolutione in analogiam

$$E : e = C\,M\,N : c\,m\,n.$$

Similis demonstratio habetur, si effectus a pluribus quam tribus caussis heterogeneis directe agentibus producitur.

II. Si effectus E, & e producuntur a pluribus caussis heterogeneis, & *reciproce agentibus* e. g. F, L, & f, l, erunt iidem in ratione composita reciproca omnium caussarum reciproce agentium, nempe

$$E : e = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}.$$

Demonstratio eodem prope modo peragitur, posito tertio quodam effectu, qui pendet a caussis L, & f reciproce agentibus;

erit $E : x = \frac{1}{F} : \frac{1}{f}$

$$x = \frac{E\,F}{f}$$

& rur-

& rursus $e : x = \frac{1}{l} : \frac{1}{L}$

$$x = \frac{e\,l}{L}$$

quare ob valores æquales fit $\frac{E\,F}{f} = \frac{e\,l}{L}$

$$E\,F\,L = e\,f\,l$$

unde habetur analogia:

$$E : e = f\,l : F\,L = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}.$$

III. Universe effectus productus a pluribus caussis heterogeneis partim directe, partim reciproce agentibus est in ratione composita ex directa, caussarum directe agentium, & reciproca caussarum reciproce agentium, sive, quod in idem recidit, effectus, qui a pluribus caussis heterogeneis pendet, est ut productum ex caussis, quæ, dum crescunt, ad incrementum effectus conferunt, divisum per productum ex caussis, quorum incrementum effectum minuit. Si enim solæ ponuntur caussæ heterogeneæ directe agentes;

erit $E : e = C\,M\,N : e\,m\,n.$ n. I.

Si solæ ponuntur caussæ reciproce agentes,

erit $E : e = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}.$ n. II.

Si igitur utriusque generis caussæ concurrunt

erit $E : e = \frac{C\,M\,N}{F\,L} : \frac{c\,m\,n}{f\,l}$

Quæ conclusio ut penitus perspiciatur, ponatur iterum tertius effectus x, qui pendeat a caussis heterogeneis, directe agentibus C, M, N, & a caussis reciproce agentibus f, l.

Fiet primo per Poris. §. XI. $E : x = \frac{1}{F\,L} : \frac{1}{f\,l}.$

& $e : x = c\,m\,n : C\,M\,N$

unde

unde fit $x = \dfrac{EFL}{fl} = \dfrac{CMNe}{cmn}$

$$EFLcmn = eflCMN$$

$$E : e = \frac{CMN}{FL} : \frac{cmn}{fl}.\ Q.\ e.\ D.$$

§. XIII.

Corollarium I. Tota vis huius theorematis eo tendit, ut: ſi nota ſit ratio, quam ſingulæ cauſſæ ſeorſim habent ad effectum, nempe directam, vel reciprocam, inveniatur ratio, quæ ex omnibus cauſſis ſimul concurrentibus exſurgit. Quapropter omnis labor in eo eſt, ut ſinguli termini, ſive ſingulæ cauſſæ, quæ ad effectum concurrunt, recte conferantur, videaturque, utrum directe vel reciproce agant. Iſtuc vero ex idea cauſſarum & effectuum elucet, vel aliunde innoteſcere debet, uti ſupra adnotavi §. X. Sic perſpicuum eſt, lucrum uſurarii tanquam effectum creſcere, quo maior fuerit peccunia expoſita, quo longiore tempore fuit expoſita, & quo plus accipitur pro centum. Hæ igitur cauſſæ rationem directam habent. Sic pretia ſunt mercibus, vel quantitati earum, expenſæ numero animalium alendorum directe proportionales: tempus vero animalibus alendis per datam annonam reciproce proportionale. Si plures certam pecuniæ ſummam contulerunt, & commune quoddam lucrum adepti ſunt, erit pars lucri totius, quæ ſingulis debetur, directe proportionalis parti pecuniæ a ſingulis collatæ; hinc exiſtit proportio: ut tota maſſa ad totum lucrum, ſic pars maſſæ ad partem lucri; quæ quidem proportio regulam ſimplicem ſocietatis continet.

Utor tritis admodum exemplis, tum ut idea cauſſæ directe vel reciproce agentis maiore claritate ſeſe animis ingerat, tum ut pateat, nihil ſupra vulgarem uſum regulæ aureæ magnopere contineri in hoc theoremate, proindeque nimis arduum videri haud poſſe; Eſt tamen illius uſus in Mechanica plane neceſſarius; idemque omnes caſus regulæ aureæ ſive directæ, ſive inverſæ, & quomo-

docunque compositæ adplicari potest unica simplice operatione. Sumantur enim pro effectibus termini bini homogenei ii, quorum alter ignotus est, & investigari debet. Primo loco ponatur terminus notus, secundo ignotus, tertio loco consistant termini primo cognito respondentes, ita ut siquæ caussæ vel conditiones (uti alias vocitant) sint reciproce agentes, eæ fiant denominatores fractionum, quarum numerator sunt caussæ directe agentes, siquæ adsint, vel unitas. Sit notus casus: operarii 3 ad cædendas 35 orgias ligni egent diebus 6, si per diem laborent horis 7; quot diebus indigent operarii 8 ad orgias 50, si laborent per diem horis 8? Effectus latiore sensu, ut in Mechanica, sunt dies, quibus operarii indigent. Relate ad hosce dies, vel ad numerum dierum numerus orgiarum est caussa directe agens; eo maior *enim dierum numerus erit*, quo plures *orgiæ cædendæ sunt. At numerus operariorum, & horarum, quibus intra diem laborant, sunt caussæ reciproce agentes relate ad numerum dierum. Nam* eo minor *hic erit*, quo plures *sunt operarii, &* quo pluribus *horis laborant intra diem. Igitur secundum positam a nobis regulam fiat*

$$6 : x = \frac{35}{3 \times 7} : \frac{50}{8 \times 8} = \frac{1}{3} : \frac{10}{8 \times 8} = 64 : 30$$

unde fit $x = \frac{180}{64} = 2\,\frac{13}{16}$. *Hoc quidem modo, siquis in fractionibus ad minores terminos reducendis paullum exercitatus sit, brevissima, ac tutissima via eiusmodi casus utcunque complicati resolvuntur. Sed propius ad Mechanicas rationum expressiones accedendum est.*

§. XIV.

Definitio. Formulæ, uti in Mechanica sumuntur, sunt compendiariæ expressiones proportionis geometricæ, in quibus pro quatuor terminis duntaxat bini respondentes ponuntur. Quotiescunque igitur quantitates variabiles & heterogeneæ e. g. C & S, id est, spatium, & celeritas in constanti quadam ratione mutantur, hæc rationum æqualitas in Mechanica per æquationem exprimitur, ponendo $C = S$; loco: $C : c = S : s$.

Quo

Quo casu signum æqualitatis = non denotat, quantitatem C esse reipsa æqualem quantitati S (nam hæ quantitates sunt heterogeneæ, nec communem mensuram habent, sed id signum indicat, quantitatem C crescere, vel decrescere eadem ratione, qua crescit, vel decrescit quantitas S; ac si C denotat celeritatem, S spatium, ea formula sic pronuntiatur: celeritates sunt in ratione directa spatiorum, vel sunt directe ut spatia. Si C iterum celeritatem exprimat, & T tempus, habeaturque formula $C = \frac{1}{T}$, sensus est, celeritates sunt in ratione reciproca temporum, vel reciproce ut tempora. Expressio $S = C\,T$ indicat, quantitatem S eodem modo variari, quo variatur productum ex quantitate C in quantitatem T, sive si eæ sint literæ initiales spatii, celeritatis, ac temporis, sensus formulæ est, spatia sunt in ratione composita celeritatum, ac temporum. Formula $A = B^2$ vel $A = B^3$, indicio est, quantitatem A crescere vel decrescere directe, ut quadratum, aut cubus quantitatis B crescit, vel decrescit, dicimusque, A est in ratione duplicata, vel triplicata quantitatis B. Hæc vero expressio $A = \frac{1}{B^2}$, significat quantitatem A crescere, quantum decrescit quadratum quantitatis B, sive A est in ratione reciproca duplicata quantitatis B. Vel si sit $A = \frac{1}{\sqrt{B}}$, A est in ratione reciproca subduplicata quantitatis B.

Qui ista ignorat, etsi toto biennio disputet in philosophica palestra, ne idioma quidem philosophicum callere hac ætate convincitur, ac ne librum quidem de rebus physicis tractantem, qui quidem dignus sit, ut in hanc scientiarum lucem prodeat, intelligere valet.

§. XV.

Regula generalis de tractatione, & variationibus formularum est hæc: *Omnes variationes, quæ in pro-*

portione geometrica circa binos terminos unius rationis, vel circa binos antecedentes, aut consequentes fieri possunt salva proportione, eædem in tractatione, & variatione formularum legitime fient. Sequitur id ex notione formulæ mechanicæ, quæ non nisi binos terminos unius rationis, aut binos antecedentes, vel binos consequentes exprimit. Hinc vero per sese fluunt sequentia

§. XVI.

Corollaria. I. Si sit $C = \frac{S}{T}$; erit $C\,T = S$, & $T = \frac{S}{C}$. Nam formulæ $C = \frac{S}{T}$, sensus est hic: $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$. Porro salva proportione fieri potest multiplicando $C\,T : c\,t = S : s$; unde nascitur formula $C\,T = S$. Similiter de sequentibus corollariis ratiocinandum est.

II. Siquis terminus in formula ponitur constans e. g. S in priore formula $C = \frac{S}{T}$, eius loco unitas substitui potest hoc modo $C = \frac{1}{T}$. Universe si formula $p = \frac{a\,b\,x}{c\,y}$ denotet valorem quantitatis p, qui valor pro absoluto sumitur, ponanturque a, b, c quantitates constantes, formula traducitur ad hanc $p = \frac{x}{y}$, qua reductione eadem sit simplicior, sed non iam absolutum valorem quantitatis p, sed rationem duntaxat exhibet, qua is valor secundum variationes quantitatis x, & y exhibetur.

III.

Digitized by Google

III. Quia rationes similes eidem tertiæ, vel similibus aliis, sunt inter se quoque similes, legitima erit substitutio æqualium valorum; quare si sit $C = \frac{S}{T}$, & $C = \frac{Q}{M}$, fieri potest $\frac{S}{T} = \frac{Q}{M}$. Ob hanc similitudinem rationum loco unius factoris, aut divisoris alius factor, aut divisor eiusdem rationis subrogari potest. Si sit $V = \frac{C^2}{D}$, & $C^2 = \frac{D^2}{T^2}$, erit $V = \frac{D^2}{T^2 D} = \frac{D}{T^2}$. Si sit $V = \frac{D}{T^2}$, & $T^2 = D^3$, erit $V = \frac{D}{D^3} = \frac{1}{D^2}$.

IV. Quia potentiæ eædem quantitatum proportionalium sunt proportionales, & radices eædem quantitatum proportionalium pariter proportionales; idcirco si habeatur formula $A^m = D^n$, fieri potest $A = D^{\frac{n}{m}}$; vel si sit $T^2 = D^3$, erit etiam $T = D^{\frac{3}{2}}$, & $D = T^{\frac{2}{3}}$.

V. Quemadmodum si quantitas quædam est constans, ea æqualis unitati poni potest: ita vicissim, si in data hypothesi ratio quantitatis per unicam heterogeneam exprimitur, cum ea generatim a pluribus pendet, colligitur, cæteras, quæ non exprimuntur, esse constantes. Si enim generatim est $C = \frac{S}{T}$, & in quadam hypothesi sit $C = S$, quantitas T necessario æquipollet unitati, & constans est; nam ob binos valores æquales C, fit $\frac{S}{T} = S$; quod verum non est, nisi T sit $= 1$.

VI. Ratio æqualitatis habetur, si in ratione composita ex directa unius, & reciproca alterius quantitatis, ponuntur hæ quantitates habere inter se rationem directam. e. g. Si sit $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t} = S\,t : s\,T.$

Si detur hypothesis $S : s = T : t$, erit $S\,t = s\,T$; ac proin $C = c$; quæ est ratio æqualitatis. Pariter si in ratione composita ex directa binarum quantitatum, hæ rationem reciprocam habere ponuntur, fiet ratio æqualitatis. Sit $Q : q = M\,C : m\,c$
& ponatur $M : m = c : C$; ut sit $M\,C = m\,c$
erit $Q = q$.

Hæ quidem variationes ipso usu & progressu Physices familiares fient, plurimumque lucis acquirent, cum nunc quidem obscuræ fortassis videantur. Si nomen caussæ sensu strictiore sumitur, nempe pro eo, quod vere agit, & efficientiam quandam habet ceu pro operariis, scribis, viribus activis &c., manifestum est ex theoremate generali, effectus E semper esse in ratione composita directa caussarum C, & temporum T, ut sit $E : e = C\,T : c\,t$; unde formula sumitur $E = C\,T$. Et $C = \frac{E}{T}$, denique $T = \frac{E}{C}$ h: e 1° caussæ sunt in ratione composita ex directa effectuum, & reciproca temporum; nam eo maior sit caussa necesse est, quo maiorem effectum gignit, & minore tempore indiget; 2° tempora autem sunt in ratione composita ex directa effectuum, & reciproca caussarum. 3° Caussæ eædem producunt effectus temporibus, quibus agunt, proportionales; nam si in formula $E = C\,T$, ponatur C quantitas constans, erit $E = T$. 4° Effectus a caussis diversis eodem tempore producti, sunt ipsis caussis proportionales; si enim T est quantitas constans, fit $E = C$. 5° Si vires caussarum, & tempora, quibus agunt, reciprocant, effectus sunt æquales; nam ex hyp. $C : c = t : T$, proindeque $C\,T = c\,t$; igitur etiam $E = e$, uti adnotavimus in Corollario VI.

Po-

Digitized by Google

Ponuntur autem caussæ uniformiter agentes, sive tales, quæ intra quodvis æquale tempus æquales effectus edunt. Cæterum ex formula E = T n. 3. exercitationis gratia solvi potest problema arithmeticum Newtoni: datis plurium agentium A, B, C viribus, quæ temporibus e, f, g producunt respective effectus a, b, c, determinare tempus x, in quo datum effectum d coniunctim producunt. Quia hæ caussæ coniunctim agunt tamdiu, donec totus effectus sit absolutus, idcirco tempus x omnibus commune est in edendo effectu d. Quare fiat: ut tempus e ad effectum a; ita tempus x ad partem effectus, quam caussa vel agens A confert; & sic de reliquis agentibus, ut fiant proportiones

$$e : a = x : \frac{ax}{e}$$

$$f : b = x : \frac{bx}{f}$$

$$g : c = x : \frac{cx}{g}$$

Ex conditione problematis summa horum effectuum partialium æquare debet totum effectum d a tribus agentibus coniunctim productum. Quare erit

$$\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$$

& sublatis fractionibus $afgx + begx + cefx = defg$: & $x = \dfrac{defg}{afg + beg + cef}$.

Ut generalis hæc solutio ad casum singularem vulgaris arithmeticæ adplicetur, sint tres mercenarii, qui opus quoddam certis temporibus seorsim quisque perficiunt. Primus A semel in tribus septimanis, alter B ter in octo septimanis, tertius C quinquies in duodecim septimanis; quæritur, quanto tempore id opus simul absolvant. Si hic casus cum problemate superiore comparetur, erit $a = 1.$ $e = 3.$ $b = 3.$ $f = 8.$ $c = 5.$ $g = 12.$ *d fiat* $= 1.$ *erit* $x = \frac{288}{324}$ *sive dividendo per* 36, $x = \frac{8}{9}$

quæ

quae fractio denotat partes septimanae unius, intra quas effectus d absolvitur; cum vero septimana in 7 dies, dies in 24 horas, & hora in 60 minuta dividatur, reperietur $x = 6$ dies, 5 hor. 20 min.

CAPUT III.

De Prima Corporum Idea.

Ex regula tertia Newtoni §. III. deducitur prima idea corporis naturalis, quod Physices obiectum est; primam adpello hanc ideam propterea, quod ea ex constanti sensuum usu, & observatione hauriatur, & a nulla pendeat hypothesi, vel controversia philosophica, quae in ipso Physices exordio a non nullis admodum intempestive adferri solet. Sed qui Newtonianae methodo inhaerent, qua quidem spectata natura & conditionne mentis nostrae nulla praestantior excogitari potest, res incertas a certis diligenter segregant.

§. XVII.

Definitio I. Corpus est substantia extensa, divisibilis, impenetrabilis, iners & mobilis. Est igitur corporis idea complexa ex partialibus ideis earum qualitatum, seu proprietatum, quae in omnibus corporibus, in quibus experimenta instituere licet, deprehenduntur, quaeque intendi, & remitti nequeunt. Nimirum aliae sunt corporum qualitates, seu proprietates *specificae*, quae non omnibus generatim corporibus, sed certae duntaxat eorum classi, vel speciei insunt, uti in metallis diversa ductilitas, elasticitas, fusibilitas: aliae sunt proprietates *genericae*, quae omnibus corporibus cuiuscunque generis competunt, uti extensio, divisibilitas, impenetrabilitas, inertia, mobilitas. Dein aliae vocantur corporum proprietates *relativae*, quae a compositione, & adgregatione partium pendent uti sunt cohaerentia, vel soliditas, & fluiditas; nam corpora, quorum partes firmitate quadam cohaerent, *solida* dicuntur, uti metalla, ligna, lapides &c. quorum vero partes facillime separantur, sunt fluida, uti aer, aqua &c. Relativis pro-

prie-

prietatibus opponuntur *absolutæ*, quæ non a partium compositione, sed ab ipsis elementis, eorumque natura pendent, uti sunt inertia, & mobilitas, de qua sequente capite disseremus.

Inter genericas & absolutas corporum proprietates non nihil interest; cum enim omne corpus sit compositum, fieri potest, ut adfectiones quædam ob partium adgregationem omnibus plane corporibus competant, & genericæ sint; quæ tamen ob hanc ipsam caussam, quod a compositione proveniant, non absolutæ, sed relativæ dicendæ erunt. Qui puncta penitus inextensa statuunt, corporum extensionem necessario pro relativa qualitate habent.

§. XVIII.

Observatio. In vacuo omnia corpora terrestria, utcunque pondere differant ceu plumbum, & plumula, eadem celeritate decidunt; hinc diversitas ponderum non a diverso nisu minimorum elementorum, sed a diverso eorum numero, seu a diversa quantitate materiæ provenit.

Duo globi eiusdem magnitudinis ligneus, & lapideus, qui in vacuo eadem celeritate decidunt, tamen pondere discrepant, propterea quod globus lapideus maiorem quantitatem materiæ, seu maiorem numerum elementorum contineat, quam alter ligneus.

§. XIX.

Corollarium I. *Volumen seu moles* corporis differt *a massa* eiusdem, nam volumen æstimatur ex magnitudine spatii, quod corpus occupat, sive ex dimensione in longum, latum, & profundum: at massa est ipsa quantitas materiæ sub certo volumine contentæ. Bini globi, quos supra posui, non volumine, sed massa differunt.

§. XX.

Corollarium II. Quia diversitas ponderis a diversa quantitate materiæ seu a massa pendet, (§. XVIII.)

Digitized by Google

idcirco corpora eiusdem voluminis, uti pondere, ita massa differunt; ac corpus, quod sub eodem volumine præponderat, *specifice gravius* dicitur, alterum *specifice levius*, ut adeo gravitas specifica corporum æstimetur ex pondere eorundem, seu quantitate materiæ sub eodem volumine contentæ. Corpora eiusdem speciei, & eiusdem gravitatis specificæ, *homogenea* dicuntur; quæ diversæ sunt gravitatis specificæ, *heterogenea*. In corporibus heterogeneis eiusdem voluminis pondera sunt directe, uti gravitates specificæ; in corporibus homogeneis eiusdem gravitatis specificæ pondera sunt uti volumina, quod per sese liquet; igitur secundum theorema generale §. XII. pondera corporum universe sunt in ratione composita gravitatum specificarum, & voluminum; unde si literæ initiales harum adfectionum adhibentur, habetur formula $P = G\,V$. Si gravitates specificæ, & volumina binorum corporum reciprocant, pondera sunt æqualia, & vicissim si pondera corporum heterogeneorum sunt æqualia, eorum gravitates specificæ, & volumina reciprocant. Nam formula hanc continet analogiam: $P : p = G\,V : g\,u$. Si iam sit $P = p$; erit $G\,V = g\,u$; proinde $G : g = u : V$.

Diximus, pondera corporum homogeneorum esse ut volumina, ut ob gravitatem specificam constantem formula $P = G\,V$, *abeat in hanc,* $P = V$. *Porro volumina pendent a longitudine, latitudine & profunditate; siqua corpora sunt eiusdem per totam longitudinem crassitiei, volumina sunt ut factum ex basi in altitudinem: basis autem est in composita ratione longitudinis, & latitudinis, quam basis habet. Sit trabs lignea, longa pedes 4, lata 3, alta 2, erit volumen seu tota soliditas* $= 4 \times 3 \times 2 = 24$. *Sit alia homogenea longa pedes 10, lata 4, alta 1, erit soliditas* $= 40$. *Hinc dato pondere P prioris* $= 240$, *invenietur pondus posterioris; nam* $V : u = P : p$ *seu* $24 : 40 = 240 : \frac{40 \times 240}{24} = 400$. *Longitudo, latitudo, & altitudo relate ad volumen corporis spectandæ sunt ceu caussæ heterogeneæ; unde id crescit in ratione composita earundem (Schol. §. V.) Bases circulares*

sunt

ſunt ut quadrata Diametrorum. Sit Diameter circuli unius 5 pollic. Diameter alterius 10 pollic. Sitque area circuli prioris 19, 635 pollicum quadratorum, facile reperietur area poſterioris, ſi fiat, ut quadratum diametri unius ad quadratum diametri alterius, ita area primi ad aream ſecundi, ſeu 25 : 100 = 19, 635 : 78, 54 pollic. quadrat.

§. XXI.

Corollarium III. Ex idea maſſæ, & voluminis exſurgit idea, & menſura denſitatis. Creſcit enim denſitas creſcente numero elementorum, ſive creſcente maſſa, & decreſcente volumine ſeu ſpatio, quod ea elementa coniunctim occupant, eo fere modo, quo denſam, & confertam dicimus hominum turbam, ſi magnus eſt hominum numerus, & exiguus locus, quem occupant. Hinc ſi denſitas, maſſa, volumen exprimuntur literis initialibus, erit $D = \frac{M}{V}$, ſeu denſitas eſt directe ut maſſa, & reciproce ut volumen corporis. Raritas R eſt reciproce ut denſitas, ſive directe ut volumen, & reciproce ut maſſa, ſeu $R = \frac{1}{D} = \frac{V}{M}$.

Hœc quidem ad extenſionem, & connexas ideas pertinent; Nunc de reliquis ideis partialibus, ex quibus complexa corporis idea coaleſcit, dicendum eſt.

§. XXII.

Obſervatio. Innumeris naturæ, & artis operibus oſtendi poteſt, diviſibilitatem corporum plane enormem eſſe; & velut in immenſum ultra omnes limites non modo ſenſuum, ſed etiam imaginationis pertingere. 1. Uncia auri, inquit Muſchenbroeck olim poterat diduci in bracteas quadratas 1600, quarum latus unumquodque 3 pollicum eſt, adeoque quælibet bractea eſt 9 pollicum quadratorum; cumque pollex ſecundum longitudinem dividi poſſit in 600 partes viſibiles, quodvis bracteæ latus (quod 3 pollicum eſt) dividetur in partes viſibiles

 1800.

Digitized by Google

1800. proinde quaelibet bractea quadrata in partes visibiles 1800. 1800 = 3240000, & bracteae 1600 in partes visibiles 3240000. 1600 = 5184000000; in tot igitur partes dividetur uncia auri, quae continet grana 480; consequenter unum granum auri in partes visibiles 10800000 dividetur. Quoniam vero artifices hodierni (inquit cit. Auctor) ex grano auri bracteas $36\frac{1}{2}$ pollicum quadratorum, & 24 linearum quadratarum spargunt, poterit granum auri dividi in partes 13200000. Nempe in pollice partes visibiles sunt 600, in pollice quadrato partes visibiles 360000. In dimidio pollice quadrato partes visibiles 180000. In una linea partes visibiles 50; in linea quadrata 2500: in lineis quadratis 24 erunt partes visibiles 60000; ex quibus ea summa enascitur. 2. Unicum granum cupri in tot particulas, tamque minutas dividitur, ut volumen aquae multis millionibus maius, quam sit volumen grani, colore imbuat. 3. Lewenhoeckius in gutta aquae, cui in aprico stanti piperis contusi exigua portio immissa fuit, triplicis generis animalcula per microscopium observavit. Diameter minimi generis ponatur 1, erit diameter secundi generis 10, & maximi 50: diameter vero grani sabuli maioris 1000; adeoque cum totum volumen seu magnitudo sit in ratione triplicata diametrorum, erit magnitudo talis animalculi ad magnitudinem arenae ut 1 : 1000, 000, 000. Cum iam tale animalculum corpus habeat organicum, etiam habet membra ad vitam & motus necessaria, cor, musculos, glandulas, ventriculum &c. eaque, cum pariter organica sint, instructa fibris, membranulis, tunicis, venis, arteriis, nervis &c. per quos vel sanguis manat, vel alius liquor multo subtilior iis canalibus, per quos dispensatur; ex quibus coniectura fieri potest de stupenda subtilitate lucis, quae in organa tam exilia, tamque delicata sine laesione irruit, quemadmodum alio loco declarabitur.

Multa divisibilitatis corporum, & subtilitatis argumenta suppeditabit Physica, & passim scriptores suggerunt, ex quibus perspicuum sit, quodvis esse congeriem innumerabilium particularum materiae. Utrum divisibilitas in infinitum pertingat, an ad simplicia denique elementa ve-

nia-

Digitized by Google

niatur, experientia decidi minime potest. Metaphysicæ autem contemplationes huc non pertinent.

§. XXIII.

Definitio II. *Impenetrabilitas*, quæ & *soliditas* aliquando dicitur, ea est corporum proprietas, ob quam eodem loco se mutuo excludunt, sive ob quam duæ pluresve materiæ partes eundem locum eodem tempore occupare nequeunt. Phœnomena, quæ compenetrationis speciem referunt, uti cum mercurius in metalla se insinuat, indicio sunt, solidissima quævis corpora, in quibus nihil interruptum sensu percipitur, plurima interstitia, & meatus, quos *poros* vocant, habere, ut adeo nullum sit omnino corpus absolute densum, sive inter cuius partes nulla interstitia relinquantur; imo quævis corpora, etsi maxime densa, incredibili pororum numero undique pertusa sunt. Hinc fieri necesse est, ut certa materiæ quantitas, per maius spatium extendatur, quam si intermedii meatus, & pori abessent; quemadmodum si inter libros, vel turbam hominum intervalla multis locis relinquantur, ab iis maius occupatur spatium, quam si exclusis iis intervallis maioribus, & sub sensum cadentibus libri, vel homines quaquaversus conferti stant. Ex his discrimen illud inter massam, & volumen corporum, de quo supra egi, evidentius perspici potest.

CAPUT IV.

De Legibus Motus Generalibus.

Mobilitas, & vis inertiæ, quæ in idea complexa corporis continentur, ex generalibus motus legibus maxime perspicientur. Hæ leges totius Mechanicæ, atque interpretationis naturæ corporeæ fundamentum sunt, & instar axiomatum passim habentur ab omnibus, etsi de natura virium multæ passim controversiæ cieantur, quas quidem hoc loco penitus eliminamus.

§. XXIV.

§. XXIV.

Lex I. *Quodvis corpus perseverat in suo statu quiescendi, vel movendi uniformiter in directum, donec aliunde statum suum cogatur mutare, h. e.* Corpus vim nullam habet ex se, vel per se *mutandi* statum motus, vel quietis, sed vim *conservandi* statum, ita, ut in quiete constitutum perpetuo quiesceret, donec aliunde, id est, a caussa extrinsecus adplicata a quiete deturbetur ad motum; & si aliquando ad motum determinatum esse ponitur, in eodem motu per sese maneret uniformiter, & in directum, id est, eadem constante celeritate, & in eadem linea recta pergeret.

§. XXV.

Corollarium I. Si corpus directionem motus, aut celeritatem, quam habet, in maiorem, vel minorem mutat, id ab alia caussa proveniat, necesse est; & si directionem, & celeritatem continuo mutat, id a caussa continuo agente provenire debet; corpus enim ex se, & natura sua statum minime mutat. Sola quidem experientia hanc legem in natura corporea obtinere proxime non penitus evincit. At constans & generalis experientia ostendit, omnis mutationis, quæ in statu motus vel quietis fit, alias quaspiam esse caussas. Eiusmodi caussæ extraneæ, per quas celeritatem, & directionem corporum mutari videmus, veræ sunt, iisque mutationibus explicandis sufficiunt; non oportet igitur aliam præterea comminisci caussam, neque existimandum est, ipsa corpora veluti sua sponte celeritatem, & directionem aliquando mutare. Adparebit quoque ipso progressu Physices, assumta hac lege motus omnium corporum, quos Mechanica terrestris, ac cælestis examinat, ita explicari, ac definiri posse, ut observationes cum theoria huic legi innixa optime congruant.

§. XXVI.

Corollarium II. Ex hac iam lege idea de vi inertiæ corporum, quam Newtonus vim insitam aliquando ad-

Digitized by Google

adpellat, formari poteſt. In omnibus corporibus per ſeſe ineſt *determinabilitas* ad utrumvis ſtatum motus, vel quietis recipiendum (quodvis enim corpus eſſe mobile oſtendit inductio; quieſcere multa nobis videntur corpora; certe exploratum eſt, quemvis motum minui poſſe magis, magisque; quocirca omnino denique extingui poterit) Et quoniam alterutrum ſtatum motus, vel quietis quodvis corpus neceſſario habet, ac per ſe conſervat, ineſt præterea in omnibus corporibus determinatio perſeverandi in eo ipſo ſtatu, qui actu adeſt, nempe in quiete, vel motu uniformiter in directum. Si hanc determinationem corporum conſervandi ſtatum, adpellamus *vim*; illam vero determinabilitatem ad utrumvis ſtatum motus, vel quietis vocemus *inertiam* corporum, poteſt hæc materiæ proprietas adpoſite dici *vis inertiæ*, quæ eſt communis corporum proprietas, & abſoluta quidem, ſive talis, quæ ex intima elementorum, ſeu materiæ natura, non ex partium compoſitione oritur; compoſitio enim nec mobilia efficit corpora, nec cur ſtatum motus, vel quietis conſervent, in cauſſa eſt.

§. XXVII.

Corollarium III. Determinatio conſervandi ſtatum motus, vel quietis, quam expoſita lex corporibus tribuit, non meram impotentiam ſtatum mutandi, ſed pluſculum quidpiam videtur indicare; ac obſervamus conſtanter, corpora non tantum ſtatum ſuum ex ſe ipſis non mutare, ſed etiam mutationi ſui ſtatus, & impreſſioni aliorum corporum reſiſtere. Nam 1. Vis minori corpori impellendo ſufficiens, ſæpe maiori movendo par non eſt. 2. Vis eadem adhibita non eandem omnibus corporibus celeritatem conciliat. 3. In conflictu corporum ex vi incurrentis ſemper aliquid decerpitur, uti, ſi globus in quieſcentem incurrit, poſt incurſum tardius progreditur. 4. Pro varia velocitate corporis in motu conſtituti varia vi opus eſt, ut ad quietem reducatur. Ineſt igitur in corporibus vis, qua in alia corpora mutationem ſtatus inducentia reagunt, quæque adpellari poteſt *vis reſiſtentiæ*. Hæc ſub nomine vis inertiæ a multis comprehenditur, ac comprehendi nunc

qui-

Digitized by Google

quidem poteſt citra errorem, quaecunque huius reſiſtentiae cauſſa ultima ab aliis aſſignetur.

Animadverti tamen poteſt, ideam vis reſiſtentiae non omnino eandem videri, ac ideam vis inertiae, neque effectum eundem penitus eſſe. Nam vis inertiae reſpicit conſervationem ſtatus in eo corpore, in quo reſidet, quodque motum, vel quietem conſervat: vis autem reſiſtentiae reſpicit corpus alterum, quod prioris ſtatum mutare nititur: per vim inertiae conſervat corpus ſtatum ſuum; per vim reſiſtentiae agit, vel potius reagit in aliud, quod mutationem inducit. Haud aegre, opinor, concipi poteſt, corpus A, dum motum ſuum, vel quietem per vim inertiae conſervat, eo ipſo reſiſtere, ſive reagere in corpus B, quod ſtatum mutare nititur. Sed hanc reſiſtentiam, & actionem, mutuamque reactionem ſequentes leges declarabunt.

§. XXVIII.

Lex II. *Mutatio ſtatus quietis, vel motus corporum proportionalis eſt vi impreſſae.* Mutatio ſtatus fit, quatenus vel novus motus quieſcenti corpori imprimitur, vel prior augetur, minuitur, extinguitur. Quaevis eiusmodi mutatio eſt proportionalis vi impreſſae, quatenus mutatio dupla, tripla, aut in quacunque multiplicium, vel ſubmultiplicium ſerie maior aut minor gignitur, ſi vis impreſſa duplo, triplo, aut in quacunque multiplicium, vel ſubmultiplicium ſerie maior, aut minor eſt. Aeſtimatur autem vis impreſſa, & mutatio ſtatus non ex ſola celeritate, quae in corporibus producitur, augetur, minuitur, vel extinguitur, ſed ex celeritate ducta in maſſam, ſive ex facto maſſae in celeritatem, quae dicitur *quantitas motus.* Nam magnitudo, & quantitas mutationis ſtatus pendet tum ex multitudine partium, quarum ſtatus una mutatur, tum ex celeritate communi, quae in ſingulis producitur, augetur, minuitur, extinguitur. Si maſſa eadem eſt, ſeu conſtans, celeritas autem in ratione dupla, vel tripla creſcit, etiam quantitas motus, & mutationis ſtatus cenſetur duplo, vel triplo minor; vel ſi celeritas ponatur conſtans, & aequalis; una autem maſſa A ſit du-

dupla, vel tripla maſſæ B, etiam quantitas motus & mutationis ſtatus in maſſa A eſt dupla, vel tripla illius quæ eſt in maſſa B. Hinc quantitates motuum creſcunt ut maſſæ, & celeritates coniunctim, ſive exprimendo easdem per literas initiales, Q = M C.

Sit quantitas motus in corpore A = Q; eius maſſa M = 3. Celeritas C = 6. Quantitas motus in corpore B = q; eius maſſa m = 4, celeritas c = 2; erunt quantitates motus, ſeu Q: q = M C: m c = 18: 8 = 9: 4. Unde naſcitur formula Q = M C, in qua eæ variationes habent locum, quas indicavimus §. XV. Si maſſæ, & celeritates reciprocant, quantitates motus ſunt æquales. ibid. n. VI.

§. XXIX.

Lex III. *Actioni corporum contraria ſemper, & æqualis eſt reactio*, ſive in colliſione & conflictu corporum æquales ſtatus mutationes utrinque contingunt, ut, quæ motus quantitas uni corpori adiicitur, eadem alteri detrahatur. Hinc vis impreſſa, qua corpus A agit in B, eſt æqualis vi reſiſtentiæ corporis B, ſive quantum corpus A mutat ſtatum corporis B, tantundem corpus B mutat ſtatum corporis A. Moveatur corpus A verſus orientem, & impellat aliud corpus B quieſcens vi impreſſa ut 4, qua in corpore B producitur mutatio ſtatus, ſive quantitas motus ut 4; quoniam huic actioni contraria, & æqualis eſt reactio; hinc corpus B eadem vi ut 4 reſiſtet, ſive parem motus quantitatem in corpore A producet, ſed in partem contrariam, nempe verſus occidentem.

§. XXX.

Corollarium I. Menſura vis impreſſæ, ſeu actionis eſt quantitas motus in corpore impulſo producta; & menſura reſiſtentiæ, ſive reactionis eſt quantitas motus in impellente eliſa, ſive quantitas motus in eodem producta ſecundum directionem priori contrariam; idque locum habet non modo in actuali motu, & percuſſione, ſed etiam conatu, & niſu ad motum, ſiquis adeſt in dato corpore, & impreſſione. Si digito premo aliud

aliud corpus iners, & immobile, ſatis ſentio in digito preſſionem reciprocam, ſive repreſſionem, eoque maiorem, quo maior eſt mea preſſio. Idem fit, ſi corpus quieſcens manu percutiam, vel in motu iam conſtitutum ad quietem redigam, aut etiam ad maiorem celeritatem determinem; nam quoad exceſſum celeritatum perinde reſiſtit, ac reagit, ac ſi quieſceret.

§. XXXI.

Corollarium II. Quodvis igitur corpus, quod in alterum agit percutiendo, ſeu premendo, ſemper invenit reſiſtentiam ſuæ actioni æqualem, & quando nulla eſt reſiſtentia, nullumque obſtaculum, nulla concipitur actio corporum mutua. Si equus trahit lapidem funi alligatum, funis non modo tenditur ab equo, ſed pari ratione ab ipſo etiam lapide, haud ſecus, ac ſi alia vis æqualis reſiſtentiæ lapidis funem retraheret, & poſitive contra equum reageret; ac ſi funis manu tenſus circa medium ſcinditur, pars una verſus manum, altera verſus obſtaculum reſilit, quod non fieret, ſi funis duntaxat verſus manum, non etiam verſus obſtaculum tenderetur. Si quod corpus elaſticum comprimitur, flectitur, tenditur, uti veſica inflata, vel arcus, reactio, & reſiſtentia elaterii ſemper æqualis eſt vi comprimenti, flectenti, vel tendenti. Si enim reſiſtentia eſſet minor, id corpus magis cederet, magisque comprimeretur, flecteretur, vel tenderetur: ſi eſſet maior, non tantum comprimeretur, quantum reipſa ponitur. Si quod corpus movetur in fluido, uti ſi lapis per aerem, vel aquam decidit, eiusdem motus continuo impeditur, & hebetatur; quia progredi in fluido non poteſt, niſi eiusdem particulas ſuis locis exturbet, iis proin motum communicet, ac de ſuo motu ob reactionem partium fluidi aliquid amittat.

§. XXXII.

Corollarium III. *Obex immobilis* cenſetur, qui omnem vim alterius corporis incurrentis, vel ad motum tendentis ſuſtinet, ſive cuius reſiſtentia ſuperari nequit. Hinc

Digitized by Google

Hinc bina corpora æqualibus & oppoſitis viribus congreſſa perinde ſe habent, ac ſi quodvis reſpectu alterius eſſet obex immobilis, quia alterum alterius vim totam ſuſtinet.

Etſi actioni ſemper æqualis & contraria ſit reactio, tamen inferri nequit, inter corpus agens & patiens omnem motum ſemper elidi, & æquilibrium quoddam virium concipi debere. Nam ſi e.g. equorum currum trahentium vis maior eſt ea vi, qua currus, & ſcabrities plani equis reſiſtit, motus ſive ipſa translatio fit ea parte virium, quæ poſt ſuperatam reſiſtentiam reſidua eſt; igitur æqualitas actionis, aut reactionis duntaxat denotat, ab agente non maiores, aut minores impendi vires ad ſuperandam reſiſtentiam, quam ſit ipſa reſiſtentia, aut vires reſiſtentiarum omnium, nam corpus unum in alterum non ſemper agit tota ſua vi, ſed vi tanta preciſe, quanta eſt alterius reſiſtentia.

Scholion Generale.

Qui Newtonianas philoſophandi regulas recte expendit, indeque primam corporis naturalis ideam collegit, qui dein generales motuum leges, quæ inſtar axiomatum ſunt, ac modum rationes quantitatum exprimendi, tractandique formulas comprehendit, ſatis opinione mea ad ipſam percipiendam Mechanicam ceu primam Newtonianæ Phyſicæ partem accinctus iam eſt. Vis quidem, & veluti ſalubritas regularum Newtoni ipſo progreſſu magis magisque ſentietur, & a nobis poſt expoſitam generalem corporum attractionem pluribus exemplis & animadverſionibus exponetur. Nunc de reliquis, quæ adhuc tractanda ſunt, quædam adnotanda videntur.

I. In primis curandum, ut theorema generale, quod pro rationibus quantitatum determinandis demonſtravimus, penitiſſime intelligatur, ut ab eiusdem uſu, qui frequentiſſimus eſt, omnis pellatur obſcuritas. In hunc finem exercitationes ex Arithmeticorum libris, quorum ingens copia paſſim in manibus eſt, petendæ ſunt; quævis enim res, cuius valor, aut magnitudo ab aliis

Digitized by Google

ceu mensuris pendet, & per regulam auream directam vel inversam, simplicem vel compompositam exponitur instar effectus considerari potest: eae mensurae vero instar caussarum.

II. Proprietates generales corporum inductione collectas, ex quibus complexa earundem idea coalescit, recensui C. III. nempe extensionem, divisibilitatem, impenetrabilitatem, mobilitatem, & inertiam. Hinc corporis nomine non elementa eorundem simplicia, & indivisibilia, sed elementorum plurium inter se quaqua ratione cohaerentium, quae certas massulas conficiunt, congeriem denoto, ut multi alii hac aetate Philos. Sunt tamen, qui illa etiam elementa, quae omni carent compositione, & in partes reales secari nequeunt, corpuscula vocent, vel atomos, quasi insectilia; unde *corpuscularia*, & *Atomistica* Philosophia nomen traxit. Extensio corporum, de qua egi, simul *physica* est, quae ex elementis ob impenetrabilitatem extra se positis, at cohaerentibus oritur, simul *Mathematica*, quatenus trinam dimensionem admittit. Hanc Mathematicam extensionem Krafftius extensionis physicae basin adpellat, propterea generatim ideam extensionis a spatio divisibili & secundum trinam dimensionem extenso petamus, uti in Phil. Prima animadverti.

III. Ab extensione physica oritur corporum divisibilitas; neque enim ex elementorum idea, ullave alia caussa intelligi potest, plura elementa reipsa inter se distincta vi essentiae ita cohaerere, ut separari nulla ratione possint. Imo generalis corporum mobilitas, & indifferentia ad omnem locum, situmque, quae est absoluta eorundem proprietas ex natura elementorum, non ex compositionis modo dimanans, eam nobis certam opinionem ingerit, quidquid partibus realibus constat, id esse absolute divisibile, etsi fortassis quaedam extent moleculae corporum, compositae illae quidem ex pluribus elementis, sed quae nulla naturae vi dividi, vel mutari queant, ob quas deinde eaedem corporum species in hoc universo perpetuo conserventur, quasque *primigenias* plerique adpellant. Pro explorato habendum est, eam molecularum multo maiorem esse

subti-

Digitized by Google

ſubtilitatem, & in rariſſimis etiam corporibus numerum longe maiorem, quam imaginatione humana comprehendi queat. Cuius rei ſpecimina quædam ſupra collegimus maxime a ductilitate auri in tenuiſſima folia redacti, quorum uno ſi obducatur craſſius argenti filum, tum id diſtendatur in immanem longitudinem ad ſummam tenuitatem redactum, adhuc totum inauratum cernitur. Unico croci vel ſacchari toſti grano maximam aquæ copiam colore flavo tingimus. Pariter a tenuiſſima æruginis maſſula, quæ eſt quoddam ſalis virentis genus, immanis aquæ moles virorem contrahit. Plures exiguæ molis ſubſtantiæ longiſſimo tempore odorem emittunt, & ſpatia longe a ſe disiuncta inficiunt ſine ſenſibili ponderis imminutione. Parvitas animalium organicorum tanta eſt, ut quam plurima eorum millia per granum piperis liberrime excurrere, & vagari poſſint. De ſpatii, ac temporis diviſibilitate infinita alibi diſſeremus; nunc illud colligendum, ut caveamus diligenter, ne craſſis ſenſibus metiamur quidvis, & quæ palpari manibus, & videri oculis non poſſunt, ea propterea omnino non eſſe arbitremur; quæ res progreſſibus ſanæ philoſophiæ plurimum, & multo tempore adverſata eſt. Dein patet, multos, & varios eſſe particularum, ex quibus corpora componuntur, ordines; prima enim elementa inter ſe coniuncta moleculas efficiunt, quas diximus, primigenias figura, maſſa, diſtributione elementorum, volumine, & probabiliter etiam viribus magnopere diſcrepantes, totaque ſpecie diverſas: ſingulæ iſtarum ſpecies iterum combinantur diverſis poſſibilibus modis, & moleculas *ſecundi ordinis*, ac ſpecies denuo diverſas conſtituunt; ac ſimili modo fit tertius, & quartus ordo, atque ita deinceps, donec maſſa evadat ſenſibilis, id eſt, quæ organa ſenſuum noſtrorum ſingilatim ſatis adficere poſſit. Confirmat hosce ordines molecularum id, quod in ſanguine omnium animalium microſcopio inſpecto obſervatur; conſtat enim is globulis rubicundis, quorum ſinguli in ſex alios flaveſcentes, ac ſeroſos, & horum quivis in alios lymphaticos ſex diſſolvitur. Multorum ex hocce ordine molecularum explicatio phœnomenorum pendet, uti quod Chalybs igne duratus ſit durior alio non durato,

Digitized by Google

ſed a minore pondere adpenſo dirumpatur; id enim fieri neceſſe eſt, ſi ignis maiorem particularum ordinis inferioris ad ſe acceſſum, & coherentiam firmiorem efficiat, ob quam magis reſiſtant limæ, & maiorem duritiem prodant: at particulæ maiorum ordinum minus, ac antea cohæreant, proindeque minore adpenſo pondere ſeparentur. Ex his illud concludes, quod Staius L. I. Phil. Rec. a. v. 1401 animadvertit, inepte facere eos, qui integris corporibus necdum ſatis perſpectis plurimos minorum particularum ordines minime exploratos prætermittunt, & ſaltu quodam in intimam rerum ſubſtantiam, ac elementorum naturam penetrare geſtiunt; quam quidem rem plenam fore periculi ait, ut ubi arcibus intermediis a tergo prætermiſſis ad invadendam urbem regni caput illico cum omni exercitu, dux rei militaris imperitus ſe conferat.

IV. Ad corporum extenſionem, cum ea limites habeat, *figura* eorundem pertinet, ad diviſibilitatem vero, & mobilitatem *figurabilitas*, ſive capacitas recipiendi diverſas figuras manente eadem maſſa. Quocirca ſuperficies corporum, volumen ſeu moles, ac maſſa plurimum differunt. Si cubum cereum ſumas, cuius ſingula latera ſint duorum pollicum, ſuperficies quævis 4 continebit pollices quadratos, & ſuperficies totius cubi 24 poll. quadr. At moles 8 pollices cubicos continet. Pone hunc cubum mutari in parallelepipedum, cuius baſis ſit unius pollicis quadrati, longitudo vero 8 eiusmodi pollicum, erit ſuperficies tota 34 pollicum quadr. manente eadem maſſa, & numero pollicum cubicorum. Si corporum figuræ ſimiles ſunt, moles eorundem in triplicata ratione laterum homologorum, ſuperficies in duplicata creſcit, ut ſi cubi ponatur latus duplo, triplo, vel decuplo maius, erit ſuperficies quadruplo, noncuplo, centuplo maior, at moles ſeu volumen octo, viginti ſeptem, mille vicibus maior. Conf. Schol. §.XX.

V. Menſura denſitatis, ac raritatis corporum ex hydroſtatica determinabitur. Maſſam dixi numerum partium minimarum, vel elementorum, verbo, quidquid ad corporis conſtitutionem pertinet; ſed id ipſum valde incertum eſt, vagumque, quia plurimæ ſubſtantiæ

val-

Digitized by Google

valde diſſimiles ac peregrinæ in corporum poros penetrant. Id in corporibus animalium, plantis, & lapidibus plerisque etiam oculis patet; in cæteris idem Chymia exhibet. Aer meatus plurium corporum permeans, & ſiqua eſt aere ſubtilior ſubſtantia, ad corporis conſtitutionem non videtur pertinere, uti nec aqua ſpongiæ, cuius poros occupat, pars eſt; idem tamen aer ad fixam naturam redactus, uti Halleſius demonſtrat, multas ſubſtantias regni animalis, & vegetabilis magnam partem conſtituit: aliæ quoque ſubſtantiæ volatiles in corporum diſſolutione Chymica in fumos, & halitus abeunt: ſanguis & lymphæ variæ in corpore animali, ſucci nondum concreti in plantis ſine dubio ad conſtitutionem eorum corporum pertinent. Quapropter ne penitus vaga ſit maſſæ æſtimatio, ea ex pondere determinatur, ut quidquid corpus inſtar partis conſtituere cernitur, & cum illo gravitat, maſſæ nomine veniat: hæc ipſa autem maſſa alia conſtans eſt, alia variabilis, uti cum humores maiore aut minore copia corpora obſident.

VI. *Soliditatis* vox aptior quibusdam videtur ad exprimendam vim illam, ſeu proprietatem conſtantem, qua ſe corpora ex eodem loco excludunt mutuo, quam impenetrabilitatis nomen, quod duntaxat negativum quid præ ſe fert. Eius idea, uti & extenſionis iam inde ab utero materno nobis videtur ingeri, & conſtanter firmatur in animo, cum quodvis corpus premimus, tangimus, percutimus. Si in corporibus nihilo plus reſiſtentiæ ſentiremus, quam exhibet imago a cavo ſpeculo reddita & in aere pendula, extenſionis, non item ſoliditatis in nobis idea foret. Nunc vero dubium non eſt, eam omnibus plane corporibus competere, nec inductioni obeſt permixtio liquorum, vel penetratio eorundem in corpora ſolida; hæc enim poroſitati potiſſimum adſcribenda eſt, uti cum aqua in ſenſibiles ſpongiæ poros inſinuatur. Id generale eſt huius generis inductionibus omnibus, ut, ſi aliqua proprietas in plurimis caſibus obſervetur: in aliis vero, ubi contrarium videtur evenire, apta ratio in promtu ſit, qua cum illa proprietate contrarii caſus conciliari queant, inductione ſtandum ſit, etſi poſitive probari non ſemper

Digitized by Google

possit, rem in iis casibus contrariis ita se habere. Sed hoc quidem loco ratio petita a corporum porositate perquam manifesta est; quævis enim corpora in tenues lamellas secta lucem per poros transmittunt: pariter igne incalescunt omnia, substantia ignea per meatus irrumpente: si foramini cameræ obscuræ digitus obiicitur, ipse adeo pellucidus adparet: Mercurius uti per metalla omnia excepto ferro; ita humanam quoque cutem, & corium quodcunque penetrat: aqua non modo spongiam, sed omnes membranas animalium, omnes partes vegetabilium, item saccharum, salia, cineres intrat, & facta pressione vel contusione per poros cupri, stanni, plumbi, auri quoque maxime solidi exsudat. Si in tubum vitreum continentem oleum vitrioli infundas aquæ cylindrum, cuius altitudo in eo tubo explorata tibi sit, sedata effervescentia minor observatur altitudo, ac summa eorum liquorum exigit. Spiritus fumans sulphureus volatilis argentum multis etiam linteis obvolutum tingit colore fusco. Porro rationem, cur liquores iidem alia corpora permeent facile, & cito, alia non item, vel tempore longiori, non a sola pororum, aut particularum fluidi figura, magnitudine aut proportione quadam pendere alio loco ostendemus; sed nempe leges mechanicæ a viribus inertiæ potissimum pendentes ante exponendæ sunt, quam decidi queat, aliæne præterea, aut quales in natura vires extent.

VII. Leges generales motus quanti usus, ac momenti sint, tota mechanica faciet palam. Æqualitatem actionis & reactionis ubivis deprehendimus. Si malleo ferreo vitrum percutiam, ictus tam in malleo, quam vitro recipitur; neque frangitur vitrum, quod maior vis percussionis eidem insit, quam malleo, sed quod partibus minus cohærentibus constet; si vitro aliove fragili corpore percutiam incudem, vitrum frangetur, seu corpus percutiens. De corporum inertia plura exempla colligemus aptiore loco. Nunc illud observandum, plerosque omnes non modo conservationem status, verum & resistentiam, quæ fit in mutatione status aliunde inducta, vi inertiæ adscribere. Krafftius in Præl. Acad. P. I. §. 41. inertiam adpellat *vim corpori insitam resistendi cuivis mutationi*; ac §. 84 *eandem prin-*

Digitized by Google

principium esse ait resistendi omni mutationi status sui, ex quo nomen cuiusdam vis meretur. Eadem cum sit absoluta proprietas, crescit crescente numero elementorum, & cæteris paribus massæ proportionalis est.

SECTIO II.

De Motu Corporum Rectilineo.

CAPUT I.

De Motu Simplici, & Æquabili.

Expositionem theoriæ motuum a simplicissimo motus genere, & planissimis principiis in Mechanica ordimur, a quibus paulatim ad intricatissimos motus etiam corporum cælestium, maximeque complicata naturæ phænomena explicanda pervenitur. Quapropter non leviter percurrenda hæc tractatio est, etsi perfacilis captu sit.

§. XXXIII.

Definitio I. Motus *simplex* est, qui ab unica oritur vi impressa, seu determinatione: *compositus*, qui a pluribus. Eiusmodi motus secundum primam generalem legem §. XXIV. fit in directum, sive continuatur per eandem lineam, per quam vis imprimens tendit, idemque est uniformis, sive *æquabilis*, quo nimirum intra æquale tempus semper æquale spatium, tempore duplo, vel triplo spatium duplum, vel triplum conficitur. Ex qua notione manifestum est, in motu æquabili seu uniformi spatia esse temporibus proportionalia.

§. XXXIV.

Definitio II. Ut errorum, & æquivocationum periculum vitetur, duplex distinguenda est corporum ce-

Digitized by Google

leritas, primo *actualis*, cuius idea eſt relativa, & in relatione ſpatii percurſi ad tempus, quo illud percurritur, ſita eſt. Hæc actualem motum, quo certo tempore certum ſpatium conficitur, involvit, nec unico momento haberi vel concipi poteſt, ſed tempus quoddam continuum exigit. Secundo *potentialis*, ſive ea, quæ in mobili ineſſe concipitur, determinatio percurrendi certum ſpatium certo tempore, niſi quid obſtet. Hæc determinatio ſingulis momentis, intra quæ motus durat, corpori ineſſe, ſive præſens eſſe concipitur.

Quando de celeritate ſermo eſt, fere actualis, non potentialis intelligi ſolet, quemadmodum a nobis deinceps intelligetur.

§. XXXV.

Propoſitio. *Celeritates corporum in motu æquabili ſunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum, & reciproca temporum.* Patet ex notione celeritatis, quæ involvit relationem ſpatii ad tempus, ita, ut creſcat creſcente ſpatio, & decreſcente tempore; quare ſecundum theor. general. §. XII. erit directe ut ſpatium, & reciproce ut tempus, ut ſit $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, unde formula ſit $C = \frac{S}{T}$.

Vulgo etiam velociter moveri dicitur, qui brevi tempore magnum ſpatium percurrit; tarde, qui longo tempore ſpatium exiguum; velocitas igitur ea adfectio eſt, quo certo tempore certum ſpatium percurritur; ut autem menſura quædam celeritatis habeatur, concipiendum eſt, motum eſſe æquabilem, ſive celeritatem durante motu, qui celer, vel tardus dicitur, manere conſtantem. Sit $S = 12$. $T = 4$. $s = 10$. $t = 5$, *erit* $C : c = \frac{12}{4} : \frac{10}{5} = 3 : 2$. *Si mobile A conficit quinque leucas intra tres horas, & mobile B novem leucas intra quatuor horas, erit celeritas primi ad celeritatem ſecundi, ut* $\frac{5}{3} : \frac{9}{4}$. *Vel ſi unus intra 4 dies conficit 12 milliariaria, alter intra 5 dies 10 milliaria, erit celeritas primi ad celeritatem*

ſecun-

secundi ut 3 : 2. *Et si A intra* 8'' *conficit* 1800 *pedes*, *& B intra* 5'' *pedes* 600, *erunt celeritates*, *ui* 15 : 8.

§. XXXVI.

Corollarium I. Quia $C = \frac{S}{T}$, idcirco si spatium est constans, erit $C = \frac{1}{T}$, & si tempus est constans, erit $C = S$, h. e. Si spatia confecta sunt æqualia, celeritates, ac tempora reciprocant; & spatia æquali tempore motu æquabili percursa sunt ut celeritates. Si tabellarius A singulis diebus conficit 6 leucas, & tabellarius B singulis diebus 8 leucas, erit celeritas A ad celeritatem B ut 6: 8 = 3 : 4.

§. XXXVII.

Corollarium II. Ex formula $C = \frac{S}{T}$, fit $CT = S$ (§. XVI. n. 1.) hoc est, spatia motu æquabili confecta sunt in ratione composita temporum, & celeritatum. Si celeritas ponitur constans, erit $S = T$, h. e. Spatia eadem celeritate confecta sunt, ut tempora; & si tempus est constans, erit $S = C$, sive spatia eodem tempore percursa motu æquabili sunt ut celeritates. Si autem celeritates, ac tempora reciprocant, spatia confecta sunt æqualia; nam $S : s = CT : ct$; ex hyp. $C : c = t : T$, ac proin $CT = ct$; igitur & $S = s$.

Sit $C = 6$. $T = 9$; $c = 18$, $t = 3$; erunt spatia utrinque 54, id est, æqualia; nam $6 : 18 = 3 : 9$. At sit $C = 3$, $T = 2$; $c = 7$, $t = 5$. erit $S : s = 6 : 35$.

§. XXXVIII.

Corollarium III. Ex formula $C = \frac{S}{T}$, fit $T = \frac{S}{C}$, h. e. tempora motus æquabilis sunt in ratione composita ex directa spatiorum, & reciproca celeritatum; ac si spatia confecta sunt eadem, erit $T = \frac{1}{C}$, si spatia confecta sunt æqualia, tempora sunt reciproce, ut celeritates; & si celeritas est constans, erit $T = S$, tempora directe ut spatia.

§. XXXIX.

Corollarium IV. Quia $C = \frac{S}{T}$, & $Q = M\,C$, ac proin $C = \frac{Q}{M}$ §. XVI. n. III. erit $\frac{S}{T} = \frac{Q}{M}$, & $\frac{M\,S}{T} = Q$, h. e. Quantitates motus sunt in ratione composita ex directa massarum, & spatiorum, & reciproca temporum.

Sit $M = 3$. $S = 12$. $T = 4$; & $m = 7$. $s = 10$. $t = 5$. *erit* $Q : q = \frac{3 \cdot 12}{4} : \frac{7 \cdot 10}{5} = 9 : 14$.

Ex formula $Q = \frac{M\,S}{T}$, *si unus terminus comparationis ponitur constans, tres aliæ formulæ progignuntur, ut adeo 4 sint formulæ de quantitate motus; eodem modo deducuntur 4 formulæ de massis, 4 de spatiis, 4 de temporibus, ut universe, cum quatuor adsint literæ, 16 formulæ seu totidem nova theoremata habeantur. De celeritate supra habuimus tres formulas posito uno termino comparationis constante, tres de spatio, & tres de tempore, universe 9 theoremata, quæ ope calculi literalis paucioribus prope literulis demonstrantur, quam alii, qui de singulis singulas demonstrationes sine subsidio eius calculi conficiunt, paginis indigent. Omnes autem hæ formulæ ex una fundamentali oriuntur, vel ex combinatione plurium fundamentalium, ut adeo, cum formula fundamentalis ipsa se vi notionis, aut demonstrationis offerat, citra incommodum reliquæ mente teneri possint.*

§. XL.

Digitized by Google

§. XL.

Corollarium V. Quemadmodum omnis quantitas geometrice per dimensionem quandam e. g. per lineas, aut figuras exhibetur; ita si tempus exhibetur per unam lineam, celeritas per aliam normaliter adplicatam, spatium exhibebitur per rectangulum, eritque spatiorum ratio eadem, quæ rectangulorum; & sicut bina rectangula æqualia sunt, si bases, & altitudines reciprocant; ita & spatia eadem erunt, si celeritates sunt reciproce ut tempora, quemadmodum indicavimus cor. II. §. XXXVII.

§. XLI.

EXERCITATIO DE MOTU ÆQUABILI.

Problema I. *Data velocitate unius mobilis una cum velocitate alterius, & datis intervallis temporum, ac locorum, a quibus incipiunt moveri, determinare tempus, quo conveniunt.* Moveantur globi A & B versus C. Tab. I. Fig. I. Sit ea velocitas globi A, ut intra $1''$ conficiat 10 ped. Velocitas globi B, ut intra $5''$ conficiat 24 ped. Globus B autem uno minuto, sive $60''$ prius moveri cæpit, & initio motus sui 10 pedibus iam propior est metæ C, in qua concipiuntur convenire. Sit x tempus, quo movetur globus A, qui magis distat, & tardius motum inchoat. Erit tempus, quo movetur globus B $= x + 60''$. Spatium ab utroque confectum erit ut celeritas ducta in tempus, secundum formulam $S = C\ T$. Igitur spatium globi A $= 10 \times x$. & spatium globi B $= \frac{24}{5} \times 60 + \frac{24}{5} \times x$. Manifestum est, si a distantia vel spatio a globo A remotiore confecto subtrahatur intervallum datum A B $=$ 10 ped. fore spatia a globis conficienda, donec conveniunt, æqualia. Igitur erit $10\,x - 10 = \frac{24}{5} \times 60 + \frac{24x}{5}$. Unde facta reductione secundum prima elementa calculi literalis fit $x = 57\frac{4}{13}$, quod in minutis secundis exprimit tempus, post quod globi conveniunt.

§. XLII.

Digitized by Google

§. XLII.

Corollarium I. Problema generale facile adplicatur ad particulare: *Si sol quotidie unum gradum conficit, luna autem tredecim, & tempore quodam sol ponatur in principio cancri, atque post 3 dies luna in principio arietis, quaeritur tempus coniunctionis proxime futurae.* Est igitur celeritas solis $= 1$, lunae 13. Distantia locorum ab ariete ad cancrum per 3 signa $= 90^{\circ}$. Intervallum temporis $= 3$. Sit tempus, quo ab ariete luna ad metam coniunctionis accedit, $= x$. Erit spatium a luna confectum $13x$, spatium a sole confectum $x + 3$. Si a spatio remotioris subtrahatur locorum distantia, ea spatia reducentur ad aequalitatem; unde fit

$$13x - 90 = x + 3$$

$$93 = 12x$$

$$x = 7\tfrac{3}{4}.$$

§. XLIII.

Corollarium II. Multo facilius tempus, quo bina mobilia conveniunt, reperitur, si nullum est intervallum locorum, sed solius temporis. Ponatur enim quispiam Augusta Romam abiisse, qui singulis diebus conficit 6 milliaria; eodem post biduum pergit alius, qui diebus singulis conficit 8 milliaria, quaeritur tempus x, post quod hic illum adsequetur. Erit spatium primi $= 6 \times 2 + 6 \times x$. Spatium secundi $= 8x$. Adparet haec spatia ab utroque confecta, cum convenerint esse aequalia, unde reperitur $x = 6$. Hoc est, post 6 dies posterior adsequetur priorem.

§. XLIV.

Corollarium III. Iisdem datis, quae in problemate indicata sunt, invenire spatium a remotiore, vel propiore conficiendum, donec conveniant. Facile id quidem reperitur invento tempore, quo elapso conveniunt;

Digitized by Google

niunt; cum enim motus ponatur æqualibilis, ac proinde ſpatia in eodem mobili ſint ut tempora; fiat in caſu problematis analogia: globus A intra 1″ conficit 10 pedes, intra $57\frac{4}{13}$ quot pedes conficiet, nempe $573\frac{1}{13}$. Pariter in caſu coniunctionis ſolis & lunæ fiat analogia: luna intra 1 diem conficit 13°, quot gradus intra dies $7\frac{3}{4}$ conficiet? nempe $100\frac{3}{4}$, h. e. ab eo tempore, quo luna fuerit in principio arietis, nimirum poſt triduum, luna debebit emetiri 3 ſigna, ſive 90°, & præterea $10\frac{3}{4}$ grad. Coniunctio igitur fiet in $10\frac{3}{4}$ gradu cancri. Denique in caſu coroll. II. is, qui ſingulis diebus conficit 8 milliaria, intra 6 dies conficiet 48.

Eſt alia quoque ratio inveniendi ſpatii a remotiore confecti, ſi tempora reducuntur ad æqualitatem. In caſu coroll. II. dicatur ſpatium conficiendum ab eo, qui tardius iter ingreditur x; *cum ſit* $T = \frac{S}{C}$; *erit tempus eiusdem* $\frac{x}{8}$. *Tempus alterius* $\frac{x}{6}$. *Si differentia data temporis addatur breviori, nempe ei mobili, quod tardius iter ingreditur, tempora fient æqualia; unde fit* $\frac{x}{8} + 2 = \frac{x}{6}$ & $x = 48$. *In caſu coniunctionis ſolis & lunæ; cum hæc longius a meta diſtet, dicatur hæc diſtantia* x; *erit diſtantia ſolis a loco coniunctionis* $x - 90$. *Porro quia luna intra diem conficit* 13°, *erit tempus, quo conficit ſpatium* $x = \frac{x}{13}$, *& tempus quo ſol conficit ſpatium* $x - 90 = x - 90$. *Cum epocha motus lunaris ſit ſerior, differentia temporum, ut evadant æqualia, addenda eſt ad tempus lunæ; unde fit* $\frac{x}{13} + 3 = x - 90$; *factaque reductione reperitur* x *ſeu ſpatium a*

luna

luna conficiendum $100\frac{1}{4}$ *ut supra. Eodem modo solvitur celeberrimum problema de Achille, & testudine. Ponatur Achilles integro milliari distare a testudine, & percurrat intra horam milliare unum; testudo autem, cum centuplo minorem habeat celeritatem, intra horam duntaxat* $\frac{1}{100}$ *milliaris conficiat; quaeritur spatium* x, *quod emetiri Achilles debet, donec testudinem adsequatur. Achilles* 1 *milliare conficit hora* 1: *igitur spatium* x *conficiet tempore* x; *nam* $1 : 1 = x : x$. *Contra spatium a testudine conficiendum est* $x - 1$. *Quaeratur tempus, quo hoc spatium emetitur;* $\frac{1}{100}$ *milliaris conficit hora* 1: *igitur spatium* $x - 1$ *conficiet tempore* $x - 1 : \frac{1}{100} = 100x - 100$. *Haec tempora, cum testudo & Achilles una incipiunt moveri, sunt aequalia: consequenter* $x = 100x - 100$; *&* $99x = 100$; $x = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}$ *hoc est, Achilli percurrendum est unum milliare, & nonagesima nona milliaris pars, donec testudinem adsequatur.*

§. XLV.

Problema II. *Data velocitate unius mobilis unacum tempore ab initio motus elapso, donec alterum moveri caeperit, invenire velocitatem ab alio adhibendam, ut dato tempore illud prius adsequatur.* Viator singulis diebus conficit 6 milliaria $= a$; alius post dies $4 = c$ idem iter ingreditur, quaeritur, quot milliaria x absolvere debeat diebus singulis, ut priorem adsequatur intra dies $12 = b$. Cum ab utroque mobili conficiendum sit idem iter usque ad concursum, habetur aequatio ex aequalitate spatiorum, quae exprimuntur per CT. Erit igitur spatium primi $= a \times c + a \times b$. Spatium secundi $= bx$. Proin $ac + ab = bx$, & $x =$

$$\frac{ac + ab}{b} = \frac{24 + 72}{12} = 8.$$

§. XLVI.

Problema III. *Datis velocitatibus duorum mobilium, ac dato intervallo locorum, quo distant, & intervallo temporis, quo ex oppositis partibus versus se congrediun-*

tur,

Digitized by Google

tur, invenire tempus, quo sibi occurrunt. Tale Problema Newtoni, quod inter 16 arithmetica problemata est quintum ordine in hanc sententiam: Si duo tabellarii A, & B 59 milliaribus distantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis; ac B una hora tardius iter instituit, quam A, quæritur primo tempus, quo elapso sibi occurrunt, dein longitudo itineris, quod A conficiet, antequam conveniat B. Manifestum est, spatia ab utroque confecta, si sibi addantur, esse æqualia dato intervallo locorum: ea autem spatia inveniuntur ducendo datam celeritatem in tempus x, quo utrumque in motu est, ac præterea celeritatem alterius, quod præ altero motum inchoavit, ducendo in tempus datum, quo præcessit. Igitur spatium quod A conficit tempore x, erit $\frac{7x}{2}$, & præterea pars spatii, quam confecit una hora citius inchoando motum erit $= \frac{7}{2}$ nam si intra 2 hor. conficit 7 milliaria, intra 1 hor. conficiet $\frac{7}{2}$. Spatium autem confectum a B erit $\frac{8x}{3}$ secundum formulam $S = C\,T$; est autem hic $C = \frac{8}{3}$, & $T = x$. Consequenter fit $\frac{7}{2} + \frac{7x}{2} + \frac{8x}{3} = 59$, & $x = 9$ hor. quibus una moventur; proin tempus totum, quo movetur $A = 10$; ex quo reperitur longitudo itineris ab A conficiendi, donec adsequatur B; nam $2 : 7 = 10 : \frac{70}{2} = 35$. Spatium confectum a B erit $59 - 35 = 24$.

CAPUT II.

De Resolutione, & Compositione Motuum, Viriumque.

Motum compositum hic considero eum, qui ex binis oritur viribus impressis, quæ vires componentes vocantur; facile enim

ad

Digitized by Google

ad plures vires, aut quotcunque datas dicta transferri poterunt. Inscribitur autem hæc expositio de resolutione, & compositione motuum, propterea quod compositio eorundem sine resolutione satis explicari nequeat opinione mea, quemadmodum mox ostendam.

§. XLVII.

Definitio. Si motus cuiusdam puncti refertur ad diversas plagas, vel diversa plana, a quibus punctum mobile distantias suas mutat eodem tempore, & per eundem motum, is motus dicitur *resolvi*. Est igitur resolutio motus nihil aliud, nisi relatio distantiarum puncti mobilis ab aliis, atque aliis planis lineis expressa. Hæc definitio, etsi pro arbitraria sumi possit, tamen veritate nititur, & ex genuina loci, motusque notione deducta est. Incedat enim (Tab. I. Fig. II.) punctum P per rectam P O; dico eius motum non modo ad planum M N, quod ad directionem P O normale est, sed etiam ad plana A B, S V &c. referri posse, atque eo ipso in plures alios motus resolvi. Nam punctum, quod movetur, seu locum mutat, distantiam a diversis planis, quæ circumposita sunt, vel concipi possunt, eodem tempore non mutat eodem modo. Dum enim ex P venit in O, ad planum M N accessit spatio P O, ad planum A B spatio P D, ad planum S V spatio P C; sicut igitur distantiæ puncti, dum est in P, ab hisce planis diversæ sunt, ita per eundem motum ex P in O diverso modo mutantur. Si igitur motus P O refertur ad plana S V, & A B, is dicitur resolvi in motus P C, & P D; quæ exprimunt spatium, per quod punctum P per motum P O ad ea plana accessit; nam distantiam inter punctum P, a quo mobile discessit, & datum planum S V, vel A B ad quod accessit, metitur linea ex eo puncto ad datum planum normalis, quæ sola est determinata mensura spatii confecti; cum infinitæ obliquæ lineæ magnitudine differentes ex aliquo puncto ad idem planum duci queant.

§. XLVIII.

Corollarium I. Quoniam vis *eiusdem* corporis seu puncti ex celleritate, quam habet, celeritas ex spatio

intra

intra datum tempus confecto æstimatur; perspicuum est, puncti P per PO incedentis pro varia relatione ad varia plana variam esse celeritatem, & vim; nam relate ad planum MN spatium confectum, celeritas & vis exprimitur normali PO, relate ad planum SV spatium, celeritas, ac vis exprimitur normali PC, & relate ad planum AB spatium, celeritas & vis exprimitur normali PD; igitur idem motus, eadem celeritas, & vis puncti P revera multiplex est eodem tempore pro multiplici ad diversa plana relatione. Atque ut nullus dubio relinquatur locus, concipiatur Tab. I. F. III. scala Pm, no, qr &c. cuius gradus rectis PC, & PD alternatim paralleli sunt, ita ut summa omnium progressuum Pm, no, qr &c. rectæ PC parallelorum eidem rectæ PC æqualis sit; & summa omnium progressuum mn, oq &c. rectæ PD parallelorum eidem rectæ PD æquetur; manifestum est, mobile per hosce gradus descendens simul accedere ad planum DO spatio $=$ PD, & ad planum CO spatio $=$ PC. Si iam magnitudo horum graduum magis, magisque identidem minuitur, eorumque numerus augetur, abibit denique hæc scala in rectam PO, & tamen, si mobile per PO incedat, summæ progressuum rectis PD, & PC parallelorum iisdem rectis PD, & PC æquales erunt. Patet igitur quod corpus ex P in O perveniens simul accedat ad planum CO spatio, celeritate, ac vi $=$ PC, & ad planum DO, celeritate, ac vi $=$ PD.

Cavendum, ne numerus & summa progressuum cum magnitudine eorundem confundatur. Mobile per PO incedens totidem progressus facit versus planum DO, quot faceret incessu per PD, ac totidem progressus versus planum CO, quot faceret incessu per PC. At quia per PO incedens eodem tempore *ad planum DO & CO accedit, hinc magnitudo alicuius progressus in diagonali nunquam magnitudini progressuum respondentium per latera simul sumtorum æqualis est. Universe numerus quantitatum infinitesimarum a magnitudine earundem distinguendus est.*

§. XLIX.

Corollarium II. Ex his intelligitur, quod resolutio motuum, ac virium, ut ea supra a nobis definita est, nihil fictitium contineat, vel imaginarium, sed reipsa in natura detur. Nam mobile per eundem motum distantias suas a diversis planis non fictitie, sed reipsa mutat; igitur idem motus ad diversa plana referri, & potest & debet; quemadmodum enim locus alicuius puncti per distantias a diversis punctis, vel planis determinatur; ita mutatio loci, sive motus non nisi per distantiarum mutationem determinari potest, ac debet. Ea mutatio distantiarum fit eodem tempore; quia pro diverso planorum situ ad alia maiore spatio, ad alia minore, & proin maiore, vel minore celeritate ac vi eodem tempore accedit. Denique ipsa motuum & virium compositio, quae omnium consensu in natura locum habet, sine resolutione eorundem intelligibili modo explicari nequit, uti mox palam fiet.

§. L.

Axioma I. Quotiescunque vires componentes in eandem lineam rectam, eandemque plagam conspirant, motus compositus fit summa virium componentium: si in eandem lineam rectam, sed in plagas oppositas, motus compositus fit differentia virium componentium; ac si hae aequales sint, ut differentia sit zerus, motum efficiunt nullum. (§. X.) Nam vires in eandem rectam conspirantes sunt caussae homogeneae, quarum effectus, si directe agunt, est ut summa: si reciproce; ut differentia earundem.

§. LI.

Axioma II. Quodvis corpus eodem tempore impulsum binis viribus aequalibus, & oppositis, non obstante earum virium aequalitate & oppositione simul vi alia impelli, moverique potest quavis alia directione media. Punctum P T. I. Fig. IV. simul impulsum viribus m P, & n P, quae aequales, & oppositae sunt, sive quae in eandem rectam, sed oppositas plagas tendunt, ne-

quit

quit secundum alterius utrius directionem moveri (Ax.I.) ac nihilominus impelli, & moveri potest directione PO, vel P q; quod facile intelligitur, si planum, in quo corpus P constitutum, iisque viribus æqualibus & oppositis simul adfectum ponitur, eodem tempore quavis alia directione PO, vel P q transferri, concipitur.

Quod vires m P, & n P æquales, & oppositæ directionem in puncto P efficiant nullam, ac proinde neque motum, non solum ex principio rationis sufficientis negativo deducitur, quasi nulla esset ratio, cur P potius ad m, quam ad n accedat. Nam vires m P, & n P, dum æquales, & directe oppositæ ponuntur, hunc ipsum effectum habent, ne mobile secundum alterius directionem moveatur, vel ad alterum accedat.

§. LII.

Propositio. *Siquod corpus simul impellitur binis viribus, quæ sunt ut latera cuiusdam parallelogrammi, motu composito describet diagonalem eiusdem, quæ situ directionem, & longitudine celeritatem motus compositi exhibet.* Impellatur (T. I. F. V. & VI.) mobile diversis viribus, quæ directione & magnitudine sint ut AB, & AC; incedet per AD celeritate, quæ est ad celeritatem virium componentium seorsim AB vel AC, ut AD: AB vel AC. Demonstratur. 1. Construatur super rectas AB, AC parallelogrammum ABCD, ducaturque diagonalis AD. In hanc, si opus sit, productam ex B, & C demittantur perpendicula Bm, Cn; ac super rectas AB, Bm, & AC, Cn nova fiant parallelogramma Pm, & Qn. Quoniam (F.V.) AB = CD, & ang. BAm = ang. CDn; anguli vero ad m, & n ex constr. recti; erunt triangula ABm, CDn æqualia per congruentiam ob omnes angulos utrinque æquales, & unum latus; eritque Bm = Cn, & consequenter PA = AQ; præterea Am = nD. Idem patet in casu Fig. VI. Nam primo anguli ad m, & n recti sunt ex constr. & rectæ AB, CD æquales & parallelæ; hinc erunt anguli BAm, & CDn utpote alterni externi æquales.

2. Secundum dicta corpus per vim AB simul accedit ad planum PB celeritate, ac vi = AP, & ad

planum B m celeritate ac vi = A m; similiter per vim A C accedit ad planum Q C celeritate ac vi = A Q, & ad planum C n celeritate ac vi = A n; sunt autem celeritates ac vires A P, A q æquales, & oppositæ; quare extincto earum effectu, seu potius æquilibrato neutri obsequetur; restat igitur motus secundum residuas vires A m, & A n in eandem lineam & plagam tendentes in casu Fig. V. in oppositam vero plagam in casu F. VI. Est vero utrinque A m = n D; quapropter in priore casu manet summa virium A m + A n = A n + n D = A D; & in posteriore A n — A m = A n — n D = A D, quæ utrinque est diagonalis; eodemque tempore motu æquabili describitur, quo per vires componentes seorsim A B, vel A C eædem rectæ A B, vel A C describerentur; igitur diagonalis situ directionem, & longitudine celeritatem motus compositi exhibet.

Quivis animadvertet, quid ad compositionem motuum explicandam eorundem resolutio conferat. Cum enim diagonalis motum compositum exprimens nunquam summæ laterum æqualis sit, ratio reddenda est, an, & quantum vires componentes in eadem linea recta versus eandem plagam conspirent, & versus oppositas plagas oppositæ sint, atque ita oppositæ, ut celeritas motus compositi præcise tanta sit, quantam diagonalis repræsentat. Hæc ratio distincte explicari nequit, nisi adhibita motuum resolutione. Illud quoque animadvertitur, demonstrationem propositionis casum acuti, & obtusi anguli virium componentium continere; in casu anguli recti (quamquam admodum improbabile, angulum virium geometrice rectum esse) constructio, & demonstratio eodem modo peragitur, ut in acuto angulo. Tota vero hæc diductio de resolutione, & compositione motuum, quemadmodum plurimæ aliæ theoriæ in Phil. nat. etsi externam veluti speciem a Mathesi accipiat; tamen omnino physica est, & principiis physicis ac realibus nixa; quod ut clarius perspiciatur, quædam dubia ante resolvenda sunt, quam ad corollaria, & adplicationem propositionis veniatur.

§. LIII.

Digitized by Google

§. LIII.

Resolvuntur Dubia.

I. *Ponatur F. II. punctum P unica vi impressa, & directione P O urgeri versus planum S V; erit is motus simplex, utpote ex unica & simplici ortus determinatione; & tamen secundum dicta resolvi potest in motum P C perpendicularem ad planum S V, & motum P D ei plano parallelum: igitur hæc resolutio, quæ motum simplicem ex binis diversis motibus P C, & P D productum fingit, revera fictitia est.* R. d. c. Hæc resolutio fictitia est, h. e. Si vis unica simplex P O concipitur orta, vel composita ex pluribus P C, & P D, quibus coniunctim æquivalet, tum vero aliquid fingitur, C. C. si motus simplex ad alia, atque alia plana diversum inter se situm habentia refertur, a quibus eodem tempore distantia non eodem mutatur modo, tum etiam aliquid fingitur, n. c. Aliter ego quidem, ac passim fieri solet, motuum resolutionem definio; & quamvis nominis definitio arbitraria sit; tamen id, quod definitio continet, revera consentaneum esse rerum naturæ, & distinctis loci notionibus ostendi. Quantumcunque ideas nostras de loco, motu, celeritate excutiamus, nihil extricabimus profecto, nisi relationes distantiarum ab assumtis punctis, vel planis, quas intra datum tempus per motum mutari concipimus. Celeritas, siquod tempus constans sumitur, ex confecto spatio, spatium vero confectum ex mutatione distantiarum, distantiæ, si de planis sermo est, ex normalibus in ea demissis æstimandæ sunt. Siquis motus ad datum planum est normalis; omnes eundem, ac celeritatem illius per lineam normalem exprimunt; fieri tamen potest, ut ob alium motum ipsi plano, & corpori incidenti communem directio mobilis in spatio absoluto admodum diversa & varia sit. Quapropter de spatio confecto, celeritate, ac vi non nisi relate ad assumtum aliquod planum disseri potest.

II. *Illa plana fictitia sunt, neque existunt in natura.* R. Si hæc theoria motus compositi adplicatur ad facta naturæ, quodvis mobile per motum suum distantiam a circumpositis corporibus, vel planis reipsa mutat,

tat, non mutare fingitur: quando sphæram mundanam secamus diversis planis circularibus, etsi hæc imaginaria sint; tamen positiones siderum, & relationes distantiarum, ac motuum, ad quas determinandas eos circulos assumimus, propterea fictitiæ haud sunt. Nempe opus est nobis ad mentis conceptus cum aliis communicandos aptis vocabulis: opus est ad quantitates determinandas certis mensuris; ob quam caussam etiam ad spatia, celeritates, ac vires determinandas certa plana, ac certas a planis distantias, & distantiarum relationes sumere cogimur.

III. *Paradoxum videtur, eidem mobili e.g. puncto P, quando incedit per PO, multiplicem celeritatem eodem tempore inesse, aliam relate ad planum MN, aliam relate ad planum SV, aliam relate ad planum AB.* R. Esset id non modo παράδοξον, sed prorsus ἀδύνατον, si *idem* mobile relate ad *idem* planum simul celeritate A, simul celeritate B poneretur accedere; at referendo motum ad alia, atque alia plana tam parum id mirum cuiquam videri potest, ac quod idem corpus a diversis planis diversum inter se situm obtinentibus eodem tempore non distet æqualiter; ex hoc enim necessario consequitur, ut inchoato motu nec eodem modo distantias suas ab iisdem mutet; quod ex idea situs, ac celeritatis perspicuum est.

IV. *Si idem motus ad alia atque alia plana referri potest, nulla est ratio, cur ad explicandam compositionem motuum* (T. I. F. V.) *motus AB præcise resolvatur in motus AP, & Am: motus AC vero in motus AQ, & An.* R. Quia corpus eodem tempore nequit per diversas, aut oppositas vias incedere, idcirco ut vera ratio motus compositi, eiusque celeritatis, ac directionis adsignetur, motus diversi sic resolvendi sunt, ut adpareat, quatenus singuli in eandem lineam & versus eandem plagam conspirent, & quatenus in eadem linea, sive e diametro oppositi sint. Porro motus AB, & AC in eandem lineam, ac plagam conspirant secundum motus Am, & An, & oppositi e diametro sunt relate ad motus AP, & AQ; ex illis fit summa, ex his differentia = o in nostro casu. Atque id quidem, quod

Digitized by Google

quod ex motibus penitus conspirantibus summa, ex oppositis differentia sumenda sit, omnino perspicuum est, certumque; quæ sit ratio virium sub quodam angulo concurrentium, haud paullo obscurius est, quod vel ipsæ auctorum diversæ expositiones ostendunt. Quapropter quod obscurum incertumque est, ad certa, & manifesta principia reducere conati sumus.

V. *Motuum compositio lex naturæ dici potest, atque in ea acquiesci citra aliam expositionem.* R. Compositio non est magis lex naturæ, quam motus curvilineus, qui pariter compositus est, & tamen curvilinei motus ratio reddenda est a Philosopho. Sunt nempe quædam naturæ leges, quas primitivas adpellavi in Philos. Prim. (§. XLI.) in quibus etiam philosopho citra ulteriorem investigationem acquiescendum puto, propterea quod nulla in hoc mortali statu patere via videatur, qua ad primum earum fontem, unde dimanant, perveniri queat. At vero sunt alia theoremata Mechanices, quorum ratio longius arcessenda est, ut simplicitas, atque uniformitas naturæ in maxima effectuum varietate intelligatur. Hæc quidem lex de compositione motuum in motum per diagonalem ad corporum inertiam pertinet, ob quam materia ad quamvis celeritatem, & directionem est determinabilis; unde consequi videtur, ut, si mobile incursu binarum determinationum quandam viam *possit* arripere, qua utraque determinatio ceu caussa necessaria plenum effectum sortiatur, eam arripere omnino debeat, & necessario semper arripiat ob ipsam illam determinabilitatem ad quamvis celeritatem, & directionem: talem viam non esse aliam, nisi quam diagonalis designat, patet ex eo, quod mobile simul impulsum binis viribus, e. g. P D, & P C (Fig. III.) & motu composito ex P veniens in Q ad utrumque planum A B, & S V tantundem accedat, quantum per singulas determinationes seorsim accessisset. Cæterum posita etiam hac corporum inertia quæri potest, nullane detur binarum virium sub angulo quodam concurrentium oppositio, & pugna, quod quidem dubium motuum resolutione aptissime solvi posse arbitror. Cæterum etsi quidam nullam in natura agnoscant virium resolutionem, nemo tamen Philosophorum est, qui eadem

Digitized by Google

dem non ſæpiſſime utatur in naturæ inveſtigatione. Sed quidquid alii ſentiant, nunc quidem corollaria ex propoſitione antea demonſtrata colligemus, quæ præ diſceptationibus longe maioris momenti ſunt.

§. LIV.

Corollarium I. In omni motu compoſitio fit, ut mobile in fine cuiusvis temporis ſit ibi, ubi eſſet, ſi ſingulos motus componentes habuiſſet alios poſt alios in ſua quosque directione; Si enim (Fig. VII.) ſeorſim percurriſſet P D, & D O) quæ eſt eadem directio ac P C utpote huic parallela) eſſet in O, ubi nimirum eſt per motum compoſitum P O. Eodemque modo ſi capiatur in diagonali quodvis punctum r, ducanturque r m, r n parallelæ ad P C, P D; erit mobile in r, dum viribus ſeorſim agentibus percurreret P m, & P n; cum enim eodem tempore percurratur diagonalis, ac quodvis latus, & motus ſit æquabilis, ſpatia in diagonali, vel quovis latere percurſo ſemper erunt proportionalia totis, ut ſit P O : P r = P D : P m = P C : P n. Patet etiam diagonalem eſſe viam breviſſimam, quia eandem eodem tempore abſolvit, quo unicum tantum latus percurreret ſeorſim; quod ſimplicitatem naturæ palam facit.

§. LV.

Corollarium II. Quo acutior eſt angulus virium componentium, eo maior eſt celeritas motus compoſiti, quo obtuſior, eo minor: ſi rectus eſt, ea medium quemdam tenorem ſervat. Nam Fig. V. angulus virium C A B cum angulo A B D ſemper æquat duos rectos: igitur quo acutior ille, eo iſte obtuſior, conſequenter latus ei oppoſitum, ſive diagonalis celeritatem motus compoſiti exprimens, maior: contra quo ille obtuſior, eo iſte acutior, ac proinde latus oppoſitum minus: imminuto ultra omnes terminos angulo virium, latus A D ultra omnes terminos ad ſummam reliquorum accedit: contra aucto ultra omnes terminos angulo virium latus A D ſemper propius ad differentiam accedit.

§. LVI.

Digitized by Google

§. LVI.

Corollarium III. Quotcunque (Fig. VIII.) ponantur motus, ac vires diversæ, A B, A C, A D, A E in idem mobile simul concurrere, semper feretur motu composito ex omnibus; ac componantur primo vires A B, A C ope parallelogrammi A B F C, cuius bina latera A B, A C exprimunt vires componentes, diagonalis A F vim compositam; tum hæc A F cum quapiam alia A D per aliud parallelogrammum combinetur, in quo A G sit vis composita ex A F, hoc est, ex A B, A C & A D; demum ipsa A G componatur cum A E, ut diagonalis A H exprimat effectum omnium simul. Porro animadvertendum, quocunque ordine adsumantur vires componentes, semper ad idem tamen perveniri debere punctum H; etsi id quidem ex ipsa constructione figuræ, nisi admodum adcurata sit, ægre deprehendatur. Sed ut rei istius ratio perspiciatur, sit (Fig. IX. T. I.) quodvis planum S V positum ultra omnes rectas A B, A C &c. in quod ex puncto H demittatur perpendicularis H V; sive ponatur mobile per omnes rectas accedere ad hoc planum., sive per alias accedere, per alias recedere, sive in eadem manere distantia; manifestum est, quocunque ordine adsumantur vires, summam omnium accessuum demtis recessibus semper fore æqualem; quare si facta computatione distantia mobilis a plano S V est æqualis rectæ H V, eadem erit distantia, si alio ordine componantur vires, semperque punctum extremum H erit in aliquo puncto rectæ P Q, parallelæ ad S V, & ab ea distantis intervallo æquali H V. Concipiatur dein aliud planum V Z priori normale; quocunque ordine componantur vires, semper eadem erit summa accessuum (demtis recessibus, siqui forent) ad planum V Z; quapropter si extremum punctum H in aliquo casu est in recta V Z, semper erit in eadem recta. Cum igitur extremum punctum H semper sit in recta P Q, & simul in recta V Z, necessario erit in communi earum rectarum intersectione, h. e. Quocunque ordine adsumantur vires componentes, semper ad idem perveniri debet punctum H.

Digitized by Google

§. LVII.

Corollarium IV. Quia vis composita AH (T.I. F.VIII.) eundem præstat effectuum, quem vires componentes coniunctim edunt; idcirco vis per diagonalem expressa nuncupatur vis *æquipollens* datis viribus A B, A C, A D, A E. Vis autem æqualis A h, quæ contraria directione eundem effectum A H præstare potest, pariter æquipollens est, & cum illis æquilibrium efficiens; nam si simul darentur vires A h, & A B, A C, A D, A E, facta compositione punctum H recideret in ipsum A, ac tum omnes eæ vires, & potentiæ in æquilibrio erunt, & effectus suos mutuo destruent. Quapropter viribus componentibus quotcunque semper substitui potest vis æquipollens per diagonalem expressa, ac si pluribus viribus, vel potentiis angulum efficientibus resistendum est, ea resistentia in directione diagonalis adplicari debet.

§. LVIII.

Corollarium V. Non modo diagonalis æquipollet viribus laterum, sed vis lateris cuiuscunque componitur ex viribus reliquorum, mutata tamen in contrariam alterius directione. Vis A C (T. I. F. X.) æquipollet vi A D, & A E = A B; si enim super hasce vires parallelogrammum construatur, vis A C erit diagonalis, seu vis æquipollens; & ex eadem ratione vis A B æquipollet viribus A D, & A F = A C.

CAPUT III.

De Conflictu Directo Corporum non Elasticorum.

In corporum conflictu fere concursus plurium virium, & compositio quædam motuum fit in eadem recta conspirantium, vel oppositorum, uti in conflictu directo, vel sub angulo concurrentium, uti in obliquo. In natura corporum, & elementorum perpetua pugna est; quare in primis explicandæ leges conflictuum a vi inertiæ pendentes, ut siquæ sint aliæ vires, deinceps stabiliri queant.

§. LIX.

Digitized by Google

§. LIX.

Definitio I. Quando corpora in se impingunt, sive concurrunt inter se, & *mutuo* confligunt ob reactionem actioni æqualem (§. XXIX.) spectanda est *primo* constitutio ipsorum corporum concurrentium; sintne elastica, vel non elastica. *Secundo* linea directionis corporum: tertio ipsa actio, & reactio. Corpora *elastica* sunt, quæ figuram ictu, tensione, & compressione mutatam cessante vi opposita iterum recuperant. *Non elastica* sunt, quorum figura aut non mutatur ab ictu, uti essent perfecte *dura*, quæ comprimi non possent: aut si mutata est, cessante vi opposita non restituitur, uti fit in cera vel argilla molli, aut plumbo. Hæc dicuntur mollia.

Institutis circa varia corpora experimentis, & observationibus verisimile fit, non reperiri ullum corpus perfecto elaterio præditum, aut omni elaterii vi penitus destitutum; quævis enim corpora aliquo saltem modo comprimi possunt, & corpora compressa elastica quandam mollitiem, non elastica aliquam elaterii vim habent; Nihilominus statuendæ sunt leges 1° de non elasticis, quæ ponuntur perfecte dura, aut perfecte mollia. 2. De elasticis iis, quorum elaterii vis perfecta ponitur. Si enim utriusque generis leges ad nostra corpora transferantur, eo propiores erunt adcurationi, quo magis ad perfectam duritiem mollitiemve, aut perfectam elasticitatem accedunt.

§. LX.

Definitio II. Conflictus corporum *directus* est, si directio corporum congredientium est in eadem linea recta: si vero corporum directiones angulum efficiunt, conflictus adpellatur *obliquus*. Concipiantur bini globi penitus homogenei, quorum directio est linea a centro utriusque globi descripta; erit conflictus eorum directus, si linea coniungens centra globorum in puncto contactus, ubi colliduntur, in directionem utriusque vel alterius globi incidit, uti fit Fig. XI. T. I. ubi M A est directio globi A; N B directio globi B; & recta A C B linea coniungens centra globorum in puncto con-

Digitized by Google

contactus C in directionem utriusque, vel Fig. XII. ubi linea A C B centra globorum coniungens in puncto contactus C incidit in directionem N B globi B. At conflictus obliquus est, si linea centra globorum in puncto contactus iungens in neutrius globi directionem incidit, uti F. XIII. ubi linea C G D centra connectens in puncto contactus G cum utraque directione A C, & H D angulum efficit.

§. LXI.

Definitio III. In omni tam directa, quam obliqua percussione triplex casus consideratur. I. Siquod corpus incurrit in aliud tardius motum, sive minore celeritate præcedens II. Siquod in aliud quiescens incurrit. III. Si alteri ex contraria parte venienti occurrit. Ordinem horum casuum adcurate deinceps tenebimus. Porro *actio* corporum in se incurrentium in eo sita est, quod a corpore A, dum in aliud B tardius præcedens, vel quiescens vel contraria directione obviam veniens incurrit, hoc corpus B ad motum determinetur secundum directionem incurrentis, eique vis quædam secundum hanc directionem imprimatur: *Reactio* in eo sita est, quod corpus impulsum B incurrenti resistat, eique vim secundum directionem contrariam ei, qua incurrebat, imprimat.

Bina corpora, eaque sphærica in conflictu spectantus; corpus A incurrens, quod in primo casu maiorem in altero solum habere celeritatem, in tertio maiorem quantitatem motus habere ponimus; alterum est corpus impulsum B: quod in primo casu minorem, in altero nullam celeritatem, in tertio minorem motus quantitatem habeat. Si in tertio casu quantitates motuum æquales sint, perinde est utrum A vel B dicas. Sit massa incurrentis M, celeritas ante conflictum C, erit in eo quantitas motus ante conflictum M C. Celeritas in conflictu ab eo amissa sit Z. Sit dein corporis impulsi massa m, celeritas ante conflictum c; erit quantitas motus ante conflictum m c. celeritas in conflictu acquisita secundum directionem incurrentis sit x. Et quoniam directiones, ac motus oppositi corporum, si analytice exhibentur, signis contrariis adficiendi sunt; idcirco si motus corporis incurrentis desi-

gne-

gnetur signo positivo + (quod quidem positivum signum semper intelligi solet, si nullum datæ quantitati signum præfixum est) erit motus alterius corporis contraria directione occurrentis in tertio casu exprimendus signo negativo —. Quam ob rem in primo percussionis casu celeritas corporis impulsi erit c seu + c, in altero c = o. In tertio = — c. Quantitas motus in eodem ante conflictum erit generatim ± m c. In qua expressione signum positivum ad primum casum, negativum ad tertium pertinet; in secundo casu utrumvis sumatur, semper erit m c = o, quia c = o. Summa igitur quantitatum motus corporis utriusque ante conflictum erit M C ± m c. Si datæ sint celeritates C, & — c, summa erit C — c; differentia C + c. Quapropter assumtis hisce signis pro diversitate directionum, & secundum regulas algebræ tractatis ipsa etiam directio corporum ex calculo innotescit; si enim ex M C fit — M C signum est, massam incurrentem directionem accipere priori contrariam; & si expressio — m c vertatur in aliam, quæ signum habeat positivum, id indicio est, corpus impulsum mutata directione priore secundum directionem oppositam post conflictum ferri. Nempe ut Newtonus ait, in Arithmetica universali quantitates vel adfirmativæ sunt, seu maiores nihilo, vel negativæ, seu nihilo minores. Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona adfirmativa, debita vero bona negativa: in motu locali progressus dici potest motus adfirmativus, & regressus motus negativus, quia prior auget, posterior minuit iter confectum; & ad eundem modum in geometria, si linea versus plagam quamvis ducta pro adfirmativa habeatur, negativa erit, quæ versus plagam oppositam ducitur.

§. LXII.

Lex I. Conflictus. *Summa quantitatum motus ante, & post conflictum eadem est, sive non mutatur ab actione mutua corporum.* Dem. Sit quantitas motus in corpore incurrente ante conflictum = M C: in impulso ± m c; erit summa ante conflictum M C ± m c. Quoniam actiones corporum æstimantur ex quantitatibus mo-

motuum productis, vel extinctis (§. XXX.) Sit quantitas motus corpori impulso secundum directionem incurrentis communicata $= q$; erit in eo quantitas motus post conflictum $= \pm m\,c + q$; & quoniam ob æqualitatem actionis & reactionis tantundem amittitur ab incurrente, quantum in impulso producitur, erit quantitas motus corporis incurrentis post conflictum $= M\,C - q$; summa quantitatum motus post conflictum erit $M\,C - q \pm m\,c + q = M\,C \pm m\,c$ uti ante conflictum.

Expressio $M\,C - m\,c$ assumtis pro directionum oppositione signis oppositis summa vocatur analytice: spectato sensu qui ad numeros transfertur, differentiam motus quantitatum indicat: idcirco ista lex passim enunciari in hunc modum solet: in conflictu summa motuum, qui fiunt in eandem plagam, aut differentia oppositorum, constans est.

§. LXIII.

Lex II. *Celeritas post conflictum in incurrente, & impulso eadem est, sive communis, & æquatur summæ quantitatum motus ante conflictum divisæ per summam massarum.* Dem. 1. pars. Actio corporum concurrentium tanta est, & tamdiu præcise durat, donec ambo eadem celeritate, & directione progrediantur; neque potest corpus impulsum *tardius* moveri post conflictum, quam incurrens facto iam incursu movetur; secus istius motus & directionem impediret, & ad maiorem celeritatem determinaretur: neque *celerius*; quamprimum enim celeritatem æqualem habet ei, quæ in incurrente post impulsum residua est, huic non amplius resistit, & actionem incurrentis quodam modo effugit. Ob hanc caussam utrumque corpus post conflictum instar unius massæ communi celeritate animatæ spectari potest. Ut 2. pars demonstretur, hæc communis celeritas post conflictum dicatur u, quæ ducta in summam massarum dabit summam quantitatum motus post conflictum, nempe $u \times \overline{M + m}$; & quoniam summa quantitatum motus ante & post conflictum eadem est ex Leg. præc.

erit

erit $u \times \overline{M + m} = M C \pm m c$; unde fit $u = \dfrac{M C \pm m c}{M + m}$.

§. LXIV.

Corollarium I. Inventa celeritate $\dfrac{M C \pm m c}{M + m}$ invenitur etiam quantitas motus post conflictum, nempe in corpore incurrente $= \dfrac{M C \pm m c}{M + m} \times M = \dfrac{M^2 C \pm M m c}{M + m}$; & in corpore impulso $\dfrac{M C \pm m c}{M + m} \times m = \dfrac{M m C \pm m^2 c}{M + m}$. Est igitur quantitas motus post conflictum ut quartus terminus proportionalis ad summam massarum, summam quantitatum motus ante conflictum, & massam dati corporis, nempe incurrentis, vel impulsi, cuius quantitas motus post conflictum quæritur.

Fiat summa inventarum quantitatum motus post conflictum, $\dfrac{M^2 C \pm M m c + M m C \pm m^2 c}{M + m}$, *eaque secundum regulas algebræ dividatur per datum divisorem, invenietur* $M C \pm m c$, *uti ante conflictum, quemadmodum Leg. I. ostendimus.*

§. LXV.

Corollarium II. Data quantitate motus ante conflictum, eaque inventa post conflictum invenitur quantitas motus q, ab uno amissa, ab altero acquisita, nem-

pe

$$pe\ q = MC - \frac{M^2 C \mp Mmc}{M+m},$$ sive reducendo quantitatem integram MC ad fractam,

$$q = \frac{M^2 C + MmC - M^2 C \mp Mmc}{M+m}$$

facta reductione $= \frac{MmC \mp Mmc}{M+m} = \frac{Mm \times \overline{C \mp c}}{M+m}$

& resolvendo in analogiam $M+m : Mm = \overline{C \mp c} : q$ hoc est, *quantitas motus ab incurrente amissa, ab impulso acquisita est ut quartus terminus proportionalis ad summam massarum, productum massarum, & differentiam celeritatum ante conflictum.*

Cavendum magnopere, nequa perturbatio ob mutationem signorum oriatur: facta subtractione, quæ mutatione signorum fit, erit differentia celeritatum in primo casu $C - c$; in secundo C; in tertio $C + c$.

§. LXVI.

Corollarium III. Ex amissa quantitate motus ab incurrente, & ab impulso acquisita, reperitur celeritas Z ab incurrente in conflictu amissa, & celeritas x ab impulso acquisita; modo quantitas amissa, & acquisita dividatur per *massam* amittentis, vel acquirentis; hinc cum sit $q = \frac{Mm \times \overline{C \mp c}}{M+m}$, erit $Z = \frac{m \times \overline{C \mp c}}{M+m}$, sive uti *summa massarum ad massam corporis impulsi, ita differentia celeritatum ante conflictum ad celeritatem ab incurrente amissam.*

& in impulso cum pariter sit $q = \frac{Mm \times \overline{C \mp c}}{M+m}$;

erit

Digitized by Google

erit $x = \dfrac{M \times \overline{C \mp c}}{M + m}$ sive ut *summa massarum ad massam corporis incurrentis; ita differentia celeritatum ante conflictum ad celeritatem ab impulso acquisitam.* Ex his deducitur

I. Si celeritas amissa ab incurrente comparetur cum celeritate acquisita ab impulso, erit

$$M + m : \overline{C \mp c} = m : Z$$

$$M + m : \overline{C \mp c} = M : x$$

Unde fit $M : m = x : Z$; *ut se habet massa incurrentis ad massam impulsi corporis; ita reciproce celeritas ab impulso acquisita ad celeritatem ab incurrente amissam.*

II. Quia $M + m : \overline{C \mp c} = m : Z$, sive $M + m : m = \overline{C \mp c} : Z$ hinc si massæ ponuntur æquales, ut sit $M = m$; erit m dimidia summa $M + m$; & z erit dimidia differentia celeritatum ante conflictum; & quoniam in casu secundo ea differentia est $= C$; idcirco corpus incurrens in massam æqualem, & quiescentem, dimidiam celeritatis prioris partem amittet. Si $M > m$; tunc, uti massa m est minor dimidia summa massarum; ita corpus incurrens minus, quam dimidiam differentiam celeritatum amittet. Si $M < m$; amittet plus quam dimidiam differentiam ob eandem rationem. Si ponitur massa m quiescens, ut differentia celeritatum sit $= C$; eaque admodum vasta, & infinite magna sumitur, ut massa M illius comparatione evanescat; tunc erit $M + m = m$; & $C = Z$, hoc est, corpus incurrens in massam infinite magnam amittet omnem celeritatem; eiusmodi massa infinite magna censetur obex immobilis; quare si corpus non elasticum incurrit in obicem immobilem pariter non elasticum, post ictum quiescit. E contrario si massa corporis incurrentis sit incomparabiliter maior, ut massa impulsa m evanescat, & fiat $= 0$, erit $Z = 0$; nam analogia $M + m : m = \overline{C \mp c} : Z$,

Digitized by Google

abit in hanc $M + o : o = \overline{C \mp c} : o$; adeoque celeritas ante & poſt conflictum eadem eſt; tale quidpiam fieri concipimus, cum vaſtiſſimi planetarum in tenuiſſimos lucis halitus per ſpatia cœleſtia vacua diſperſos incurrunt; qui proin de priore celeritate nihil cenſentur amittere. Si in tertio caſu ponitur $MC = mc$, patet, quod communis celeritas $\frac{MC - mc}{M + m}$ ſit $= o$, h. e. corpora mollia æquali vi occurrentia ex oppoſitis partibus, poſt conflictum quieſcunt, nempe quodvis reſpectu alterius eſt hoc caſu inſtar obicis immobilis.

§. LXVII.

Exempla Arithmetica.

I. Exempla de caſu I. Retentis, ut ante, literarum ſignificationibus dicatur quantitas motus poſt conflictum in incurrente Mu; in impulſo mu. Sit $M = 3$. $C = 3$. $m = 3$. $c = 1$. erit $u = \frac{MC + mc}{M + m} = \frac{9 + 3}{3 + 3} = 2$. & $Mu = 6$. $mu = 6$ ut inveniatur q ſeu quantitas motus ab incurrente amiſſa, fieri poteſt $MC - Mu = 9 - 6 = 3$. aut fiat ex Cor. II. ut ſumma maſſarum ad productum earum, ita differentia celeritatum ante conflictum ad q; ſeu $6 : 9 = 2 : \frac{18}{6} = 3$.

Celeritas amiſſa reperitur ex Cor. III. ut ſumma maſſarum ad differentiam celeritatum: ita maſſa impulſi ad Z, hoc eſt, $6 : 2 = 3 : 1$.

Sit $M = 2$. $C = 14$. $m = 4$, $c = 8$; erit $u = 10$. $Mu = 20$. $q = 8$. $Z = 4$. $mu = 40$. $x = 2$. Sit $M = 3$. $C = 2$. $m = 2$. $c = 1$. erit $u = \frac{8}{5}$. $Mu = \frac{24}{5}$. $mu = \frac{16}{5}$. $q = \frac{6}{5}$. $Z = \frac{2}{5}$. $x = \frac{3}{5}$. Sit $M = 6$. $C = 5$. $m = 3$. $c = 2$. erit $MC = 30$.

mc

Digitized by Google

$mc = 6$. $u = 4$. $Mu = 24$. $mu = 12$. $q = 6$. $Z = 1$. $x = 2$.

II. Exempla de casu II. Sit $M = 9$. $C = 1$. $m = 5$. $c = 0$. erit $u = \dfrac{MC}{M+m} = \frac{9}{14}$. $Mu = \frac{81}{14}$. $mu = \frac{45}{14}$; unde iterum fit $Mu + mu = \dfrac{81+45}{14} = 9$, h. e. quantitas motus ante & post conflictum eadem est. Ut inveniatur quantitas motus amissa q, subtrahatur quantitas motus post conflictum a quantitate motus ante conflictum $9 - \frac{81}{14} = \dfrac{126-81}{14} = \frac{45}{14}$; aut fiat ex Cor. II. ut summa massarum ad productum earundem; ita differentia celeritatum ad q, seu $14 : 45 = 1 : \frac{45}{14}$. Ex Cor. III. reperitur $Z = \frac{5}{14}$. & $x = \frac{9}{14} = u$, in casu II. Sit $M = 2$. $C = 18$. $m = 4$. $c = 0$. erit $MC = 36$. $mc = 0$. $u = \dfrac{MC}{M+m} = \frac{36}{6} = 6$. $Mu = 12$. $mu = 24$. $q = 24$. $Z = 12$. $x = 6$.

Exempla de casu III. Sit $M = 3$. $C = 6$. $m = 3$. $-c = -2$, erit $MC = 18$. $-mc = -6$. $\dfrac{MC - mc}{M+m} = 2 = u$. $Mu = 6$. $mu = 6$. $q = 12$. nam ex Cor. II. fiat $M + m : Mm = C + c : q$. $Z = 4$; fiat enim ex Cor. III. $M + m : C + c = m : Z$. seu $6 : 8 = 3 : \frac{24}{6} = 4$. $x = 4$; nempe massa impulsa m, quae habuerat negativam celeritatem $= -2$; dum aliam positivam, nempe secundum directionem incurrentis acquirit, quae est $= 4$; retinet celeritatem positivam $= 2 = u$.

Sit $M = 4$. $C = 9$. $m = 3$. $-c = -5$. erit $\dfrac{MC - mc}{M+m} = u = \dfrac{36-15}{7} = 3$. $Mu = 12$. $mu = 9$.

$= 9 . q = 24$ Ex Cor. II. $Z = 6 . x = 8 .$ Sit $M = 2 . C = 6 . m = 3 . -c = -4 .$ erit $\frac{M C - m c}{M + m} = 0 .$

CAPUT IV.

De Conflictu Directo Corporum Perfecte Elasticorum.

Quæ ad conflictum perfecte mollium, vel durorum pertinent, ex binis legibus, quarum demonstratio facillima est, deduximus. Nunc eadem ad congressum corporum perfecte elasticorum ita adplicabimus, ut ex unica præmissa proportione mox palam fiat, præsentem tractationem prioris corollarium quoddam esse.

§. LXVIII.

Propositio. *Effectus collisionis corporum perfecte elasticorum est duplus eius, qui contingeret absente elasticitate, sive in conflictu corporum perfecte elasticorum quantitas motus ab uno amissa, ab altero acquisita, est dupla illius, quæ absente elasticitate amittitur, vel acquiritur.* Dem. Actio mutua corporum, qua elaterium comprimitur, eo usque durat, donec utrumque ad æqualem celeritatem secundum eandem directionem determinetur, aut celeritas incurrentis destruatur tota; tamdiu enim corpus impulsum alterius motui resistit: obtenta celeritatum æqualitate, aut vi incurrentis destructa, elaterium *eadem* vi, qua compressum est, se restituit, proindeque effectus elaterii æqualis est effectui actionis & reactionis corporum, totus autem effectus in congressu elasticorum duplus illius, qui absente elasticitate contingeret.

Duplex, uti MacLaurinus docet, temporis periodus in congressu elasticorum spectanda est; altera, qua durante figura corporis elastici mutatur: altera, qua restituitur. Concipiatur inter corpora A & B elasticitatis expertia interposita spira elastica K L (F. XIV. T. I.) Dum corpus

A

A versus B progreditur, & per interpositum elaterem in B agit, elater necessario magis magisque continuo comprimitur, donec utrumque corpus ad eandem secundum directionem incurrentis celeritatem determinetur: postea cum resistentia corporis B cesset, etiam actio corporis A cessabit; estque hæc prima temporis periodus. At elaterium cessante vi comprimente sese paulatim restituet, & vi quidem eadem (in hypothesi perfecte elasticorum) qua compressum fuit, ita ut vis restitutionis æque corpus incurrens A, ac impulsum B adficiat, quemadmodum actio incurrentis, & compressio elaterii utrumque corpus adfecit; atque hæc est periodus altera. Quod ob intermedium fit elaterem, idem, si immediate congrediuntur corpora elastica, usuvenire debet.

§. LXIX.

Corollarium I. Effectus collisionis idem est, si utrumque corpus, sive unum quodvis ex binis ponatur elasticum. Sit F. XV. T. I. utrumque elasticum. Inprimis compressio elaterii, ac determinatio ad motum similiter fit, ac in corporibus non elasticis. At restitutio partium corporis B usque ad f g compressarum fiet directione n m opposita directioni incurrentis, quod ob istam restitutionem de priore motu tantum amittet, quantum per incursum amiserat. Restitutio partium corporis A usque ad c d compressarum fiet directione m n conspirante cum directione primi motus; quocirca in impulso B tantus iterum motus producitur, quantus prima actione incurrentis producebatur. Sit dein unicum incurrens A elasticum (Fig. XV. n. III.) alterum perfecte durum. Prima periodus, & compressio elateris respondet actioni corporis incurrentis; & quia restitutio compressioni æqualis fit directione m o, corpus impulsum novam vim priori æqualem recipiet; simul vero motui incurrentis tantundem iterum resistet, quantum primæ actioni restiterat. Quare & quantitas motus amissa ab A, & acquisita a B duplicatur.

Si demum (Fig. XV. n. II.) solum B impulsum ponitur elasticum, alterum A perfecte durum, restitutio fiet directione n o vi æquali factæ compressioni; unde

Digitized by Google

in A tanta iterum vis extinguitur, quanta per resistentiam corporis B & compressionem elateris extinguebatur. At corpus B pariter novam & priori æqualem determinationem secundum directionem incurrentis acquiret; nequit enim elater se restituere directione n o, quin corpus B directione contraria cedat, uti quodvis corpus elasticum, si ad planum adprimitur, contraria directione resilit. Aliud teste experientia contingit, si corpus molle cum elastico confligit.

§. LXX.

Corollarium II. Corpus impulsum B post conflictum semper habet directionem corporis incurrentis A; id quod in primo, & secundo casu perspicuum est; nullam enim tum quidem directionem in plagam contrariam acquirit. In tertio casu, si corpus impulsum B vocetur id, quod minore vi cum altero congreditur, amissa priore quantitate motus secundum directionem fortioris repelleretur etiam absente elasticitate; multo igitur magis interveniente elaterio id fieri debet; quia in tertio casu demtis utrinque viribus, quatenus æquales sunt, corpus fortius perinde se habet, ac si per excessum virium in quiescens incurreret. Si in tertio casu motus quantitates, quas ad conflictum adferunt, æquales ponuntur, utrumque eadem vi, qua alteri occurrit, resiliet. Quæstio igitur de directione post conflictum duntaxat ad corpus incurrens A pertinet, cuius motus ante conflictum signo positivo + a nobis adficitur; quapropter si formula eius quantitatem motus, vel celeritatem post conflictum exprimens signum habuerit negativum, id indicio erit, corpus incurrens A reflecti; si ea fuerit = o; id subsistet immotum post conflictum; si positivum retinet signum priore directione motum suum continuabit; quæ quidem omnia a ratione massarum pendent.

§. LXXI.

Problema. *Datis celeritatibus, & massis corporum concurrentium, leges non elasticorum transferre ad conflictum elasticorum.* Resolutio. Quoniam in corporibus elasticis effe-

effectus collisionis (nempe quantitas q ab incurrente amissa, ab impulso acquisita) est duplus; hinc valor eum effectum exprimens in corporibus non elasticis duplicetur. Est autem absente elasticitate $q = \frac{Mm \times \overline{C \mp c}}{M + m}$ adeoque posita corporum confligentium elasticitate, erit

$$q = \frac{Mm \times 2\,\overline{C \mp c}}{M + m} = \frac{2\,M\,m\,C \mp 2\,M\,m\,c}{M + m}$$

unde fit $M + m : M\,m = 2\,\overline{C \mp c} : q$; uti summa massarum ad productum earundem; ita dupla differentia celeritatum ad quantitatem motus ab uno elasticorum amissam, ab altero acquisitam.

§. LXXII.

Corollarium I. Celeritas Z ab incurrente amissa reperitur, si motus quantitas amissa dividitur per M, ut fit $Z = \frac{m \times 2\,\overline{C \mp c}}{M + m}$ & celeritas x acquisita ab impulso est eadem quantitas motus per massam impulsi m divisa, ut fit $x = \frac{M \times 2\,\overline{C \mp c}}{M + m}$. Unde existunt analogiae $M + m : m = 2\,\overline{C \mp c} : Z$

& $M + m : M = 2\,\overline{C \mp c} : x$

denique $M : m = x : Z$ uti supra (§. LXVI.)

§. LXXIII.

Corollarium II. Si effectus collisionis q a priore motus quantitate corporis incurrentis subtrahitur, & in corpore impulso additur, habetur utriusque motus quantitas post conflictum, & directio ex qualitate signorum.

E 4 Est

Digitized by Google

Est igitur in corpore incurrente quantitas motus post conflictum

$$= M C \frac{-2 M m C \pm 2 M m c}{M + m} = \frac{M^2 C - M m C \pm 2 M m c}{M + m}$$

& in corpore impulso quantitas motus post conflictum

$$= \pm m c + \frac{2 M m C \mp 2 M m c}{M + m}$$

$$= \frac{\pm m^2 c + 2 M m C \mp M m c}{M + m}$$

§. LXXIV.

Corollarium III. Inventa quantitas motus post conflictum divisa per M celeritatem & directionem incurrentis post conflictum exprimit; & alterius motus quantitas divisa per m celeritatem corporis impulsi; dicatur illa prior V, hæc u; erit

$$V = \frac{M C - m C \pm 2 m c}{M + m}$$

$$u = \frac{\pm m c + 2 M C \mp M c}{M + m}$$; igitur in binis primis casibus est $u = \frac{m c + 2 M C - M c}{M + m}$. in tertio

$$u = \frac{M c - m c + 2 M C}{M + m}.$$

Celeritas utriusque corporis post conflictum erui eodem modo potest ex data celeritate C, & $\pm$ c ante conflictum, & inventa per Coroll. I. celeritate amissa Z, & acquisita x; erit enim $V = C - Z = \frac{M C - m C \pm 2 m c}{M + m}$;

& sic de celeritate $u = \pm c + x$.

§.

§. LXXV.

Corollarium IV. Ponantur massæ æquales, seu $M = m$; erit $V = \pm \frac{2\,m\,c}{2\,m} = \pm c$; & $u = \frac{2\,M\,C}{2\,M} = C$. h. e. Si massæ sunt æquales, corpora post conflictum permutatis celeritatibus feruntur; ac corpus impulsum B semper habet directionem incurrentis: hoc vero incurrens A in primo casu perget ut ante; in secundo quiescet, quia tum $c = o$; in tertio reflectetur; igitur massæ æquales corporum elasticorum ex oppositis plagis sibi occurrentes post conflictum permutatis celeritatibus resiliunt. II. Si $M > m$; celeritas V in corpore A post conflictum in primo, & secundo casu semper est quantitas positiva; nam si $M > m$; erit etiam $M\,C > m\,C$; proinde valor formulæ $\frac{M\,C - m\,C + 2\,m\,c}{M + m}$ manet positivus. In tertio casu, ad quem signum negativum — quantitatis $2\,m\,c$ pertinet, fieri potest, ut V sit quantitas negativa. III. Si ponitur $M < m$; corpus incurrens in tertio, & secundo casu (in quo $2\,m\,c = o$) semper reflectetur; at in primo casu aliquando reflectetur, aliquando quiescet, aliquando priore perget directione. Nam in formula $\frac{M\,C - m\,C + 2\,m\,c}{M + m}$, si $M < m$; erit $M\,C < m\,C$; ponatur hæc differentia negativa $= -d$; si iam hæc differentia $-d$ æqualis est quantitati positivæ $2\,m\,c$; corpus A quiescet; si ea differentia est maior quantitate $2\,m\,c$, reflectetur; si minor, priore directione perget. IV. Si in tertio casu ponitur $M\,c = m\,c$; formula celeritatis V pro eo casu abit in hanc $V = \frac{-M\,C - m\,C}{M + m} = -C$. & $u = \frac{M\,c + m\,c}{M + m} = + c$ h. e. Dum corpora elastica æquali

Digitized by Google

li motus quantitate ex oppositis partibus sibi occurrunt, eadem celeritate, qua accesserunt, reflectuntur.

§. LXXVI.

Exempla Arithmetica.

I. Exempla de massis æqualibus, vel casu, in quo $M = m$. Sit $M = 3$. $C = 4$. $m = 3$. $c = 2$. Quæratur quantitas motus q, & celeritas Z, & x amissa vel acquisita; dein quantitas motus MV, & mu, ac celeritas V, & u post conflictum: igitur fiat secundum §.LXXI. ut summa massarum, ad productum &c. $6 : 9 = 4 : \frac{36}{6} = 6$. quæ est quantitas motus amissa ab incurrente, & ab impulso acquisita; erit $Z = \frac{6}{3} = 2$. $x = \frac{6}{3} = 2$. $MV = MC - q = 12 - 6 = 6$. $mu = mc + q = 6 + 6 = 12$. $V = \frac{MV}{M} = \frac{6}{3} = 2$. $u = \frac{mu}{m} = \frac{12}{3} = 4$. Est igitur post conflictum in A celeritas 2, ante conflictum 4: in B post conflictum celeritas 4; ante conflictum 2. Igitur si massæ æquales sunt, celeritates permutantur Coroll. IV. §. LXXV.

Sit $M = 3$. $C = 8$. $m = 3$. $c = 0$; erit $q = 24$. $Z = 8$. $x = 8$. $MV = 0$. $V = 0$. $mu = 24$. $u = 8$.

Sit $M = 3$. $C = 6$. $m = 3$. $-c = -2$. erit $q = 24$. $Z = 8$. $x = 8$. $MV = 18 - 24 = -6$. $V = -2$. $mu = -6 + 24 = 18$. $u = 6$. Patet, quod massæ æquales ex oppositis partibus occurrentes permutatis celeritatibus resiliant.

II. Exempla, de casu, quo $M > m$ ponitur. Sit $M = 6$. $C = 5$. $m = 3$. $c = 2$. erit $q = 12$. $Z = 2$. $x = 4$. $MV = 30 - 12 = 18$. $V = 3$. $mu = 18$. $u = 6$. Sit $M = 6$. $C = 6$. $m = 3$. $c = 0$. erit $q = 24$. $Z = 4$. $MV = 36 - 24 = 12$. $V = 2$. $mu = 24$. $u = 8$. Nempe si $M > m$, in primo, & secundo conflictus casu quantitas V semper est positiva; non item in tertio casu; nam in hoc casu valor formulæ

MC

$\frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$ varius esse potest. Sit enim

M = 5. C = 6. m = 1. — c = — 6. erit V = + 2.
Sit M = 3. C = 6. m = 1. — c = — 6; erit V = 0.
Sit M = 4. C = 3. m = 2. — c = — 3. erit V = — 1.

III. Exempla de casu, quo M < m ponitur; corpus incurrens in secundo, & tertio conflictus casu semper reflectetur; in primo vel reflectetur, vel quiescet, vel motum priorem continuabit. Sit M = 3. C = 6. m = 6. c = 0. erit q = 24. Z = 8. x = 4. MV = 18 — 24 = — 6. V = — 2. mu = 24. u = 4. Sit M = 2. C = 6. m = 3. — c = — 4. erit q = 24. Z = 12. x = 8. MV = 12 — 24 = — 12 V = — 6. mu = — mc + q = — 12 + 24 = 12. u = 4. Ut exempla ad primum percussionis casum in data hypothesi M < m, pertinentia intelligantur, præ oculis habeatur formula $V = \frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$; sit

M = 2. C = 6. m = 3. c = 1; erit V = 0.
M = 1. C = 5. m = 3. c = 1, erit V = — 1.
M = 3. C = 5. m = 6. c = 2; erit V = + 1.

CAPUT V.

De Conflictu Corporum Obliquo, & Motu Reflexo ac Refracto.

Quæ de resolutione & compositione motuum, de directo conflictu corporum non elasticorum, vel elasticorum demonstrata sunt, adplicari ad conflictum obliquum possunt. Ad hunc locum aptissime referri posse motus corporum reflexi, & refracti videbantur.

§. LXXVII.

Lex I. *Si globus in planum immobile incidit ad perpendiculum, & nulla globi vel plani elasticitas intervenit, sisti-*

Digitized by Google

sistitur: interveniente elasticitate reflectitur ad perpendiculum. Dem. I. pars. Obex immobilis est instar massæ infinitæ (§. LXVI.) quapropter globus in eum ad perpendiculum incidens omnem velocitatem perdet; cumque nulla alia vis adsit, post incidentiam quiescet. Dem. 2. pars. Interveniente elasticitate effectus collisionis est duplus illius, qui ea absente contingeret; cum igitur hac absente amittat omnem motum, ea interveniente præterea motum negativum sive contrariæ directionis priori æqualem habebit; nempe in restituenda figura tantundem velocitatis acquirit, quantum amiserat in mutanda.

Si elasticitas ponitur perfecta, eadem qua accessit, celeritate, & ad idem spatium reflectetur globus; si elasticitas imperfecta, ob quam vis restitutionis est minor vi compressionis, resiliet cum minore celeritate, & ad minus spatium. Hæc lex, etsi ad conflictum directum pertineat, tamen ut leges reflexionis in unum colligerentur locum, hic commemoranda fuit.

§. LXXVIII.

Lex II. *Si globus in planum immobile oblique incidit, & omnis absit elasticitas, progredietur secundum directionem plani cum velocitate, quæ ad velocitatem priorem est ut cosinus anguli incidentiæ ad radium: si vero globus incidens est perfecte elasticus, reflectetur sub angulo reflexionis æquali angulo incidentiæ.* Sit F. XVI. T. I. S V planum immobile, in quod globus incidat directione A D; demisso perpendiculo, erit A D C angulus incidentiæ, A C sinus illius, C D cosinus; cui æqualis fiat D G. Ex puncto incidentiæ D erigatur perpendicularis D B, & ducatur A B parallela ad C D. Vis A D ad planum obliqua resolvitur in vim A C plano normalem, & AB vel C D plano parallelam; hæc post incursum integra manet; nam directioni plano parallelæ planum non resistit. Tota igitur actio globi oblique incidentis fit per vim A C; cumque hæc vis contraria reactione destruatur, nullæque adsint aliæ vires, manet directio & vis D G = C D. Si A D, quæ vim absolutam exprimit, sumitur pro sinu toto, erit A D : C D

(= DG)

Digitized by Google

(=DG) seu vis absoluta ad vim residuam ut sinus totus ad cosinum anguli incidentiæ: vis autem absoluta ad vim AC, qua agit in planum, ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ. Dem. 2. pars. Interveniente elasticitate, eadem directione, & vi AC, qua fit actio corporis in planum, fit compressio elaterii, ac si id perfectum est, tanta est restitutio, quanta compressio. Exprimatur directio, & vis restitutionis in puncto incidentiæ D per rectam perpendicularem DB; ex hac vi elaterii, & priore vi DG componetur motus per diagonalem DE parallelogrammi BDGE supra vires DB, & DG descripti. Dico, angulum reflexionis EDG æqualem esse angulo incidentiæ ADC; nam in triangulis ADC, EDG anguli ad C & G recti sunt, cum sit GE parallela ad BD & AC, quæ sunt normales, præterea ex constr. CD = DG, & GE = DB; igitur triangula æqualia sunt per congruentiam, & ang. ADC = ang. EDG.

Si vis restitutionis sit minor vi compressionis, uti in corporibus imperfecte elasticis, ea exprimetur per Dm, fietque diagonalis Dn in parallelogrammo super vires Dm, & DG constructo; eritque angulus nDG minor angulo EDG; corpus igitur imperfecte elasticum reflectitur sub angulo minore, quam sit angulus incidentiæ. Qui virium resolutionem in natura non agnoscunt, nec eam pro expositione physica habent, in corporibus non elasticis oblique incidentibus concipiunt vim resistentiæ plani expressam recta DB, eamque cum vi priore Df = AD combinant, indeque per diagonalem DG parallelogrammi super Df ceu vim absolutam, DB ceu plani resistentiam constructi vim plano parallelam, quæ post incursum residua est, exprimunt. Sed ego quidem resistentiæ cuiusdam sine actione nullam ideam habeo, neque actionem & resistentiam sine virium oppositione concipio, neque virium oppositionem sine mutua earum consumtione quadam, seu extinctione, uti idem in concursu directo globorum fit; Non video igitur, quomodo resistentia plani exprimi possit, & actio corporis impingentis non exprimi recte possit, aut quomodo utraque intellecta motus DG, qui post actionem & resistentiam manet, sine virium resolutione explicari queat. Si ita repræsentare vires

res

Digitized by Google

res licet, ut exprimatur resistentia sine actione, vel actio & resistentia sine oppositione, & destructione quadam virium; cur, si corpus F. IV. T. I. in plano horizontali Po incedit, non exhibent iidem resistentiam plani Pm sine actione corporis Pn; quod si faciant, mobile semper discedet a plano horizontali Po, & abibit via quadam media Pq. His quidem consideratis opinione mea recte sentit. Cel. Frisius in opere de Gravit. omn. corp. Schol. C. I. L. I. ex obliquis corporum ictibus manifeste falsum deprehendi, naturam tantum compositione uti, nunquam resolutione. Nec vero dici potest, si eadem vis AD (F. XVI. T. I.) simul actionem expressam per AC, simul motum per DG indicatum efficit, fore effectum maiorem sua caussa; nam spectanda est ipsa quoque directio, & adplicatio caussæ seu potentiæ, quæ directione AD agere non potest, quin illos effectus edat eodem tempore; quia ut supra ostendi, eadem vis mobile revera versus planum SV transfert vi & celeritate = AC, & versus planum BD vi & celeritate = AB, vel DG; verum quidquid alii sentiant, intererat sane de resolutione motuum verba facere paullo diligentius, cum ea nemine Mechanicorum refragante via æque tuta, ac plana sit ad demonstrationem plurimorum theorematum, vel problematum solutionem perveniendi, ad quam hæc unica patere via, scilicet resolutio virium, sæpenumero videtur; id quod suspicionem non levem ingerit, eandem in natura re vera obtinere.

§. LXXIX.

Corollarium. Ex his intelligi potest, quid in collisione obliqua corporum fiat, quorum neutrum relate ad alterum obex immobilis est. Sit (F. XIII. T. I.) globorum A, & D directio AC, DH; ac concipiatur recta CD centra globorum iungens in puncto contactus G. Per hoc punctum concipiatur planum EF ad rectam CD normale, itemque alia bina plana priori parallela per AB & HI, ut directio motuum determinari possit. Resolvatur vis AC in AB, & BC; vis HD in HI, & ID. Vires AB, HI, cum sint parallelæ nihil mutationis in collisione inducunt, nihil ipsæ habent, sed integræ manent, ac per CM, DK ex-

exprimendæ ſunt. Motus igitur fiet viribus oppoſitis B C, & I D. Pro varia erga mutatione celeritatis, & directionis, quæ in tertio conflictus caſu præſertim interveniente elaterio contingit, erit velocitas & directio globi A poſt conflictum M N, & motus C N ex C M & M N compoſitus, aut velocitas & directio M n, & motus C n ex C M & M n compoſitus; eodemque modo fiet in globo D motus compoſitus per D L, vel D l. Ex his illud perſpicuum eſt, ſi plures concitiantur globi elaſtici, vel non elaſtici, niſi in eadem omnes linea recta per centra globorum tranſeunte ſiti ſint, & percuſſio pariter directa, & centralis ſit, fieri haud poſſe, ut motus ab altero ad alterum linea recta perpetuo propagetur.

§. LXXX.

Definitio. Refractio motus eſt deviatio quædam mobilis a priore directione, ob quam verſus eandem quidem plagam, ſed non in eadem linea recta motum continuat; uti contingit ſi mobile per diverſa media e. g. ex aere in aqua, vel ex aqua in aerem tranſit. Sit F. XVII. T. I. S V ſuperficies novi medii, in quod mobile directione A C tranſit. Si motum non in eadem recta A C D continuat, ſed inde a puncto C per C e fertur, eius motus dicitur *refringi*. Directio prioris motus ſive recta A C eſt linea *incidentiæ*; directio motus poſterioris ſeu recta C e linea *refractionis*; *Punctum incidentiæ* C; recta G F in puncto incidentiæ ad ſuperficiem novi medii perpendicularis, eſt *axis*, vel *perpendiculum refractionis*, *&* *incidentiæ*; angulus A C G, quem linea directionis A C cum perpendiculo efficit, eſt *angulus inclinationis*. Angulus e C F, quem linea refractionis cum perpendiculo continet, *angulus refractus*, Angulus e C D, quem prior directio continuata efficit cum linea refractionis, vocatur *angulus refractionis*. Porro ſi linea refractionis C e magis ab axe C F recedit, quam prior directio motus continuata ex A C in C D, fit *refractio a perpendiculo*; ſi magis accedit, *ad perpendiculum*.

In hisce notionibus determinandis paſſim inconſtantia quæ-

Digitized by Google

quaedam deprehenditur; quapropter scribentium mens explorandà est.

§. LXXXI.

Lex motus refracti. Si motus ad datum planum obliquus in perpendicularem, & parallelum resolvitur & in puncto incidentiae ratio vis perpendicularis ad parallelam mutatur, neutra tamen penitus extinguitur; contingit refractio illius motus, fitque a perpendiculo, si vis perpendicularis minui, aut parallela augeri; ad perpendiculum, si vis perpendicularis augeri, aut parallela minui concipitur. Dem. Motus obliquus A C resolvatur in motum A E plano SV perpendicularem, & A B parallelum; fiatque C D = A C; C L = E C, C H = C B. Si in C vis perpendicularis C H = A E minuitur, fitque aequalis C m, manente vi C L, ex iis componetur motus C e magis a perpendiculo recedens; vel si manente vi C H, concipitur vis parallela C L augeri, ut fiat aequalis C n; ex iis componetur C i pariter a perpendiculo recedens. Similiter demonstratur accessus ad perpendiculum, si vis perpendicularis augeri, aut parallela minui concipitur.

Cui data demonstratio, quae vel ex inspectione figurae patet, non satisfacit, sumat in triangulo D C L rectam C L, quam pono constantem, pro radio, erit D L, quae vim perpendicularem exprimit, tangens anguli D C L. Ex elem. Tangentes, & cotangentes rationem habent reciprocam; quo minor igitur fit D L seu vis perpendicularis, eo magis crescit eius cotangens, sive tangens anguli DCH, proin etiam crescit angulus refractus; imminuta ergo vi perpendiculari crescit angulus refractus, ac refractionis linea magis a perpendiculo removetur. Ponatur nunc vis perpendiculis C H constans, sitque C H radius, erit D H tangens anguli D C H; crescente igitur tangente D H = C L, quae vim parallelam exprimit, angulus quoque refractus crescet, lineaque refractionis iterum a perpendiculo removebitur. Similiter demonstrabo, aucta vi perpendiculari, aut imminuta parallela fieri refractionem ad perpendiculum. Exemplum refractionis praebet globus ex aere in aquam oblique transiens; quatenus

enim

Digitized by Google

enim in densius medium descendit, ac maiorem in eo descensu resistentiam sentit, eius vis perpendicularis imminuitur, ac proin refractio fit a perpendiculo: si angulus incidentiæ admodum exiguus sit, ut vis perpendicularis destruatur tota, manebit sola vis parallela, aut accedente elaterio fiet reflexio, eo modo, quo motum fieri post incursum in planum immobile diximus: illud nemo non videt, corpus normaliter incidens in aliud, nullam pati refractionem, sed eadem recta pergere, vel post incursum quiescere, aut reflecti debere; quia nulla adest caussa directionem mutans; proinde eadem constans manet ob vim inertiæ. §. XXIV. Si globus iam penitus immersus est in aqua, utique & vis perpendicularis & parallela maiorem quam ante in aere, resistentiam sentit; sed nulla tum adest caussa rationem earum virium, quæ residuæ sunt, immutans. At ponatur globus in eo situ, ubi superficiem novi medii e. g. aquæ contingere incipit: si tum solam haberet vim superficiei aquæ parallelam, nullam pateretur resistentiam: at quatenus concipitur in aquam descendere, huic descensui seu vi perpendiculari medium densius magis resistit, eamque unam adficit, perinde ac si directione illa perpendiculari nova vis opposita imprimeretur; unde consequitur ut vis perpendicularis maiorem aut minorem, quam antea, rationem ad parallelam habeat, & refractio a perpendiculo fiat.

CAPUT VI.

De Motu Uniformiter Accelerato, & Retardato.

Quibus notiones, & elementa quantitatum infinitesimalium perspecta sunt, iis nihil in omni hac tractatione obscurum, nihil dubium videri potest; aliis quidem ita declarare rem omnem satagemus, ut theoriam motus accelerati, quæ summi in Newtoniana Physica momenti est, quantam necesse est, arripiant. Lemmata ad eas quantitates pertinentia in illum maxime locum reieci, quo eorum expositio facilior, & usus uberior esse videbatur.

§. LXXXII.

Definitio. Vis, quae continuo agit, sive quae celeritatem continuo auget, vel minuit, *acceleratrix*, vel *retardatrix* dicitur, eaque *constans*, si incrementa vel decrementa celeritatis quae producit, intra aequalia tempora aequalia sunt: *variabilis*, si ea incrementa, vel decrementa sunt inaequalia. Motus, quem vis acceleratrix, vel retardatrix constans producit, *uniformiter acceleratus*, *vel uniformiter retardatus* adpellatur, in quo nimirum celeritates crescunt, vel decrescunt, uti tempora, aequali tempore aequaliter, duplo, vel triplo tempore in ratione dupla, vel tripla.

§. LXXXIII.

Corollarium. In motu uniformiter accelerato celeritates sunt temporibus proportionales. Sequitur id ex notione eius motus. Proinde ex proportione C : c = T : t, enascitur formula C = T. Ac si tempora, & celeritates geometrice exhibendae sunt ope linearum, eae non nisi per lineas proportionales exhiberi possunt, quales sunt in triangulo rectangulo, in quo tota altitudo totum tempus, quo is motus durat, partes altitudinis, quae adpellantur *abscissae*, partes temporis denotant: basis celeritatem finalem, lineae ad basin parallelae, quae *ordinatae* vocantur, celeritatem datae parti temporis respondentes denotant. Sit ABC Fig. XVIII. T. I. eiusmodi triangulum, in quo recta b c ponitur parallela ad basin B C; erit ex Elem. A B : B C = A b : b c, hoc est ut totum tempus indicatum per A B ad partem temporis A b; ita celeritas finalis B C, quae toto tempore acquiritur, ad celeritatem b c, quae acquiritur parte temporis A b.

§. LXXXIV.

Propositio. *In motu uniformiter accelerato spatium dato tempore percursum, est dimidium eius, quod eodem tempore celeritate finali sive quae in fine motus uniformiter accelerati acquiritur, motu aequabili conficeretur.* Sit celeritas finalis C; datum tempus T, spatium percursum

S;

S; si ea celeritas finalis C, initio motus extitisset, & mansisset constanter eadem, spatium seu S foret $= C\,T$.

§. XXXVII. Dico, in motu uniformiter accelerato spatium confectum esse $= \frac{C\,T}{2}$. Dem.

Concipiatur totum tempus T in tempuscula minima, & inter se æqualia divisum; & celeritas primo tempusculo producta dicatur c. Quoniam in hoc motu celeritates crescunt ut tempora, habebitur uti tempusculorum, ita celeritatum intra eadem genitarum progressio arithmetica: c. 2 c. 3 c. 4 c. 5 c. 6 c. — — — C; in qua serie terminus ultimus C est celeritas finalis toto tempore T paulatim collecta. Iam vero tempusculis minimis motus haberi potest pro constante, & æquabili; si enim durante quodam tempusculo variatio celeritatis conciperetur, non iam conciperetur tempusculum minimum. Hinc spatium tempusculis minimis & inter se æqualibus, quorum singula sunt ut 1, percursum, erit ut celeritas, secundum formulam S = C. Ergo singuli termini dictæ progressionis exprimunt spatia singulis tempusculis minimis confecta, & summa progressionis exprimit spatium S toto tempore T percursum. Est autem ex Elem. summa progressionis, cuius primus terminus c est minimus relate ad ultimum æqualis dimidio facto ex ultimo termino C in numerum terminorem T; nam tempus T est numerus sive summa omnium tempusculorum, in quæ dividitur; Est igitur in hoc motu $S = \frac{C\,T}{2}$.

Universe ex Elem. summa s progressionis arithmeticæ æquatur facto ex summa termini primi a, & ultimi ω in dimidium numerum terminorum n, ut sit

$s = \frac{a\,n + \omega\,n}{2}$. *Ex geometria infinitesimorum constat si primus terminus a sit minimus, id est, minor quavis magnitudine determinate adsignabili, eum evanescere & haberi posse pro Zero; ut proinde eo casu sit summa pro-*

gressionis $s = \frac{\omega n}{2}$. *Porro cum celeritates sint ut tempora, & tempuscula semper minora, & minora concipi possint, etiam celeritas primo tempusculo genita magis magisque minui potest, ac denique ea relate ad celeritatem finalem C evanescet, eritque* = 0. *Certe quo minora concipiuntur tempuscula, in quæ dividitur datum tempus T, eo propius terminorum summa accedet ad dimidium factum* $\frac{1}{2}$ *C T. Concipiatur tempus divisum in* 10 *partes, ut dimidius terminorum n sit* 5; *erit summa* = $\overline{1 + 10} \times 5 = 55$. *Dividatur idem tempus in* 100 *partes, erit summa* = $\overline{1 + 100} \times 50 = 5050$. *Dividatur idem tempus in* 1000 *particulas, fiet summa* = 500500. *Celeritas initialis ceu primus terminus hic ponitur* = 1. *Finalis in primo casu ponitur* = 10; *in altero* = 100, *in tertio* = 1000. *Si celeritas finalis* 10 *initio motus extitisset, spatium intra tempus pariter ut* 10, *esset* = 100. *Nunc cum successive acquiritur, id spatium fit* = 55. *Est autem* 100 : 55 = 20 : 11. *Igitur excessus supra dimidium æquatur* $\frac{1}{20}$. *In altero casu celeritas finalis est* = 100, *& si constans fuisset per tempus ut* 100, *spatium foret* = 10000: *nunc vero spatium reperitur* = 5050. *Est autem* 10000 : 5050 = 200 : 101 *excessus ergo supra dimidium æquatur uni ducentesimæ parti. In casu tertio celeritate finali* = 1000 *tempore* = 1000 *spatium foret* = 1000000. *Celeritate autem paulatim crescente spatium fit* = 500500; *est autem* 1000000 : 500500 = 2000 : 1001. *Igitur excessus supra dimidium est una bis millesima pars. Atque in hunc modum quo plura, adeoque etiam quo minora concipiuntur tempuscula, in quæ datum tempus dividitur, eo minor est excessus spatii a duplo spatio celeritate finali eodem tempore conficiendi; cum igitur numerus tempusculorum semper augeri possit, is excessus semper minuetur, ac denique evanescet, ut ratio spatii motu æquabili & celeritate finali confecti ad spatium motu uniformiter accelerato percursum exacte* $= C\,T : \frac{C\,T}{2}$.

§.

§. LXXXV.

Corollarium I. Exprimat F. XVIII. recta B C celeritatem finalem, A B tempus, quo motus durat; si ea celeritas finalis initio temporis extitisset, & perdurasset æquabiliter tempore A B, spatium confectum exprimeretur per rectangulum A B C D; cum ergo huius dimidium designet spatium motu accelerato percursum, istuc exprimetur per triangulum rectangulum A B C: ut proinde spatia motu uniformiter accelerato confecta, sint ut triangula rectangula, quorum abscissæ tempora ordinatæ celeritates exhibent.

§. LXXXVI.

Corollarium II. In hoc motu spatium tempore A b confectum, est ad spatium confectum tempore A B, ut triangulum A b c ad triangulum A B C; sunt autem hæc triangula similia, ac proin in ratione duplicata laterum, id est, abscissarum, vel ordinatarum: abscissæ exprimunt tempora, ordinatæ celeritates; igitur *spatia in hoc motu sunt in ratione duplicata temporum, vel celeritatum*, intelligendo tempora ab initio motus A computata, & celeritates inde ab initio usque ad certum tempus acquisitas. Idem patet ex formulis hactenus demonstratis; nam $C = T$ (§. LXXXIII.) & $S = \frac{CT}{2}$; proinde substituendo factores proportionales (§. XVI. n. III.) $S = \frac{C^2}{2} = \frac{T^2}{2}$; sive $S : s = \frac{C^2}{2} : \frac{c^2}{2} = C^2 : c^2$

§. LXXXVII.

Corollarium III. Quoniam $S = T^2$ vel C^2, erit $T = \sqrt{S}$, & $C = \sqrt{S}$. §. XVI. n. IV. *Celeritates, & tempora in hoc motu sunt in ratione subduplicata spatiorum.*

§. LXXXVIII.

Corollarium IV. Quia tempora ordine naturali nu-

Digitized by Google

merorum creſcunt, ac celeritates iisdem proportionales ſunt: ſpatia vero in ratione temporum, vel celeritatum duplicata; erit

Series temporum & celeritatum	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Series ſpatiorum ab initio motus	1.	4.	9.	16.	25.	36.
Spatia ſingulis temporibus ſeorſim confecta.	1.	4—1.	9—4.	16—9.	25—16.	36—25
	1.	3.	5.	7.	9.	11

Igitur *in motu uniformiter accelerato, ſi ſpatium primo tempore confectum ponitur* = 1; *reliqua ſpatia ſingulis temporibus ſeorſim confecta creſcunt ut numeri impares, ſive in progreſſione arithmetica numerorum imparium.*

§. LXXXIX.

Corollarium V. *Quaecunque data celeritas, qua mobile intra certum tempus certum ſpatium conficit, concipi poteſt acquiſita motu libero & uniformiter accelerato per certam altitudinem, vel ſpatium continuato*; nam creſcente tempore creſcit celeritas: tempus vero indefinite creſcere poteſt, igitur & celeritas; quapropter quaecunque data celeritas denique acquiri poteſt hoc motu. e. g. globus tormentarius iuſta pulveris quantitate excuſſus obſervante Merſenno intra 1'' conficit 600 pedes. Igitur concipi poteſt, globum ex ea altitudine lapſum hoc motu, ut celeritas finalis eſſet ea, qua ſi aequabiliter moveretur, intra 1'' conficeret 600 pedes.

§. XC.

Corollarium VI. Quoniam motus uniformiter retardatus eſt, in quo aequali quovis tempore aequalia fiunt decrementa celeritatis, uti ſi mobile proiiciatur directione oppoſita vi acceleratrici; hinc in eo motu ſingulis tempuſculis amittitur gradus celeritatis aequalis illi, quam vis acceleratrix ſecundum contrariam directionem producit. Sicut autem decrementa celeritatis in motu uniformiter retardato aequalia ſunt incrementis in motu accelerato: ſic decrementa ſpatiorum aequalia ſunt ſpatiis, quae eodem tempore per vim accele-

ra-

Digitized by Google

ratricem conficerentur, ſpatia per vim acceleratricem ſingulis temporibus confecta, ſunt: 1. 3. 5. 7. 9. 11 &c. Talia igitur ſunt etiam decrementa ſpatiorum. Sit ſpatium, quod vi proiectionis æquali quovis tempore conficeretur, = 12; accedente vi retardatrice ea ſpatia decreſcent hac proportione:

12 — 1.	12 — 3.	12 — 5.	12 — 7.	12 — 9.	12 — 11
11.	9.	7.	5.	3.	1.

Colliges 1. *Spatia motu uniformiter retardato deſcripta, decreſcunt in progreſſione arithmetica numerorum imparium*, & ſpatiis vi acceleratrice confectis prorſus æqualia ſunt, ſi computus ab ultimo tempore fiat.

2. *Spatia a fine motus computata ſunt ut quadrata temporum ordine inverſo ſumtorum.* Dividatur tempus in 6 partes æquales 1. 2. 3. 4. 5. 6.
erit ordo inverſus : 6; 5. 4. 3. 2. 1.

Si iam ſpatia a fine motus computentur $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$; fiet ſpatium $= 36$. Dein $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Porro $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, atque ita deinceps.

3. *Spatium motu uniformiter retardato confectum duntaxat dimidium eſt eius, quod celeritate initiali, ſi conſtans maneret, deſcriberetur*; æque enim decreſcunt hæc ſpatia, uti eadem in motu accelerato creſcunt. Si celeritas initialis ponatur ea, qua ſingulis temporibus conficeretur ſpatium $= 12$, uti ſupra poſuimus; ac ſumantur 6 eiusmodi tempora, eſſet totum ſpatium in motu æquabili ſeu $S = C\,T = 12 . 6 = 72$. In motu autem uniformiter retardato id ſpatium invenimus $= 36$ $= \frac{72}{2}$. Igitur ſpatia hoc motu confecta, etiam ſunt ut *triangula, ſive dimidia rectangulorum, quorum altitudo tempus, baſis celeritatem initialem repræſentat.*

4. *Mobile per altitudinem quandam motu uniformiter retardato aſcendit eodem tempore, quo ex eadem altitudine motu uniformiter accelerato deſcenderet*, quia ſpatia a fine motus computata ſemper æqualia ſunt iis, quæ eodem tempore motu uniformiter accelerato deſcriberentur.

5. *Si mobile celeritate finali sursum agatur, ad eam motu retardato altitudinem eodem tempore perveniet, ex qua descendendo eam celeritatem acquisivit*; quia eadem vis & motum deorsum accelerat, & motum sursum retardat.

Hactenus de vi acceleratrice generatim, & velut mathematice egimus; nunc eandem ad phænomena naturæ explicanda adhiberi oportet.

§. XCI.

Observatio I. Corpora omnia terrestria sibi relicta tendunt per lineam rectam perpendicularem (ad sensum saltem) deorsum ad horizontem; & quoniam vis corpora terrestria perpetuo deorsum urgens, *gravitas* nuncupatur; idcirco directio corporum gravium, vel gravitatis cum linea horizontali, ubi superficiem terræ tangit, vel cum superficie aquæ stagnantis, efficit angulum utrinque æqualem, nempe rectum. Hoc quidem phœnomenon adeo constans est, & ubique notum, ut recta, quæ angulos deinceps positos æquales facit, a perpendiculo sive directione corporis gravis, vocetur *perpendicularis*.

II. Motus corporum gravium deorsum est uniformiter acceleratus; ac institutis primum a Galilæo, Ricciolo, & aliis post hos pluribus observationibus inventum fuit, spatia percursa esse ut quadrata temporum; ac testibus maxime Academicis Parisinis corpus libero descensu conficit primo minuto secundo 15 pedes Parisin. 1 dig. 2 lin. $\frac{1}{18}$. = 181 digit. 2,05 lin. intra alterum min.'' 45 ped. 3 digit. $6\frac{1}{2}$ lin. In tertio 75 ped. 5 digit. $10\frac{5}{18}$ lin. Qui numeri proxime sunt ut 1.3.5. ac si sibi addantur, sive si spatia ab initio computentur, eadem erunt ut 1. 4. 9.

III. Exclusa aeris resistentia gravia terrestria æquali celeritate decidunt, & eodem tempore eandem altitudinem emetiuntur. Sic Newtonus L. III. Prop. XLII. Schol. gen. ait: *Proiectilia in aere nostro, solam aeris resistentiam sentiunt. Sublato aere, ut fit in vacuo Boylea-*

Digitized by Google

leano, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis, & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Cl. Desaguliers facto coram Rege Angliæ tentamine exhibuit, aureum & plumulam altitudinem 15 ped. in vacuo emetiri eodem tempore; id quod a pluribus deinceps tentatum, atque observatum est.

IV. Si corpora volumine aut pondere magnopere differunt, & per aerem vel aquam demittuntur, non eodem tempore idem conficiunt spatium; quod nemo non experiri potest; nempe ut Newtonus ait, *medii resistentiam sentiunt*; de qua cum sit alius agendi locus, lapsum gravium præcisa ea resistentia, perinde ac si in vacuo fieret, deinceps spectabimus.

§. XCII.

Corollarium I. Quoniam gravia telluris nostræ sibi relicta in quovis telluris loco normaliter ad horizontem tendunt: tellus autem ad sensum sphærica est; idcirco directiones gravium ad superficiem normales per centrum transeunt, & gravitas corpora terrestria ad centrum terræ urget, physice ut aiunt, & ad sensum; multæ enim irregularitates, si adcurate rem expendimus, ei directioni ad centrum obsistunt.

§. XCIII.

Corollarium II. Quia gravium liber descensus est rectilineus, & uniformiter acceleratus (quatenus sola gravitas agit) idcirco gravitas est vis acceleratrix constans, secundum eandem perpetuo directionem agens, si nempe altitudines lapsuum, & distantiæ a superficie terræ non sint nimis magnæ.

In ea quidem distantia, ad quam a nobis proiici corpora terrestria possunt, & a superficie terræ removeri, gravitas semper constans censetur, cum ea ad radium telluris non habeat sensibilem rationem.

§. XCIV.

Corollarium III. Sint bina gravia, aurum, & pluma tenuis, quæ eodem tempore eandem altitudinem emetiuntur in vacuo; erunt celeritates finales utrinque eædem; proinde etiam celeritates elementares, sive initiales; singula igitur elementa, ex quibus massæ corporum constant, æquali vi gravitatis adficiuntur, sive plura, ut in auro, sive pauciora, ut in pluma, sub certo volumine contineantur; neque enim sola compositio seu compositionis modus ad gravitatem elementorum quidquam conferre potest; atque ob hanc caussam alia est *vis acceleratrix gravitatis*, cuius mensura est celeritas, quæque in corporibus terrestribus & elementis corporum eadem est, & constans: alia est *vis motrix gravitatis*, quæ in nostris corporibus, si ea quiescant, *pondus* vocatur, æstimaturque ex massa, sive numero elementorum certo volumine comprehensorum. Hæc vis in diversis corporibus diversa est, etsi ex eadem altitudine eodem tempore decidant; si in vacuo Boyliano globus argillaceus, & plumbeus incidant in obstaculum molle, maiorem in hoc cavitatem efficiet plumbeus, quam argillaceus. Formulas de ponderibus expressi §. XIX & seq.

Etsi in corporibus terrestribus cum libere decidunt, vis acceleratrix eadem sit, tamen si decidunt per plana inclinata, vis acceleratrix, qua descendunt secundum directionem plani: est minor vi illa, qua libere & perpendiculariter cadunt: præterea in maiore a terra distantia vis illa acceleratrix decrescere potest, ac reipsa decrescit, quemadmodum infra demonstrabitur; quapropter rationes virium acceleratricium diversarum, etsi singulæ ponantur constantes, investigandæ sunt.

§. XCV.

Corollarium IV. *Celeritas genita a viribus acceleratricibus diversis, quarum singulæ constantes sunt, est in ratione composita temporum, per quæ vires agunt, & virium ipsarum.* Nam si vis ponitur utrinque eadem, celeritas crescit ut tempus (§. LXXXIII.) si tempus ponitur utrinque idem, perspicuum est, a vi duplo vel triplo aut in quacunque multiplicium, vel submultiplicium serie maiore vel minore celeritatem duplo, triplo

vel

vel in quacunque multiplicium aut submultiplicium serie maiorem vel minorem gigni: ut adeo celeritates a viribus acceleratricibus diversis, quarum singulæ constantes sunt, eodem tempore genitæ sint directe ut ipsæ vires acceleratrices; quam ob rem, si & tempora & vires diversæ sunt, celeritates sunt in ratione composita temporum, ac virium; quod exprimit formula $C = VT$. Quoniam autem vires acceleratrices diversas ponimus constantes, ad easdem leges & formulæ de motu uniformiter accelerato pertinent; unde facta combinatione novæ formulæ ad investigationem naturæ admodum utiles enascuntur; quas hoc loco subiungemus.

I. $V = \frac{S}{T^2}$; vel $V = \frac{C^2}{S}$ hoc est, *vires acceleratrices diversæ sunt in ratione composita ex directa spatiorum, & inversa duplicata temporum*; vel *in ratione composita ex duplicata celeritatum, & reciproca spatiorum.* Nam $C = VT$, & præterea $C = \frac{2S}{T}$ (quia $S = \frac{CT}{2}$ §.LXXXIV.) igitur $VT = \frac{2S}{T}$, & $V = \frac{2S}{T^2}$ h. e. $V : u = \frac{2S}{T^2} : \frac{2s}{t^2} = \frac{S}{T^2} : \frac{s}{t^2}$. Dein quia $C = VT$, erit $V = \frac{C}{T}$; & $T = \frac{2S}{C}$ (quia $S = \frac{CT}{2}$ §. cit.) hinc si pro divisore T in formula $V = \frac{C}{T}$ substituatur valor proportionalis (§. XVI. n. III.) erit $V = \frac{C^2}{2S}$, $V : u = \frac{C^2}{2S} : \frac{c^2}{2s} = \frac{C^2}{S} : \frac{c^2}{s}$.

II. $S = VT^2$, vel $S = \frac{C^2}{V}$. Nam $S = \frac{CT}{2}$, & $T = \frac{C}{V}$; hinc $S = \frac{C^2}{2V}$; & quoniam binarius est constans, fit $S = \frac{C^2}{V}$; pariter quia $S = \frac{CT}{2}$ & $C = VT$, fiet $S = \frac{VT^2}{2} = VT^2$. Hoc est, *ſpatia confecta per vires acceleratrices diverſas, quarum ſingulæ conſtantes ponuntur, ſunt in ratione compoſita ex directa virium, & duplicata temporum, vel ex duplicata celeritatum, & reciproca virium.*

Multæ aliæ aſſignari eiusmodi formulæ poſſunt, quæ vel continentur in his, quas expreſſimus, vel ex iis levi brachio conſtruantur. Nunc uſum earundem indicabimus.

§. XCVI.

ADPLICATIO THEORIÆ ET EXERCITATIO.

Problema I. *Invenire ſpatium per gravitatem terreſtrem quovis dato tempore conficiendum.* Reſolutio. Quoniam gravitas terreſtris conſtans eſt, ſpatia per eam confecta, ſunt ut quadrata temporum. Eſt autem ea vis gravitatis terreſtris, ut corpus intra 1″ percurrat 181 digitos, neglectis minutiis. Sit hoc ſpatium $= g$; tempus, quo conficitur $= 1$. Quodvis aliud ſpatium in digitis expreſſum, & eadem vi gravitatis motu uniformiter accelerato confectum, ſit $= S$, & tempus, intra quod conficitur, in minutis ſecundis expreſſum, ſit $= T$. erit (§. LXXXVII.) $g : S = 1 : T^2$; unde fit $S = gT^2$. Quæritur ſpatium a gravi terreſtri confectum, ſi motus per duas ac dimidiam horas acceleretur; erit $T = 2\frac{1}{2}$ hor. ac in minuta ſecunda reſolutum $= 9000''$; ac $T^2 = 81000000$. Porro $g = 181$. unde fit $S = gT^2 = 14661000000$. Tot ergo digitos grave terreſtre percurrit intra duas horas, ac dimidiam: ii efficiunt

ciunt pedes 1221750000. Hic numerus pedum converti poteſt in ſemidiametros terreſtres, quarum una continet pedes 19615782. Facta diviſione obtinentur 62 ſemidiametri ac præterea 5571516 pedes. Quia diſtantia media lunæ non niſi 60 ſemid. terræ æquatur, ſequitur, ut ſpatium a gravi terreſtri intra horas duas ac dimidiam confectum, maius ſit, quam diſtantia media lunæ a terra.

Problema II. *Invenire tempus, intra quod per gravitatem terreſtrem motu uniformiter accelerato conficitur datum ſpatium.* Sit datum ſpatium $S = 23709$ ſemidiametris terreſtribus; quæ eſt diſtantia ſolis a terra neglectis fractionibus. Quæritur tempus intra quod per gravitatem terreſtrem id ſpatium conficeretur. Si ſpatium intra 1'' confectum dicatur g, ut antea, erit $T^2 = \frac{S}{g}$, & $T = \sqrt{\frac{S}{g}}$; nempe tempora in hoc motu ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum (§. LXXXVII.) Spatium S in ſemidiametris terræ datum redigatur primo ad pedes, multiplicando per 19615782 (tot enim pedes una ſemidiameter continet) eritque $= 465070575438'$; qui efficiunt digitos 5580846905256; ac dividendo hunc numerum per $g = 181$; fiet $S = \sqrt{30833408316\frac{60}{181}}$. Radix neglecta fractione æquatur 175594, ſi minutiæ denuo negligantur. Inventus numerus tempus in minutis ſecundis exhibet, quæ efficiunt 48 hor. (id eſt, dies binos) 46'. 34'. Tanto ergo tempore corpus terreſtre motu uniformiter accelerato datum ſpatium, ſeu diſtantiam ſolis a tellure mediam ſecundum Hellium, percurrit.

Problema III. *Determinare ſpatium deſcenſus, & tempus, intra quod eadem gravitate terreſtri, & acceleratione motus corpus acquireret celeritatem finalem datam, ſive eam, qua motu æquabili intra determinatum tempus pariter determinatum ſpatium percurreret.* e. g. Quia globus tormento excuſſus (§. LXXXIX.) intra 1'' conficit 600 pedes; quæritur altitudo, per quam demittendus

dus sit, ut eiusmodi celeritatem acquirat, qua intra 1'' conficeret 600 ped. & tempus, quo eam altitudinem emetiretur. Celeritas finalis intelligitur per spatium dato tempore conficiendum motu æquabili; hinc celeritas finalis acquisita per altitudinem $g = 181$, est ad celeritatem finalem C datam in nostro casu, ut $2g : C$. Nam corpus per altitudinem g motu uniformiter accelerato delapsum eodem tempore motu æquabili conficeret $2g$ seu duplam altitudinem. Quoniam spatia in hoc motu sunt ut quadrata celeritatum finalium (§.LXXXVI.) erit $4g^2 : C^2 = g : \frac{C^2 g}{4g^2} = \frac{C^2}{4g} = \frac{(7200)^2}{4 \cdot 181}$; (nam pedes 600 efficiunt digitos 7200) Hæc altitudo motu uniformiter accelerato conficienda, ut acquiratur celeritas C, qua motu æquabili intra 1'' conficerentur pedes 600, efficit digitos 71602,2 proxime, sive 5966 pedes, & 10 dig. Tempus, qua hæc altitudo percurreretur, reperitur ex formula $T = \sqrt{\frac{S}{g}}$ (Probl. præc.) est autem in nostro casu $S = \frac{C^2}{4g}$. Igitur $T = \sqrt{\frac{C^2}{4g^2}} = \frac{C}{2g} = \frac{7200}{2 \cdot 181} = 19'', \frac{161}{181}$.

Quoniam motu uniformiter accelerato ad quamvis datam celeritatem denique perveniri potest, semper reperietur hoc modo altitudo respondens datæ celeritati. Si vis acceleratrix, qua corpus per altitudinem datæ celeritati respondentem fertur, ponitur diversa a gravitate terrestri; tamen altitudo respondens reperitur, modo ratio vis illius acceleratricis ad gravitatem terrestrem detur. Sit ea ratio virium ut u : 1. ac sit n numerus digitorum Parisiensium, qui data celeritate singulis minutis secundis horariis percurrerentur; fiet (§. XCV. n. II.) $\frac{4g^2}{1} : \frac{nn}{u} =$

g:

$g : \frac{nn}{4gu}$, *quae erit altitudo respondens, per quam vi acceleratrice u acquiratur celeritas tanta, ut intra* 1'' *conficiatur spatium seu numerus digitorum Parisiensium n.*

Problema IV. *Vicissim inveniri potest finalis celeritas dato tempore acquisita, sive spatium motu aequabili conficiendum a gravi, si ea celeritate moveretur, quam acquirit libere cadendo intra tempus datum.* Sit datum tempus T, intra quod corpus libere cadit, $= \frac{1}{60}$, nempe min.''' quae est sexagesima pars minuti secundi; quaeratur primo spatium hoc tempore confectum, sive $S = gT^2 = \frac{181}{60^2}$.

Porro quia spatia motu uniformiter accelerato confecta sunt ut quadrata celeritatum finalium, erit $g : gT^2 = 4g^2 : 4g^2T^2$; quartus terminus exprimit quadratum celeritatis acquisitae tempore T per spatium $S = gT^2$. Erit igitur ipsa celeritas finalis $= 2gT = \frac{2.181}{60} = \frac{181}{30} = 6'' \frac{1}{30}$ tantum ergo spatii conficit grave intra 1'' ea celeritate, quam acquirit cadendo intra 1'''.

Si celeritas finalis per gravitatem terrestrem acquisita dicatur C; ea semper erit $= 2gT$, *nam* $S = gT^2$; *&* $C = \frac{2S}{T}$; *unde substituendo in hac formula valorem aequipollentem valori S, erit* $C = \frac{2gT^2}{T} = 2gT$. *Curandum vero ut tempus T sumatur in minutis secundis sive per quantitatem integram, sive fractam, & spatium confectum in digitis; qua mensura exprimitur spatium g.*

Problema V. *Datis spatiis motu uniformiter accelerato intra datum tempus confectis, invenire rationem vi-*

rium

rium acceleratricium. Resolutio. Ex §. XCV. n. I. vires acceleratrices sunt in ratione composita ex directa spatiorum, & reciproca duplicata temporum. Constat calculo astronomico ex observationibus eruto, lunam intra minutum primum ($= 60''$:) versus terram circiter descendere per 181 dig. Contra prope superficiem terræ corpus terrestre idem spatium emetitur intra $1''$. Quare, si vis acceleratrix lunæ in terram, spatium ab ea confectum, & tempus sint V, S, T; vis acceleratrix corporis prope superficiem terræ positi, spatium, & tempus sint u, s, t, erit $V : u = \frac{S}{T^2} : \frac{s}{t^2} = \frac{181}{60^2} : \frac{181}{1} = 60^2 : 1$. Constat præterea, distantiam corporis prope superficiem terræ a centro terræ esse ad distantiam lunæ ab eadem, ut $1 : 60$. Dicatur illa d: hæc D; erit $1 : 60 = d : D$; consequenter $1 : 60^2 = d^2 : D^2$; Si hæc ratio comparetur cum ratione virium, fit $V : u = d^2 : D^2$; hoc est vires acceleratrices lunæ in terram, & alterius corporis prope superficiem terræ positi, sunt reciproce, ut quadrata distantiarum a centro terræ, in quod tendunt. Sed infra de hac ipsa vi acceleratrice lunæ in terram redibit sermo.

§. XCVII.

Observatio. Theoria motus uniformiter accelerati ad conflictum corporum in primis imperfecte elasticorum adplicari potest; Nam compressio corporum elasticorum, quando inter se confligunt, fit motu retardato: restitutio motu accelerato; quando enim particulæ *anteriores* corporis elastici resistentiam ab altero, in quod incurrunt, iam sentiunt, particulæ posteriores adhuc accedere sed motu uniformiter retardato (saltem si corpus elasticum satis homogeneum sit) pergunt, donec tota, quæ ab incurrente fieri potest, peracta compressio est, dum nimirum utriusque corporis evadit æqualis, vel tota corporis incurrentis, si in obicem immobilem incidit, celeritas eliditur. Quamprimum tota com-

Digitized by Google

compreſſio partium corporis elaſtici peracta eſt; mox, ut figura paulatim reſtituatur; elaſticitas efficit; qua incitatæ particulæ primo poſteriores, mox anteriores motu uniformiter accelerato ad priorem figuram redeunt; & quidem; ſi elaſticitas perfecta eſt, motus in regreſſu partium eadem vi accelerabitur, qua in acceſſu, & compreſſione fuit retardatus: ſi elaſticitas fuerit imperfecta; minor erit vis acceleratrix in regreſſu partium & figuræ reſtitutione, quam erat vis retardatrix in partium acceſſu, & compreſſione. Patet igitur, quomodo theoria motus uniformiter accelerati ad hunc locum adplicari poſſit, ſecundum quam vires acceleratrices ſunt directe, ut quadrata celeritatum, quas gignunt, & reciproce ut ſpatia emenſa. §. XCV. n. I. Porro ſive elaſticitas corporum perfecta ſit, ſive imperfecta, ſpatia emenſa eadem ſunt, quia corpus utroque caſu priorem figuram penitus recuperare ponitur, proindeque particulæ ad regreſſum determinatæ idem ſpatium emetiuntur; Erunt igitur vires elaſticitatum, ut quadrata celeritatum, quas producunt, hoc eſt, vis elaſticitatis perfectæ V ad vim elaſticitatis imperfectæ u, ut quadratum celeritatis C, quam corpus in reſtitutione figuræ ab elaſticitate perfecta acquirit, ad quadratum celeritatis c, quam in reſtitutione figuræ acquirit ab elaſticitate imperfecta; unde ſequitur, celeritates acquiſitas eſſe viciſſim in ratione ſubduplicata virium acceleratricium; ſeu $C : c = \sqrt{V} : \sqrt{u}$, hoc eſt, ſi vis elaſticitatis perfectæ eſt quadruplo; vel noncuplo maior, quam vis elaſticitatis imperfectæ, erit celeritas genita a priore duplo, vel triplo maior, quam celeritas genita a poſteriore, gignitur autem tam in compreſſione, quam reſtitutione figuræ celeritas in incurrente ſecundum directionem contrariam, in impulſo ſecundum directionem incurrentis (ſumendo incurrens, & impulſum corpus eo, quo §. LXI. Schol.) ſignificavi, ſenſu.

§. XCVIII.

Problema VI. *Invenire generalem expreſſionem celeritatis in conflictu corporum genitæ, ſive perfecta elaſticitate, ſive imperfecta, ſive nulla ſint prædita.* Reſ.

G I. Su-

Digitized by Google

I. Sumatur corpus imperfecte elasticum; cuiusmodi sunt omnia, quæ in natura sunt, si stricte loquamur; ex dictis celeritas C genita per vim elasticitatis perfectæ V, ad celeritatem c genitam per vim elasticitatis imperfectæ u est in ratione subduplicata virium V, & u, ut sit

$$C : c = \sqrt{V} : \sqrt{u}.$$

Porro loco primi, & tertii termini substituantur valores alii æquales. Quantitas C sive celeritas ab elasticitate perfecta genita æquatur celeritati in incursu, sive in compressione genitæ, atque hæc celeritas in incursu seu prima periodo genita eadem est, sive corpus sit perfecte, sive imperfecte elasticum. Dein quantitas V seu vis elasticitatis perfectæ est æqualis vi comprimenti (§. LXVIII.) hæc vis comprimens iterum eadem est, sive corpus perfecte, sive imperfecte elasticum ponatur; igitur quantitas V etiam vim denotat, qua corpus imperfecte elasticum comprimitur, & u vim, qua figura restituitur; Igitur sensus superioris analogiæ hic est: *Velocitas in corporum incursu, vel compressione figuræ genita, est ad velocitatem genitam in figuræ restitutione in constante quadam ratione nempe subduplicata virium compressionis ad vires restitutionis figuræ.*

2. Sit hæc ratio virium subduplicata $= m : n$; quia velocitas in restitutione figuræ genita eandem habet directionem, quam habet velocitas in incursu, seu figuræ compressione genita; erit velocitas genita in solo incursu ad velocitatem genitam in incursu seu compressione, & restitutione simul, sive ad velocitatem genitam in utraque periodo conflictus, ut $m : m + n$. Sit velocitas in incursu, vel compressione genita $= 1$, erit $m : m + n = 1 : \frac{m + n}{m}$; quartus terminus, qui dicatur r, exprimit velocitatem genitam in utraque conflictus periodo;

3. Quoniam in corporibus non elasticis, id est, in duris, ac mollibus nulla vis adest ad recuperandam figuram; erit in iis $n = 0$, ac proinde $r = \frac{m}{m} = 1$. In

Digitized by Google

perfecte elasticis velocitas genita in una periodo est ad velocitatem genitam in utraque simul ut 1:2. (§. LXVIII. & LXXII.) quia in his corpora eadem vi se restituunt, qua comprimuntur; hinc erit $n = m$, & si ponitur $m = 1$; erit $m + n = 2$; adeoque $r = 2$. In corporibus denique imperfecte elasticis; quia velocitas genita in recuperanda figura minor est ea, quæ in amittenda gignitur, erit quantitas r maior, quam 1, & minor, quam 2.

4. Ut habeantur velocitates in conflictu genitæ pro omni casu corporum sive non elasticorum, sive elasticorum, perfecte, aut imperfecte, formulæ §. LXXII. exhibitæ multiplicentur per r; eritque pro omni casu

velocitas ab incurrente amissa $= \dfrac{rmC \mp rmc}{M + m}$, &

velocitas acquisita ab impulso $= \dfrac{rMC \mp rMc}{M + m}$; atque hæ formulæ generalissimæ sunt, nimirum posito $r = 1$ in duris, ac mollibus; posito $r = 2$ in perfecte elasticis; posito r cuiuscunque intermedii valoris in imperfecte elasticis.

Ex velocitate amissa ab incurrente, & ab impulso acquisita porro & quantitas motus amissa vel acquisita, tum & celeritas, ac motus quantitas post conflictum colligitur, quemadmodum ex III & IV capite huius Sectionis manifestum est.

CAPUT VII.

De Corporum Descensu per Plana Inclinata.

Hoc quidem loco, siqua in re, fœcunditas principiorum, quæ de resolutione virium, & proxime de vi acceleratrice diversa stabilivimus, tum commodum analyticarum formularum apertissime a quovis intelligetur; ut adeo siquid in numero corollariorum, ac theorema-

rematum satis magno, quem allaturi sumus, obscurum, arduumve videatur, id soli ingeniorum levitati, qua prima quævis, maximique usus principia perfunctorie lustrari, ac percurri solent, adscribi debeat.

§. XCIX.

Definitio I. *Plana*, vel *superficies planæ*, de quibus hic agimus, passim repræsentari per lineas solent; nam superficies plana est magnitudo solum longa, & lata, profunditatis, omnisque crassitiei expers, ex cuius quovis puncto ad quodvis aliud punctum duci potest linea recta, cuius singula puncta in superficie sita sunt. Et quoniam vi huius notionis extrema obumbrant omnia media; idcirco extremi duntaxat limites planorum, sive lineæ exhibentur.

§. C.

Definitio II. Quodvis planum dicitur ad alterum *inclinari*; si angulus, quem comprehendunt, est minor recto; atque is est *angulus inclinationis planorum*, qui maxime spectatur hoc loco. Referimus inclinationem dati plani potissimum ad planum horizontale, ita, ut altitudo dati plani sit perpendiculum ex suprema illius ora in planum horizontale demissum, quod exhibet directionem gravium. Præterea ponuntur plana perfecte lævia, ac corpora iis imposita adcurate sphærica, ut omnis affrictus, de quo alio loco est differendum, excludatur.

§. CI.

Definitio III. *Vis absoluta* corporis dicitur, quæ omni impedimento caret, maximumque effectum, quem potest, edit; uti si corpus P in planum M N (F.II.T.I.) normaliter incidat: *vis relativa* vel *comparativa* est, quæ impeditur qadam parte, cum se exerit nec maximum, quem potest, effectum edit. Sic vis, qua corpus directione P O incedens, agit in planum S V, est relativa; exprimitur enim recta P C quæ minor est recta P O normali ad planum M N.

§.

§. CII.

Propositio. *Si* (F. XIX.) *in triangulo rectangulo ABC hypothenusa AC planum quoddam repraesentet, basis BC lineam, vel planum horizontale, altitudo AB altitudinem plani, & directionem gravium; erit vis absoluta corporis gravis plano impositi ad vim relativam, qua descendit per planum, ut longitudo plani ad altitudinem: ad vim pressivam vero, qua premit in planum, ut longitudo ad basin.* Dicantur vis absoluta V, relativa u, pressiva w. Longitudo plani L, altitudo A, basis B; dico esse

$$V : u = L : A$$
& $$V : w = L : B.$$

Demonstr. I. Imponatur plano sphaera P, ex cuius centro concipiatur ducta recta P f ad horizontem normalis, & recta P m normalis ad planum A C, compleaturque parallelogrammum m n. Dum corpus vi gravitatis suae solicitatur directione P f, quae ad planum A C obliqua est, exprimet vim absolutam gravitatis ipsa recta P f; vim & directionem, qua agit in planum, quaque planum resistit, seu vim pressivam recta P m ad planum normalis: vim autem, qua nititur descendere secundum directionem plano parallelam recta P n, vel m f. Est igitur vis absoluta ad vim pressivam, seu

$$V : w = Pf : Pm$$

& vis absoluta ad vim relativam, seu

$$V : u = Pf : mf.$$

2. Quoniam P f est parallela ad A B, erunt anguli alterni B A C, P f m aequales; & quia praeterea anguli ad B, & m recti sunt, triangula A B C, & P f m sunt similia; est igitur ex Elem.

$$Pf : Pm = AC : BC = L : B.$$
& $$Pf : mf = AC : AB = L : A$$

3. Comparatis rationibus huius, & superioris numeri, fiet

$$V : w = L : B$$
& $$V : u = L : A.$$ Q. e. d.

§. CIII.

Corollarium I. *Vis absoluta corporis plano inclinato impositi ad vim relativam etiam est ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis, & ad vim pressivam, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis.* Nam si hypotenusa A C sumitur pro sinu toto, erit altitudo A B sinus anguli inclinationis A C B, & basis plani B C cosinus eius anguli. Sit radius, vel sinus totus $= 1$; erit

$$AC : AB \ (V : u) = 1 : \text{Sin. ang. inclinat.}$$

$$\& \quad AC : BC \ (V : w) = 1 : \text{Cos. ang. inclinat.}$$

Si angulus inclinationis ita crescit, ut infinite parum differat a recto, angulus B A C erit infinite parvus, ac latus B C, adeoque etiam vis pressiva evanescet: hoc est, grave plano verticali admotum vi gravitatis in illud non premit. Si e contrario angulus inclinationis fit infinite parvus, eiusdem sinus, adeoque & vis relativa evanescet: contra vero cosinus fit æqualis radio, hoc est corpus grave eo casu tota sua vi premit in planum, vis autem secundum longitudinem plani, quæ hoc casu cum plano horizontali congruit, nulla est.

§. CIV.

Corollarium II. Quodcunque corpus cuiuscunque massæ plano incumbat, semper eadem, quam demonstravimus, erit ratio vis absolutæ ad relativam; igitur duntaxat de vi acceleratrice sermo hic est, quæ in omni corpore terrestri in eodem terræ loco censetur eadem; quia, ut adnotavimus §. XCI. n. III. omnia corpora in vacuo æquali celeritate decidunt; Est igitur, quæcunque adsumatur massa, V constans, si de celeritate, spatio confecto, tempore descensus per planum agitur. At cum vis pressiva determinatur, fere ratio haberi massæ solet, quia planum totam pressionis vim ex vi singulorum elementorum conflatam sustentat.

§. CV.

Corollarium III. *Vis relativa in diversis planis est in ratione composita ex directa altitudinum, & reciproca lon-*

longitudinum. Cum enim ſit $V : u = L : A$, erit $u = \frac{VA}{L}$. Sit præterea aliud planum inclinatum; eius longitudo l, altitudo a; vis relativa corporis in eo poſiti m: vis abſoluta V conſtans, uti paulo ante adnotavi; erit $V : m = l : a$; & $m = \frac{Va}{l}$; conſequenter $u : m = \frac{VA}{L} : \frac{Va}{l}$, ſeu dividendo per V, $u : m = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$. Hinc 1. Si longitudines planorum eædem, altitudines diverſæ ſunt, vires relativæ ſunt ut altitudines. 2. Si altitudines eædem, longitudines diverſæ ſunt, vires relativæ ſunt reciproce ut longitudines. 3. In planis ſimilibus vires relativæ ſunt eædem; ſi enim ſimilia ſunt plana, erit $A : a = L : l$, proinde $\frac{A}{L} = \frac{a}{l}$, conſequenter etiam $u = m$. 4. Viciſſim ſi vires relativæ in diverſis planis ſunt eædem, concluditur, ea plana ſimilia eſſe; nam ſi $u = m$, erit $\frac{A}{L} = \frac{a}{l}$, proinde $A : a = L : l$.

§. CVI.

Corollarium IV. *Vires preſſivæ in diverſis planis ſunt in ratione compoſita ex directa ponderis incumbentis & baſeos, & reciproca longitudinis.* Sit loco V pondus abſolutum P, erit ex Prop.

$$P : w = L : B.\ w = \frac{PB}{L}.$$

Sit aliud planum inclinatum, cui incumbat pondus p; plani baſis ſit b, longitudo l; vis preſſiva ponderis ſit n; erit

$$p : n = l : b.\ n = \frac{pb}{l}.$$

consequenter $\quad w : n = \frac{PB}{L} : \frac{pb}{l}.$

§. CVII.

Corollarium V. *Vis relativa, & pressiva in decursu per totam longitudinem eiusdem plani est constans.* Pertingat enim sphæra P in D. Fig. cit. Erit in puncto quovis D vis absoluta ad relativam, ut D C : D E, & ad pressivam, ut D C : E C; Est autem ob similitudinem triangulorum A B C, D E C, D C : E C = A C : A B = L : A; & D C : E C = A C : B C = L : B. Eandem igitur in quovis puncto plani rationem vis relativa ad absolutam habet: hæc constans est ex cor. II. Consequenter illa quoque est constans; uti & vis pressiva ob rationem eandem. Hinc vero per sese fluit.

§. CVIII.

Corollarium VI. *Grave per planum inclinatum descendit motu uniformiter accelerato.* Nam vis absoluta est vis acceleratrix, sive continuo agens, eiusque directio in quovis plani puncto est obliqua; igitur continuo resolvetur in vim relativam plano parallelam, & pressivam seu normalem ad planum; præterea vis relativa in quovis puncto plani est constans; igitur est vis acceleratrix constans, qua motus deorsum uniformiter accelerari, & motus sursum uniformiter retardari debeat. Omnia igitur theoremata, quæ de vi acceleratrice constante allata sunt, ad descensum corporum per plana transferri debent, qualia sunt $S = \frac{CT}{2} = T^2$. $T = \sqrt{S}$. $C = T$. Pariter exemplum modo habetur binarum virium, quarum utraque acceleratrix, & constans; altera tamen alteri inæqualis est; quapropter formulæ §. XCV. exhibitæ huc pertinent: ex quibus theoremata de celeritatibus corporum per plana descendentium, de spatiis con-

confectis, & temporibus descensuum prono alveo derivantur.

§. CIX.

Theoremata de Celeritatibus.

I. *Corpus descendens per planum inclinatum eam in fine acquirit celeritatem, qua eodem tempore, quo descendit, posset motu æquabili duplum spatium, sive duplam longitudinem percurrere*; nam $C = \frac{2S}{T}$. §. LXXXIV.

II. *Celeritas in descensu per planum inclinatum acquisita est ad celeritatem eodem tempore acquisitam descensu libero, seu verticali, ut altitudo ad longitudinem.* Utraque enim vis & absoluta, & relativa est acceleratrix constans; erit igitur celeritas genita ut vis & tempus coniunctim, sive $C = V T$ (§. XCV.) cumque tempus ponatur utrinque idem, erit celeritas uti vis; universe mensura & effectus virium acceleratricium sunt celeritates intra æqualia tempora productæ. Si comparetur celeritas corporis in uno plano acquisita cum celeritate acquisita in alio, manebit ratio virium relativarum in diversis planis (§. CV.)

III. *Corpus descendens per planum inclinatum eam in fine acquirit celeritatem, quam acquisivisset descensu verticali per altitudinem eiusdem plani.* Sit celeritas acquisita in descensu per longitudinem plani C; celeritas per altitudinem acquisita K. Quoniam (XCV. n. II.) spatia confecta per vires acceleratrices diversas sunt in ratione composita ex duplicata celeritatum, & reciproca virium, erunt quadrata celeritatum ut spatia & vires coniunctim, ac proin celeritates in ratione spatiorum, & virium subduplicata, h. e. $C = \sqrt{S V}$. Sit vis absoluta per altitudinem plani V, spatium per eam confectum, nempe ipsa altitudo plani A; vis relativa u, spatium ab ea percursum, nempe longitudo plani L; erit secundum formulam $C = \sqrt{S V}$,

$$C : K = \sqrt{L u} : \sqrt{A V}.$$

Est autem $u : V = A : L$ (§. CII.) & $\sqrt{u} : \sqrt{V} = \sqrt{A} : \sqrt{L}$; facta ergo substitutione (§. XVI. n. III.)

erit $C : K = \sqrt{LA} : \sqrt{LA}$; quæ eſt ratio æqualitatis.

Patet, celeritates in deſcenſu per diverſa plana acquiſitas eſſe easdem, quæ per altitudines reſpondentes acquirerentur; celeritates vero in deſcenſu per diverſas altitudines acquiſitæ ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum (§. LXXXVII.) in eadem igitur ratione ſunt celeritates in deſcenſu per diverſa plana acquiſitæ.

§. CX.

Theoremata de Spatiis.

I. *Spatia in deſcenſu per idem planum ab initio motus computata creſcunt ut quadrata temporum, vel celeritatum.* Nam motus uniformiter acceleratur.

II. *Spatium in plano inclinato confectum eſt ad ſpatium eodem tempore percurſum motu verticali, ut altitudo plani ad longitudinem.* Nam ſi vires acceleratrices ſunt diverſæ ſpatia, ſunt in ratione compoſita ex directa ſimplice virium & duplicata temporum, h. e. $S = V T^2$ (§. XCV. n. II.) cum igitur ex hypotheſi tempus ſit idem, ſeu conſtans, erit $S = V$, ſive ſpatia *eodem tempore* confecta per vim relativam, & abſolutam ſunt, ut ipſæ vires, nempe ut altitudo ad longitudinem.

III. *Spatia in diverſis planis inclinatis æquali tempore percurſa, ſi ab initio computentur, ſunt in ratione directa altitudinum, & reciproca longitudinum.* Si enim tempus eſt conſtans, ſpatia ſunt ut vires; eſt autem hæc ipſa ratio virium (§. CV.)

§. CXI.

Theoremata de Temporibus.

I. *Tempus deſcenſus per altitudinem plani eſt ad tempus deſcenſus per longitudinem, ut altitudo ad longitudinem.* Sit R tempus deſcenſus vi abſoluta V per altitudinem plani A. T ſit tempus per longitudinem; erit ex formula $V = \frac{S}{T^2}$ (§. XCV. n. I.) $V : u \; (L : A) =$

Digitized by Google

$= \frac{A}{R^2} : \frac{L}{T^2}$; proin factum extremorum $\frac{L^2}{T^2} = \frac{A^2}{R^2}$ facto mediorum; unde habetur proportio $R^2 : T^2 = A^2 : L^2$, ac $R : T = A : L$.

II. *Tempora descensus per diversa plana sunt in ratione composita ex directa longitudinum, & reciproca subduplicata altitudinum.* Sint vires relativae, tempora, longitudines, & altitudines binorum planorum u, T, L, A & m, t, l, a. Quoniam spatia confecta ipsae longitudines planorum sunt, erit secundum formulam

$V = \frac{S}{T^2}$ (§. XCV. n. I.

$$u : m = \frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2}$$

ex §. CV. $\quad u : m = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$

hinc fit $\quad \frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2} = \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$

& $\quad T^2 : t^2 = \frac{L^2}{A} : \frac{l^2}{a}$

consequenter $\quad T : t = \frac{L}{\sqrt{A}} : \frac{l}{\sqrt{a}}$. Q. e. d.

Qui formulas tractare novit, facile videt, quae sit temporum ratio, si longitudines vel altitudines ponuntur eaedem. Unum adiungam; sint bina plana eiusdem longitudinis, diversae altitudinis, ut sit $L = l = 1$. Dico tempora descensuum in hac hyp. esse in ratione reciproca subduplicatae virium relativarum; erit enim $T : t = \frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{a}}$. Porro si longitudo est eadem, vires relativae sunt ut altitudines (§. CV. n. I.) nempe $u : m = A : a$, & $\sqrt{u} : \sqrt{m} = \sqrt{A} : \sqrt{a}$; si igitur va-

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Digitized by Google

valor virium in ratione temporum mox indicata substituitur, erit

$$T : t = \frac{1}{\sqrt{u}} : \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Animadversione digna est constans ratio inter vires absolutas, & relativas, inter celeritates ab iisdem æquali tempore genitas, inter spatia æquali itidem tempore per eas confecta; hæc enim omnia sunt ut longitudo plani ad altitudinem: tempus vero per altitudinem est ad tempus per longitudinem ut altitudo ad longitudinem. Cæterum qua breviore aut planiore via plura theoremata diduci possent, haud sane video; nec vero eorum copia molesta videri potest ei, qui propositionem fundamentalem, ac formulas de vi acceleratrice diversa recte perceperit. Exercitationis caussa & dubia quædam, & problemata nunc resolvam.

§. CXII.

Exercitatio.

I. *Sit (F. XX.) vectis recurvus, seu inclinatus in A, ita, ut si longitudo A C dividatur in quinque partes æquales, altitudo A B contineat quatuor, & basis B C tres eiusmodi partes: brachia vero A C & A D sint æqualia. In C ponatur pondus P, quod ope trochleæ in A connectatur cum pondere B; sitque aliud pondus in D. Ratio ponderis P ad pondus B sit ut 5 : 4; & ad pondus in D, ut 5 : 3. Teste experientia habebitur æquilibrium. At, inquiunt, intelligi nequit, quomodo pondus P ut 5 eodem tempore pondus B ut 4, & pondus D ut 3 sustinere possit; effectus enim maior videtur caussa.* R. Qui resolutionem virium non agnoscunt in natura, viderint, quid apte respondeant. Ego vero secundum theoriam de virium resolutione, & motu per plana inclinata aio, vim absolutam ponderis P plano incumbentis resolvi in binas vires, unam relativam plano parallelam, quæ est ad absolutam, ut altitudo ad longitudinem, alteram normalem versus planum, quæ est ut basis eiusdem plani. Cum igitur in dato vecte ratio altitudinis ad longitudinem ex hyp. sit, ut 4 : 5, idcirco pondus ut 5 per vim

vim relativam ut 4 sustentabit pondus B pariter ut 4: per vim autem pressivam, quæ est ut basis, sive ex hyp. ut 3, æquilibrium tuebitur cum pondere opposito in D, ut 3. Observa quoniam vis ponderis D in brachium A D est normalis, & vis pressiva ponderis P in brachium A C pariter normalis, necesse est ad æquilibrium obtinendum, ut brachia A D, A C æqualia sint, quemadmodum ex theoria æquilibrii sectione proxima intelligetur.

II. Inquiunt: *nullus in hoc vecte actualis motus datur: igitur nulla motuum resolutio habet locum.* R. c. a. n. c. Virium resolutio concipi potest, ac debet, sive corpora duntaxat nitantur ad motum, sive moveantur reipsa; quia actualis motus sublato impedimento, oritur ex ipso nisu, sive determinatione, quam habent corpora, sequiturque celeritas, & directio hæc potius, quam alia, quia hic potius, quam alius nisus vel determinatio ad motum corpori inesse concipitur. Nihil igitur inter motum, ac nisum ad motum, inter percussionem, & pressionem hoc quidem respectu interest. Quemadmodum igitur, siquod corpus oblique percutit planum, eius vis absoluta in vim parallelam, & normalem ad planum resolvenda est; ita idem contingit, si vi gravitatis descendat, vel nitatur descendere per planum; nam perinde est, utrum ponas planum horizonti perpendiculare, & directionem motus obliquam, an directionem motus horizonti perpendicularem, qualis est directio gravitatis absolutæ, & planum obliquum, sive ad horizontem inclinatum; utroque enim casu directio virium ad datum planum obliqua est, ac proin resolvenda, ut intelligatur, quæ sit vis plano parallela, quæ normalis.

III. *Mobile retardatur in descensu per plana: igitur motus non potest uniformiter accelerari.* R. d. a. excluso affrictu (ut pono) mobile retardatur, quatenus vis relativa in quovis puncto longitudinis plani est minor vi absoluta, c. a. quatenus ipsa vis relativa non manet constans, n. a, & c. (§. CVII.)

IV. *In motu uniformiter accelerato spatia sunt ut quadrata temporum; igitur non satis intelligitur, quomo-*

do

Digitized by Google

do eadem sunt ut vires vel ut altitudo ad longitudinem. (§.CX. n. II.) R. d. Spatia vi acceleratrice *eadem* confecta sunt ut quadrata temporum, si ab initio computantur, C. Si comparatio fiat inter spatia confecta per vires diversas, n. Et spatia confecta per longitudinem plani, & spatia confecta in linea verticali crescunt, ut quadrata temporum; at si spatia vis absolutæ referuntur ad spatia vis relativæ; alia est eorundem inter se ratio, quemadmodum exposui cit. §.

V. *Celeritas finalis in descensu per altitudinem, & longitudinem plani non potest esse eadem; quia vis absoluta, quæ agit in descensu per altitudinem maior est, ac maiorem gignit celeritatem, quam vis relativa agens secundum longitudinem plani: igitur vitium fortassis inest in demonstratione theorematis III. §. CIX.* R. n. rationem additam d. vis absoluta maior est, quam relativa, sed tanto minore tempore agit mobile deferendo per altitudinem plani, c. non agit minore tempore n. Vis absoluta ad relativam est ut longitudo ad altitudinem: tempus, quo agit vis absoluta mobile deferendo per altitudinem est ad tempus, quo agit vis relativa illud deferendo per longitudinem, ut altitudo ad longitudinem; igitur vires & tempora sunt in ratione inversa seu reciproca; ob quam caussam celeritates ab iis viribus genitæ necessario æquales evadunt; nam §.XCV.) $C = V\,T$, seu $C : c = V\,T : u\,t$. Quapropter si vires & tempora reciprocant, ut sit $V : u = t : T$, proindeque $V\,T = u\,t$, necessario erit $C = c$.

VI. *Si gravitas seu vis relativa minor est vi absoluta cur difficilius currus e. g. sursum per viam acclivem trahitur, quam in plano horizontali?* R. 1. Citius tamen per viam acclivem trahitur currus, aut quodvis pondus, quam directione verticali sursum; quod non fieret, nisi vis relativa minor, quam absoluta foret. 2. Dum currus per viam acclivem trahitur, superanda est *primo* inertia massæ, *secundo* gravitas relativa, tertio affrictus; directioni autem horizontali vis relativa omnino non obsistit; est enim hæc vis relativa, ut sinus anguli inclinationis, qui evanescit, si planum ponitur horizontale (§. CIII.) Sane siquod pondus suspensum

ex

Digitized by Google

ex fune pendeat, multo id facilius per arcum quemdam minimum, qui nihil fere a linea horizontali differt, quam directe, vel oblique sursum movetur; quod indicio est, non vim relativam, sed inertiam massae & affrictum superandum esse, si corpus in plano horizontali movetur, & protruditur. Sed haec quidem alium sibi locum vendicant; quae supra attulimus, duntaxat exercitationis gratia commemoravimus. In eundem finem adcommodata sunt sequentia problemata.

§. CXIII.

Problema I. *Data altitudine, & longitudine plani invenire spatium, quod corpus in plano percurrit eo tempore, quo vi absoluta descendit per altitudinem eiusdem.* Resolutio. Spatia vi absoluta, & relativa *eodem tempore* confecta, sunt ut longitudo ad altitudinem (§. CX. n. II.) igitur fiat: ut longitudo plani ad altitudinem; ita spatium vi absoluta confectum, quod ex hyp. est ipsa altitudo, ad spatium eodem tempore confectum in plano vi relativa; quapropter ut istuc spatium determinetur, ex angulo recto B (F. XXI.) agatur normalis BF in longitudinem AC, eaque designabit punctum F, quod corpus ex A descendens attingit eo tempore, quo vi absoluta altitudinem emetitur. Nam ex elem. si ex angulo recto demittitur normalis in hypothenusam, segmentum AF est tertia proportionalis ad hypothenusam seu longitudinem AC, & latus adiacens AB; quae est altitudo plani.

§. CXIV.

Corollarium. Non est praetereunda hoc loco elegantissima propositio, quae ex solutione huius problematis facillime intelligitur: *corpus per omnes chordas eiusdem circuli aequali tempore descendit, nimirum eo, quo vi absoluta descenderet per diametrum circuli.* Sint enim F. XXII. plana AC, AD, AE eiusdem altitudinis AB, quae est diameter circuli, quia spatium in plano conficiendum eo tempore, quo altitudo plani, sive diameter AB percurritur, determinatur a perpendiculo ex angulo recto

in

Digitized by Google

in planum demisso, & quia omnia perpendicula in plana A C, A D, A E demissa in peripheriam circuli cadunt, cum angulus in semicirculo semper rectus sit, hinc corpus eo tempore, quo diametrum percurrit in plano A C perveniet usque ad c, in plano A D usque ad d in plano A E usque ad e, hoc est, chordas A c, A d, A e, eodem tempore percurret, quo diametrum A B. Similiter ostenditur, chordas B c, B d, B e eodem omnes tempore percurri, quod ex sola inversione figuræ manifestum est; ac proinde corpus eodem quoque tempore ex c perveniet in B, quo ex d, vel e in B pervenit; nam tempus ex c in B æquale est tempori ex B in c, si figura invertitur, cum longitudo c B sit eadem, & angulus inclinationis c B E sit æqualis angulo alterno B x A.

§. CXV.

Problema II. *Datis longitudine, & altitudine plani, ac spatio in eo confecto, invenire, quantum spatii corpus eodem tempore motu verticali conficeret.* Resolutio. Spatium vis relativæ est ad spatium vis absolutæ (si tempora æqualia sunt) ut altitudo ad longitudinem plani (§. CX. n. II.) Est igitur quæsitum spatium motu verticali conficiendum, quartus terminus proportionalis ad altitudinem, & longitudinem plani, ac datum spatium in plano confectum. Sit F. XXIII. hoc spatium in plano A C confectum pars A F: ad F fiat normalis F f; punctum f determinabit spatium verticale A f vi absoluta confectum eo tempore, quo in plano percurritur pars A F; cum enim triangula A B C, A F f similia sint ob angulos ad B, & F rectos, & ad A communem, erit A B : A C = A F : A f, h. e. Ut altitudo ad longitudinem plani; ita spatium A F vi relativa percursum ad spatium A f eodem tempore percursum vi absoluta. Si pro spatio vis relativæ detur tota longitudo plani A C, quæratur ex eadem ratione tertia proportionalis ad altitudinem, & longitudinem; & invenietur A C; cum enim angulus A C c sit rectus ex constructione, sicut antea ad F, & C B ex eodem normaliter demissa in hypothenusam A c, erit hæc recta A c tertia propor-

tio-

tionalis ad altitudinem sive segmentum AB lateri AC adiacens, & ad hoc ipsum latus AC.

Scholion Generale.

I. Principium explicandorum motuum ab æquabili, ac simplici motu sumsimus, in quem deinceps omnes alii motus minime æquabiles, & simplices, sed maxime compositi, & accelerati vel retardati, & curvilinei resolvuntur ope tempusculorum infinitesimorum, quemadmodum suo loco declarabitur. Ex sola idea celeritatis, quæ nemini obscura esse potest, primigenia formula de illo motu, eaque maxime fæcunda nascitur. Ac quivis intelligit, si præcise celeritatis corporum habeatur ratio, quodvis etiam corpus instar puncti geometrici spectari posse, quod motu suo vel fluxu lineam describit, qua spatium confectum exprimitur; dimensio enim corporis utcunque extensi, cuius omnes partes eadem celeritate incedunt, ad maiorem, minoremve celeritatem per sese nil confert. Eadem recta, quæ spatium repræsentat quodam tempore percursum, si sine relatione ad tempus sumitur, exhibet directionem motus, secundum quam progreditur mobile, vel progrederetur certe quidem, nisi aliæ intervenirent caussæ motum, vel directionem mutantes. Est autem directio corporis in eadem recta, in quam vis impressa tendit: Tempus quoque, cum sit quantum, ac penitus similare, atque unius duntaxat dimensionis, nempe in longum, repræsentari lineis solet, & in theoria motus uniformiter accelerati per abscissas trianguli rectanguli designatur; nam & temporis, & linearum rectarum omnes partes toti, ac inter se similes sunt, sola differunt magnitudine; & sicut linea fluxu puncti generatur; ita hic fluxus, si ut æquabilis concipitur, idearum successionem, & temporis ideam ingerit. Cum vero linea, ac proin spatium quoque motu confectum, & tempus, intra quod conficitur, in partes æquales dividi, eædemque numeris exhiberi queant, patet profecto, quomodo & ipsa celeritas exhiberi numeris possit, & debeat, quemadmodum in solutione problematum ad motum æquabilem pertinentium a nobis factum est, ubi numeris præ literis usi sumus, quia particularium casuum solutionibus fere magis delectari solemus. Qui in calculo literali paullum modo versatus est, statim videt, literas substitui posse nostris numeris, adeoque solutiones generales esse. Quæ hoc numero commemoravi, eo pertinent, ut intelligatur, quanta inter motum, & dimensiones Geometriæ ac Arithmetices numeros analogia, & veluti affinitas sit: atqui omnia phœnomena motu constant, & motu perficiuntur; totaque naturæ facies mathesin refert. Ineptiunt ergo, atque ignorantiam produnt, qui demonstrationes, calculos, schemata geometrica ex physica reiiciunt, atque ad aliam referunt disciplinam.

II. Fateor, solutiones problematum de æquabili & simplici motu supra allatorum prætermitti a quovis posse. At eædem usum formularum, & commodum Arithmeticæ universalis patefaciunt, & utilissimæ exercitationis genus continent. Etsi enim non reiiciam ego quidem syllogismorum usum in Philosophiæ institutionibus; tamen ad perficiendam cogitandi, atque attendendi vim, & ad cognitiones pulcherrimarum rerum comparandas solutionem unius problematis, vel theorematis demonstrationem, si adcurate, ordinateque fiant, multis syllogismorum repetitionibus, & distinctionibus præferendam puto. Sine dubio rectissime fecerit, qui exercitationis genus modumque ipsi subiectæ materiæ adcommodarit, ut syllogismis dimicet, si res ferat istiusmodi pugnas, & operæ pretium sit: sæpe autem in demonstrationibus sese, aliosve adcurate exerceat.

III. Resolutio, & compositio motuum in Mechanica utramque paginam facit; si enim plures determinationes aut vires impressæ in eadem recta conspirent, acceleratio: si in eadem recta sibi oppositæ sint, retardatio motuum inde pendet; si angulum efficiunt, uti fere contingit, motus compositi, & rectilinei, & curvilinei omnes inde determinantur; ex eadem leges percussionis obliquæ, motus reflexi, & refracti, motus per plana, atque ipsum virium contrariarum æquilibrium, & theoria vectis derivatur, quod sequente sectione ostendemus. In natura, cum præsertim vires corporum

mu-

Digitized by Google

mutuæ sint, in idem mobile perpetuo plures determinationes concurrant necesse est, ut adeo motus simplex fere in solo præcisivo conceptu consistat; sed nempe quæ complicata sunt & composita, analysi indigent, ut, quid per singulas vires sive insitas, sive extraneas fieri possit, debeatque, intelligatur. Hoc modo accelerationem, & retardationem motuum in medio non resistente fieri concipimus; alia enim accelerationis & retardationis, alia resistentiæ medii theoria est: in motu per plana affrictum, & imperfectionem sphærarum descendentium, in machinarum theoria itidem affrictum, duritiem, imo & gravitatem funium, & vectis animo & cogitatione primo excludimus, separatim postea de his acturi: in conflictu corporum concurrentium perfecte dura aut mollia, aut perfecte elastica, qualia nulla sunt in universo fingimus, quæque sunt istius generis alia, quæ seorsim expendimus, ut distincta phœnomenorum, ac completa ratio exponatur; nam in naturæ contemplatione, atque interpretatione non modo plurimæ observationes atque experimenta instituenda sunt, sed eadem inter se conferri debent, & similia a dissimilibus segregari, & in certas distribui classes, ex iisdem leges erui, quæ ad singulas eiusmodi classes pertineant: eædem leges erutæ cum novis phœnomenis conferendæ sunt, ut magis stabiliantur, si cum illis congruant, aut corrigantur, donec omnia sibi constent. Cæterum exempla compositionis, ac resolutionis motuum passim se offerunt. Descensus, vel ascensus per quamvis scalam motum quemdam transversum, & alium, qui deorsum, vel sursum tendit, continet: imo quivis bipedum incessus quædam descriptio est diagonalis, dum uno pede versus unum, altero versus alterum parallelogrammi latus tenditur, atque ita via quadam media inceditur. Cum terra moveatur ab occasu in ortum, & corpora quoque & animalia in terra posita moveantur, perpetuo plures determinationes, & directiones concurrunt, ex quibus sollicitatio quædam media existit. Dum cymba trahitur ex utraque ripa adverso flumine, per medium, ceu per diagonalem ascendit. Qui ope cymbæ ad alterum ripæ latus tendunt, cum vi fluminis deorsum vehantur, ad partem ripæ altiorem ten-

Digitized by Google

dant necesse est, ut destinatum locum attingat. Qui moto ex curru prosilit, vim & suam, & a curru impressam in unám directionem diversam cogitur componere. In theatris scenici volatus ex duplici motu, transverso, & perpendiculari componuntur. Eadem motuum compositio intelligitur, si F. VII. concipias rectam P C æquabiliter, sibique semper parallelam transferri in D O, eodemque tempore muscam in recta P C ex P descendere in C; dum enim recta P C habebit situm m s, musca erit in r; dum acquirit situm D O, erit in O. Resolutio motuum, & compositio intelligitur, cum pondus unicum æquilibrium tuetur cum binis, vel pluribus aliis, si illud in directione diagonalis adplicatur, & vi ponderum compositæ, & contrariam directionem habenti æquipollet. Sic etiam vis simplex unius venti e. g. Euri flantis ab ortu æquivalet vi compositæ a binis ventis obliquis e. g. aquilonis flantis inter Eurum, & Boream, & noti inter Eurum & Austrum. Unicus homo vim ac conatum plurium ex parte quadam erumpentium sæpe sistit, dum directione quadam media obsistit reliquis.

IV. Inter corpora mollia & elastica, de quorum conflictu egimus, *innumerabiles* (ut Krafftius ait Præl. Acad. P. 2. C. VII. *continentur gradus intermedii eorum corporum, quæ impressiones acceptas ex parte tantum, non penitus exuunt; ad quorum classem sine dubio omnia corpora, quæ nobis obversantur, sunt referenda; non enim reperitur perfecte molle, nec etiam perfecte elasticum, sed omnia medii inter hæc generis esse deprehenduntur.* Cavendum autem; ne mollitiem, vel duritiem sola manuum nostrarum vi æstimemus; quis enim globum eburneum sensibiliter manu comprimat? idem tamen si per altitudinem aliquot pedum decidat in planum lapideum oleo vel sebo illitum, vestigium circulare multo maius efficit, quam efficere id posset, si non parte quadam ab ictu comprimeretur: similiter si unus globus fuligine vel atramento tinctus, in alterum non fucatum demittitur, post collisionem hic quoque adparet tinctus non in puncto quodam sed in ampliore circello, qui exprimit amplitudinem spatii complanati in globorum concursu, ac proinde compressionem eorundem; circel-

lus

lus ille solet esse maior vel minor pro maiore vel minore celeritate globi incurrentis. Ad leges conflictus experimentis confirmandas adhiberi solet *Machina percussoria* descripta a Keilio, Mariotto, Gravesandio, Krafftio, qui summam descriptionis in hunc modum complectitur: In assere ligneo F. XXIV. T. I. centris C & D describuntur duo arcus circulares A E, B F, qui chorda A 1 pro libitu assumta ita dividuntur, ut sit chorda A 2 prioris dupla, A 3 tripla, A 4 quadrupla, & sic porro. Si dein ex centris C & D suspendantur pendula A, & B, quae sint corpora mollia, vel elastica cognitae iam massae, & si eorum unum elevetur ad numerum quemcunque veluti 5, idque sibi permittatur, descendet illico per arcum 5 A, & in linea verticali C A adipiscetur celeritatem ut 5, qua in alterum globum B incurrere, & sub celeritate quadam nota conflictum exercere potest; si igitur postea B ascendet ad numerum 2 e. g. intelligetur, hanc collisionem progenuisse celeritatem ut 2. Ratio a theoria pendulorum derivanda est, in qua demonstrabimus, celeritates in linea verticali, ubi fit alterius globi cum altero collisio, esse ut chordas subtendentes arcum percursum, ut si chorda E A est ut 5, erit celeritas in puncto infimo ut 5; si chorda est ut 4, celeritas pariter ut 4. Hac igitur in machina observatur: 1. Globos molles, quorum alter in alterum quiescentem, vel minore celeritate motum incurrit post conflictum manere coniunctos, adeoque communi celeritate ferri, quae est ut $\frac{MC + mc}{M + m}$

§. LXIII. 2. Si aequali motus quantitate ex oppositis partibus sibi occurrunt, post conflictum quiescunt (§. LXVI. n. II.) si in ea hypothesi globi elastici sint, eadem vi, qua sibi occurrerunt, resilient (§. LXV. n. IV.) 3. Si globus elasticus, cuius massa $M = 3$. celeritas $C = 12$ incurrat in argillaceum, expertem elasticitatis & versus eandem partem tardius praecedentem, cuius massa $m = 2$, celeritas $c = 7$; ii facto conflictu coniuncti manent, & communi feruntur celeritate $= 10$. Sequuntur igitur corpora, quorum alterum elasticum est, alterum non item, leges corporum mollium, secundum

 quas

quas communis celeritas post conflictum est $\frac{MC + mc}{M + m}$

$= \frac{36 + 14}{5} = 10.$ Nec id mirum; nam partes corporis mollis statim cedunt impressioni, nec post mutatam figuram se restituunt, nec ut alterum elasticum comprimi possit, satis resistentiæ habent: alius ergo effectus collisionis est, si elasticum cum duro; alius, si cum molli concurrit. §. LXIX. 5. Si plures suspenduntur globi elastici sese mutuo tangentes, quorum centra in eadem recta iacent, & primus in reliquos incurrat quavis celeritate, globi intermedii omnes quieti manent, & solus ultimus prosilit celeritate ea, quæ legibus elasticorum conformis est. Unde patet, admodum celerem esse elasticitatis actionem; reipsa enim omnes figuram successive mutant, sed quæ celerrime restituitur, ut nullus mutare locum videatur, nisi ultimus, cuius motui nihil obsistit. Similiter si ab initio duo, tres, vel plures globi in reliquos incurrant, prosiliunt duo, tres, vel plures ultimi quiescentibus mediis; de qua re agit Gravesandus Elem. Math. P. I. & Boscovichius n. 368. in suppl. L. 2. Phil. Stayan. Massæ quidem globorum pro usu machinæ percussoriæ definiuntur ex pondere: velocitates ex spatio confecto, id est, ex chordis arcui percurso subtensis. Experimenta tamen paullum turbat aeris resistentia. Newtonus cum singulari artificio, quod in Scholio post leges motus indicat, cavisset, ne ipsis experimentis obesset aeris resistentia, observavit, eadem theoriæ admodum consentanea esse, & si globi imperfecte elastici sibi occurrunt, velocitates recessus mutui a se invicem semper fuisse ad velocitatem accessus in ratione constante, ut indicavi §. XCVIII. n. I. Cæterum in hac corporum collisorum theoria optime denuo adhibentur formulæ algebraicæ, inquit Krafftius, *quia sine harum usu explicatio regularum in hoc negotio occurrentium prolixitate sua tædiosissima est; hoc autem algebræ usurpato artificio quasi uno obtutu hauriri potest.* Sit aliud exemplum collisionis elasticorum, ut formularum usus magis perspiciatur. Impingatur malleus,

cu-

Digitized by Google

cuius massa $M = 1$ tt. Celeritas $C = 51$. in incudem, cuius massa $m = 50$ tt. Celeritas c ante impactum $= 0$; patet, esse hunc secundum conflictus casum, in quo $m\,c = 0$. In quo celeritas V corporis incurrentis seu mallei ex §. LXXIV. $= \frac{M\,C - m\,c}{M + m} = \frac{51. - 50.\,51}{51} = 1 - 50 = -49$. Hac igitur celeritate malleus repercutitur. Porro $u = \frac{2MC}{M+m} = \frac{2.\,51}{51} = 2$. quae est celeritas incudi impressa. Unde ratio intelligitur, cur circulatores quidam humi iacentes incudem gravem pectori impositam malleis validissime percuti patiantur sine noxa aut' dolore; celeritas enim incudi impressa e. g. 2, & versus pectus directa admodum parva est, ut sine damno sustineri queat.

V. Leibnitius instar principii sumsit, in toto hoc universo tot inter corporum conflictus eandem semper virium vivarum summam conservari, ut universum ipsum conservetur. Vires autem *vivas* ex massa ducta in quadratum celeritatis, mortuas ex massa ducta in celeritatem simplicem aestimat, ut summa virium ante conflictum fiat $= M\,C^2 \pm m\,c^2$; ac si in conflictu elasticorum celeritates V, & u (§. LXXIV.) eleventur ad quadrata, & ducantur in suas respective massas, invenietur ante & post conflictum summa constans, nempe $M\,C^2 \pm m\,c^2$, quod Hugenius primo animadvertit. In mollibus cum sit communis celeritas post conflictum $= \frac{M\,C \pm m\,c}{M + m}$; si haec multiplicatur per utramque massam $M + m$, id est, si divisor in formula celeritatis removeatur, patet summam motuum ante & post conflictum esse eandem, nempe $M\,C + m\,c$ in

Digitized by Google

primo quidem & secundo casu; in tertio cum sola maneat virium differentia, profecto summa non est constans, nisi ante conflictum motus secundum quamvis directionem e. g. corporis incurrentis, habeatur pro positivo, & secundum oppositam pro negativo, atque ita uterque computetur in eandem summam; sed reipsa quantitas motus — m c ante conflictum vere indicat vim vivam, perinde ac si esset + m c, neque directio quidquam obesse potest. Dein nec in imperfecte elasticis summa virium ante & post conflictum plane eadem est; perfecte autem elastica nulla novimus in natura; nihil igitur, inquit Krafftius pro Leibnitiana virium æstimatione ex quadrato celeritatis in massam concludi potest, nisi in mundo quodam imaginario, qui nihil contineat non elastici. Quærunt alii, an si corpus quiescens B ab incurrente A determinetur ad celeritatem finitam e. g. ut 6, ista mutatio status in B repente fiat, ita ut B a quiete a celeritatem ut 6 per saltum transeat, quin per intermedios gradus celeritatis 1, 2, 3, 4, 5 ad celeritatem ut 6 paulatim perveniat: saltum hunc pro monstro naturæ non nulli habent, alii haud ægre eum admittunt; quod attigisse hoc loco satis est; nihil enim nunc quidem ex inductione decidi potest, argumenta vero metaphysica in Philosophia experimentali locum non habent.

VI. de vi acceleratrice constante primum posuimus theoremata de spatiis $S = \frac{C\,T}{2}$, quia ex eo lex galilæana de spatiis intra singula tempora secundum numeros impares crescentibus aptissime videbatur consequi; nam intra primum minutum secundum, quod in plurima tempuscula minora dividitur, celeritas paulatim ita crescit, ut conficiantur gravitate terrestri 15 pedes. sub finem huius minuti celeritas, sive gradus quidam celeritatis iam acquisitus, ac completus est, isque vi inertiæ deinceps conservatur; proinde ob eundem, si altero minuto nihil ageret vis acceleratrix, conficeretur spatium prioris duplum nempe 2. 15 ped. ob novam autem gravitatis actionem iterum accedet pars spatii priori itidem æqualis, unde spatium secundo minuto confefectum fit triplum primi nempe 3. 15. Ad initium tertii minuti ob duos celeritatis gradus iam completos confici debet spatium quadruplum primi, & ob novam gravitatis actionem pars spatii primo æqualis unde fiet spatium ut 5, nempe 5, 15. atque ita deinceps. Problemata, quæ de viribus acceleratricibus adiunximus, ad theoriam motus curvilinei percipiendam permagni momenti sunt. De notione & proprietatibus gravitatis, cum sola terrestris gravitas examinata sit, ac ne illa quidem perfecte hoc loco, differi in præsenti nil potest. Plana quoque composita ad pendulorum motum referemus, in cuius gratiam ea potissimum considerantur.

SECTIO III.

De Oppositione & Contrariis Actionibus Virium in Corporibus Solidis.

CAPUT I.

De Æquilibrio Corporum ad Vectem adplicatorum.

Præmissis notionibus, & postulatis propositionem unicam directam, eiusque inversam demonstrabimus, ex qua omnis theoria æquilibrii in vecte, & machinis, quæ ad vectem reducuntur, legesque generales statices, earumque adplicationes derivantur. Disceptationes quorundam Philosophorum de caussa ultima & physica æquilibrii ad calcem huius sectionis reiiciemus.

§. CXVI.

Definitio I. Vectis, si physice spectatur, est quævis pertica, aut virga rigida, cui potentia agens sub quodam angulo adplicatur ad producendum, vel impediendum motum corporis alterius.

In bilance virga ferrea, ex qua funes cum lancibus pendent, trabes oblongæ fulcris impositæ & oneratæ ponderibus, bacillus ligneus, ex quo sarcina super humeros gestatur, non nisi vectes sunt.

§. CXVII.

Definitio II. Æquilibrium est quies respectiva potentiarum in se mutuo agentium orta ex æqualitate, & oppositione virium earundem inter se. Dicitur *respectiva* quies, quoniam oppositio, & æqualitas virium, quas in se mutuo exerunt, non obstat, quo minus eædem potentiæ motum quemdam habeant communem aliunde impressum, uti fit, siquis libram, cuius pondera in æquilibrio sunt, alio transferat.

Vulgo æquilibrium in corporibus gravibus *spectatur, sed reipsa id ad omnes potentias pertinet, sive ad ea omnia,* quæ *quae facultate pollent, vim ac motum corporibus imprimendi.*

§. CXVIII.

Postulata. I. Si quaeritur, quomodo potentiae vecti adplicatae agant, id est, *quantas vires*, & qua *directione* exerant tum adversus se mutuo, tum contra potentiam quamdam tertiam, seu resistentiam, aut punctum fixum, circa quod in se agunt; quivis vectis concipi potest instar lineae geometricae, inflexilis, & gravitatis expertis, quia crassities, flexibilitas, pondus vectis nil conferunt, ut intelligatur, quomodo, & quantum potentiae agant, quatenus vecti adplicatae sunt: siquam eae res mutationem in usu vectis inducunt, ea ex aliis principiis explicanda est.

II. Cuivis vecti instar potentiae adplicari possunt pondera gravia, vires hominum, bestiarum, aquae praeterfluentis, venti, obex quicunque etiam immobilis; verbo, quidquid vim exerit, qua ope vectis motus alterius corporis producatur, vel extinguatur.

III. Vis cuiuscunque potentiae in quovis directionis, quam habet, puncto eadem est; hinc quantumcunque in eadem recta producatur directio potentiae, vis eadem manet. Certe pondus grave, sive ex longiore filo sive breviore pendeat, pari vi tendit, & obstaculum urget deorsum teste experientia certa.

IV. In theoria quaevis potentia quacunque directione agens, per pondera exhiberi potest; in quavis enim directione etiam obliqua, secundum quam agit potentia, concipi potest fixa trochlea, & circumductus funis, cui adpensum pondus agat secundum datam directionem, & data vi. Eiusmodi vero pondera instar *punctorum* gravitantium spectari possunt, quia sola dimensio corporis in longum, latum & profundum ad maiorem minoremve gravitatis vim nil confert, sed idem haberetur effectus, si tota corporum gravium vis in unico puncto velut centro eorundem esset collecta.

V. Directiones ponderum ex filo flexili pendentium, & adplicatorum ad vectem pro parallelis haberi pos-

Digitized by Google

possunt; etsi enim directiones gravitatis versus telluris centrum convergant; tamen convergere, & inclinari ad se minime percipiuntur, nec censentur omnino, quia non nisi post ingentem distantiam sub angulo plane minimo concurrunt.

VI. Vires potentiarum quarumcunque, seu ponderum, quæ potentiis substituuntur, etiam lineis possunt exprimi, in quibus ratio magnitudinum exprimit rationem intensitatis potentiarum: positio directionem earundem; & quoniam vis, & intensitas potentiarum in quovis directionis, quam habent, puncto eadem est, (post III.) idcirco eæ vires in linea quantumcunque producta sumi possunt. Sint (F. I. T. II.) potentiæ P, & p. Assumta recta arbitrariæ longitudinis e. g. P M, quæ exhibeat potentiam P, fiat: P, p = P M: p N; si igitur potentia p est dupla, tripla, vel quomodocunque multipla, aut submultipla potentiæ P; etiam recta p N erit dupla, tripla, vel quomodocunque multipla, aut submultipla rectæ P M pro arbitrio assumtæ, potestque potentia P exhiberi recta P M, vel recta æquali O R in eadem directione P M producta; & potentia p exhiberi recta p N, vel æquali O S. Imo, quia duntaxat inclinatio diversa directionum vim, & effectum eiusdem potentiæ immutat; idcirco loco unius rectæ, quæ vim, & directionem datæ potentiæ exprimit, sumi potest quævis alia priori parallela, cuius magnitudo ad alias vires eandem retinet rationem; atque ita salvus manebit valor virium, quia binæ parallelæ ad quamvis tertiam directionem alterius potentiæ eodem modo inclinantur. Illud præterea animadvertendum: si vires potentiarum exprimuntur lineis, ordo literarum, queis lineæ denominantur, designant plagam, in quam vires in eadem iacentes recta tendunt; ut si dicam: vis O T; indicio est, eam vim ex O versus plagam, in qua est punctum T, tendere: contra expressio T O, indigitat plagam oppositam ex T versus O.

VII. Quando potentiæ quotcunque sub angulo quodam adplicantur ad vectem instar lineæ spectatum, tres numero potentiæ, & tria vectis puncta, ubi adplicatæ sunt, spectari necesse est. Ad hunc enim numerum potententiæ quotcunque reducuntur, uti proximo capite demonstrabimus. Earum potentiarum una vulgo dicitur *pondus*, *onus*, *obstaculum*, aliquando in machinis etiam *resistentia*; estque id, quod ope vectis sustinendum, vel ad motum ciendum est: altera adpellatur *vis agens*, aut nomen *potentiæ* retinet. Tertia concipitur in puncto vectis, quod alteri puncto fixo, *fulcro* vel *hypomochlio* dicto, incumbit; & quia motus ponderis, ac potentiæ, vel nisus ad motum circa id fulcrum exeritur, id *centrum motus* nuncupatur. Expedit, ut hoc ipsum fulcrum, sive eius resistentia instar potentiæ spectetur, ut intelligatur, quanta vi a pondere, & potentia adficiatur, quantaque firmitate præditum esse debeat, ne iisdem succumbat, & qua directione sit opponenda eius resistentia; idcirco id fulcrum fere instar potentiæ tertiæ, aut resistentiæ habebimus. Spectata quidem theoria æquilibrii perinde est, utramvis e tribus potentiis pro tertia, seu pro resistentia habeas; ut tamen verbis, ac signis secernantur ea, quæ in usu vectis & machinarum passim distingui solent, potentiam tertiam, quæ binis aliis resistit, dicemus π, onus movendum P, potentiam moventem p. Si potentia tertia π est media inter binas extremas, distantia ponderis P ab eadem erit D, & distantia potentiæ p ab eadem media erit d.

§. CXIX.

Propositio I. *Quotiescunque vis potentiæ tertiæ* π *æqualis est vi compositæ ex binis aliis potentiis P, & p vectem urgentibus directione potentiæ tertiæ opposita, habetur æquilibrium.* Sint (F. I. T. II.) vecti AB adplicatæ potentiæ P, & p, earumque magnitudines, & directiones exprimant rectæ PM, pN, quæ producantur ultra punctum concursus O, sumtis OR = PM, & OS = pN; compositis viribus diagonalis OT exhibet vim compositam, seu potentiam æquipollentem binis datis potentiis P, & p. Hæc diagonalis producatur, donec vecti occurrat in C, fiatque CL = OT. Si iam concipiatur potentia tertia π expressa per LC, & æqualis

lis vi compositæ O T = C L, perspicuum est, quod habeatur æquilibrium, cum vires compositæ potentiarum P & p vectem urgentium directione C L & vis potentiæ tertiæ π in eadem recta & oppositæ, & æquales sint.

Recta O T translata in C L non tantum multitudinem vis compositæ, ac proinde etiam magnitudinem potentiæ tertiæ π, sed etiam punctum vectis C determinat, in quo vis C L æquipollet binis potentiis P, & p, & in quo tertia potentia π adplicanda est, ut habeat æquilibrium, quia vires in eadem recta oppositæ esse debent, ut perspicue intelligatur, eas se mutuo extinguere.

§. CXX.

Propositio II. inversa prioris. *Quotiescunque in vecte habetur æquilibrium, semper vis potentiæ cuiusdam tertiæ π æqualis est vi compositæ ex binis aliis potentiis P & p vectem urgentibus directione potentiæ tertiæ opposita.* Dem. 1. Nullum æquilibrium sine virium oppositione, nulla virium oppositio sine directionum oppositione distincte intelligi potest; quotiescunque igitur sint datæ potentiæ quædam cuiuscunque directionis, si æquilibrium inter se servant, necesse est, ut hinc ex potentiis agentibus vis una omnibus æquipollens, & inde ex resistentiis, si plures adsint, itidem una vis directe opposita priori, & æqualis constituatur. 2. Tria vulgo ab omnibus puncta in vecte spectantur, bina extrema, ubi adplicantur pondera, seu potentiæ quæcunque P & p & fulcrum seu hypomochlium C; dico; neglecto hypomochlio C quæri seorsum non potest, cur pondus P non moveat pondus p, & vicissim; quia ratio sufficiens cuiuscunque effectus non intelligitur, nisi omnes potentiæ, quæ ad eum concurrunt, & omnes potentiarum vires, quas exerunt in effectum ac virium directiones simul in considerationem veniant. Atqui ad æquilibrium non modo bina pondera P, & p, sed vis quoque opposita, seu resistentia fulcri concurrit, præsertim cum remoto fulcro, si alia in C adplicetur po-

Digitized by Google

potentia, aliudve pondus agens directe L C, & vi composita ponderum seu potentiarum P, & p æquali, æque obtineatur æquilibrium, ac per fulcrum immobile in C positum; & quoniam hæ potentiæ omnes in vecte adversus se mutuo agunt, necesse est, earum vires, ac directiones in communi quodam puncto concurrere; secus profecto non intelligitur, quomodo adversus se mutuo agant. Quam ob rem actiones potentiarum P & p per latera, actio seu resistentia potentiæ tertiæ π per diagonalem parallelogrammi, sed contraria directione sumtam repræsentandæ sunt.

Propositio a nobis demonstrata tum directa, tum inversa omnino generalis est, & ad omne directionum, quas habent potentiæ agentes, vectiumque, quibus adplicantur, genus pertinet, uti infra ostendemus. Nunc leges fundamentales, quæ in æquilibrio corporum solidorum obtinent, ex ea deducendæ sunt.

§. CXXI.

Lex I. *Si ex quovis puncto accepto in directione unius e tribus potentiis π, P & p in æquilibrio constitutis demittantur ad directiones binarum reliquarum perpendicula, erunt binæ reliquæ inter se reciproce ut perpendicula ex directione tertiæ potentiæ demissa*, sive, quia perpendicula metiuntur distantias potentiarum, *binæ quævis potentiæ semper sunt in ratione reciproca distantiarum a tertia quando inter omnes habetur æquilibrium.* Potentiæ enim π, P, & p sunt ut rectæ O T, O R, O S vel R T, hoc est, ut latera trianguli O T R; quare cum in quovis triangulo latera sint ut sinus angulorum oppositorum, si sinus angulorum dicantur *ſ.* erit π sive O T = *ſ.* O R T = *ſ.* S O P = *ſ.* P O p, nempe ut sinus complementi ad duos rectos. Potentia P sive O R = *ſ.* O T R = *ſ.* T O S = *ſ.* C O p. Potentia p sive R T = *ſ.* T O R = *ſ.* C O P. Est igitur potentia π in medio constituta, ut sinus anguli P O p, quem directiones potentiarum extremarum formant; potentiæ vero P, & p reciproce ut sinus angulorum, quem

quem directio cuiusvis potentiæ cum directione mediæ efficit. Porro demittantur ex C puncto directionis potentiæ mediæ π in directiones reliquarum perpendicula C m, C n, erunt hæc perpendicula, sumta C O pro sinu toto, ut sinus angulorum C O P, C O p; quoniam igitur potentiæ P, & p sunt reciproce ut sinus eorundem angulorum, eædem erunt reciproce ut perpendicula ex puncto directionis potentiæ π in earum directiones demissa.

Si ex puncto quodam n directionis potentiæ p demitteretur perpendiculum in rectas T C, & P R directiones reliquarum, ea perpendicula iterum essent reciproce, ut reliquæ potentiæ π & P; & si ex puncto quodam m directionis potentiæ P demitterentur perpendicula in T C, & p S directiones reliquarum, pariter invenirentur ea perpendicula reciproce ut reliquæ potentiæ π & p; ut adeo quævis ex tribus potentiis π, P, & p pro tertia sumi queat.

§. CXXII.

Lex II. *Quotiescunque in vecte habetur æquilibrium, celeritates elementares potentiarum, ac spatia minimo tempusculo confecta sunt directe ut perpendicula ex directione tertiæ potentiæ in directiones earundem demissa*, sive quia perpendicula metiuntur distantias, *celeritates elementares potentiarum, ac spatia minimo tempusculo confecta, sunt directe ut distantiæ earundem a potentia tertia*, & quia perpendicula seu distantiæ, ac potentiæ reciprocant, erunt *celeritates elementares ac spatia minimo tempusculo confecta reciproce ut potentiæ, consequenter momenta earundem, quæ sunt ut factum ex potentia in celeritatem, æqualia.* Concipiantur in A & B (F. II. T. II.) potentiæ P & p agentes directione B M, & A N, sintque earum a tertia potentia distantiæ, perpendicula C m, C n; concipiantur facta impressione minima circa tertiam potentiam C velut centrum moveri, ut obtineant situm b M, a N; erit in primis ob arcus A a, B b simimiles, A a : C A = B b : B C, ac proinde $\frac{Aa}{CA} = \frac{Bb}{BC}$. Demittantur ex a, & b in priorem directionem perpendiculares a d, b e, ut ſpatium a potentiis minimo tempuſculo confectum, & celeritas elementaris exprimatur per A d, & B e; Porro triangula C A n, A d a ſimilia ſunt ob angulos ad d & n rectos, & angulos C A n, A a d æquales; pariter triangula C B m, B e b ſimilia; igitur erit

$$1. \quad Aa : Ad = CA : Cn; \ \& \ Ad = \frac{Aa.Cn}{CA}.$$

$$2. \quad Bb : Be = BC : Cm; \ \& \ Be = \frac{Bb.Cm}{BC}.$$

Unde fit $Ad : Be = \frac{Aa.Cn}{CA} : \frac{Bb.Cm}{BC} = Cn : Cm$ ob $\frac{Aa}{CA} = \frac{Bb}{BC}$. Igitur A d, & B e, quæ ſpatium tempuſculo minimo confectum, & celeritates elementares exprimunt, ſunt directe, ut perpendicula, ceu diſtantiæ a tertia potentia c velut centro motus. Sit celeritas elementaris, ſpatium confectum, diſtantia in potentia P = C, S, D, & in potentia p = c, s, d; erit

$$C : c = S : s = D : d$$

Eſt autem ex prima lege P : p = d : D igitur erit

$$P : p = c : C = s : S; \text{ ac } PC = pc \ \& \ PD = pd$$

Unde patet, *momenta potentiarum æquilibrantium eſſe æqualia*, & factum ex quavis potentia in ſuam diſtantiam a centro motus æquale facto ex altera potentia in ſuam itidem a centro motus diſtantiam.

Simpliciſſima huius legis demonſtratio habetur in caſu, quo directiones potentiarum ad vectem normales ſunt; tunc enim

enim spatium, & celeritas elementaris erit ut arcus descriptus; arcus descriptus, uti distantia seu perpendiculum; ut sit

$$S : s \; (= C : c :) \; D : d ;$$

Cumque sit $P : p = d : D$, *erit* $P : p = c : C = s : S$; & $PC = pc$; $PS = ps$, *uti* $PD = pd$. *Demonstratæ igitur sunt binæ leges generales statices & mechanices. I. Si potentiæ in æquilibrio sunt, earum a centro motus distantiæ cum ipsis potentiis reciprocant: II. Si eædem potentiæ in æquilibrio sunt, momenta earundem, sive facta ex potentiis in celeritates sunt æqualia. Harum propositionum inversæ æque sunt veræ, ac directæ, hoc est I. Si potentiæ, ac distantiæ earundem a centro motus reciprocant, eædem in æquilibrio erunt. II. Si momenta binarum potentiarum sunt æqualia, id est, si potentiæ reciproce sunt ut celeritates, vel spatia eodem tempore confecta, pariter erunt in æquilibrio. Nam ratio reciproca distantiarum, & æqualitas momentorum indicio sunt, potentiam tertiam in eo puncto esse adplicatam, in quo ea vi compositæ ex binis potentiis directe opponitur; ac proinde si satis virium habet potentia tertia, sive si fulcrum, ut pono, sat firmum est, æquilibrium dabitur.*

Enimvero ut in Schol. §. CXIX. adnotavi, unicum est punctum C, in quo vis CL æquipollet vi compositæ potentiarm P, & p, ac proin vis contraria LC earundem vim totam sustinet; ab hoc autem puncto desumtæ distantiæ cum potentiis reciprocant, si in æquilibrio sunt: igitur vicissim erunt in æquilibrio, si ea distantiarum & potentiarum reciproca ratio in casu quodam ponitur. Hinc deduces 1. *Datis pondere* $P = 40$; *eius distantia D a fulcro* $= 2$; *data item potentia* $p = 8$, *eiusque a fulcro distantia* $d = 10$; *determinabitur, an æquilibrium habeatur, vel utrum pondus, an potentia prævaleat. Sit enim* $PD = pd$; *habebitur æquilibrium ut in hoc casu* $PD = pd$ *seu* $40 . 2 = 8 . 10$; *secus prævalebit illa potentia, vel pondus, quod in suam a fulcro distantiam ductum, factum maius efficit, quam sit factum ex altera potentia vel pondere in suam a fulcro distantiam.* 2. *Datis binis potentiis, vel ponderibus, & distantia unius invenitur distantia alterius; ut si sit* $P = 600$. $p = 200$. $D = 1$. *erit*

Digitized by Google

erit $d = \frac{PD}{p} = 3$. Pariter datis distantiis potentiarum, vel ponderum, & data potentia vel pondere uno invenitur potentia vel pondus alterum. Sit $P = 10$. $D = 3$; $d = 6$. erit $p = \frac{PD}{d} = \frac{10.3}{6} = 5$. Plura hisce similia infra deducemus. Nunc adplicatio harum legum ad varios vectes, variasque potentiarum directiones instituenda est.

§. CXXIII.

Directiones Potentiarum.

I. *Si potentiæ agentes P, & p sunt parallelæ, ac in easdem partes tendunt, erit tertia potentia π æqualis summæ earundem; eiusque directio itidem parallela directionibus reliquarum.* Nam (F. I. T. II.) quia directiones parallelæ non nisi in distantia infinita concurrunt; evanescit angulus POp; hoc est anguli ROT, & TOS sive OTR; & angulus ORT cuius sinus exprimit tertiam potentiam, infinite parum differt a duobus rectis; adeoque rectæ OR, & RT simul sumtæ æquales erunt rectæ OT; sive potentia π æqualis summæ potentiarum P & p; quæ exhibentur per rectas OT; & RT. Et quoniam ob mutuam potentiarum actionem omnes in eodem puncto concurrere debent; etiam directio tertiæ potentiæ π non nisi in distantia infinita cum iisdem concurret, hoc est, parallela iisdem erit.

Qui primis quantitatum infinitarum elementis imbutus haud est; haud ægre tamen, quæ de concursu parallelarum in distantia infinita; & æqualitate rectarum OR; & RT cum recta OT dicta sunt; intelliget; modo concipiat, eo propius summam earum rectarum ad rectam OT accedere, quo maior in triangulo OTR fit angulus ad R, & minores anguli ad O; & T manente semper tota vi demonstrationis supra datæ §. CXIX. hinc; cum summa earum rectarum semper propius ad æqualitatem cum recta OT accedere possit; donec in limite directiones potentiarum fiant paral-

Digitized by Google

lelæ, denique summa earundem rectæ O T æqualis erit, & parallelæ non nisi in distantia infinita concurrent, hoc est, angulus P O p denique evanescet.

II. *Si potentiæ agentes P, & p sint parallelæ, sed in contrarias partes tendant, pontentia tertia π erit æqualis differentiæ earundem, & itidem parallela.* Sit F. III. T. II. directio potentiæ P, PM sive OR, & potentiæ p directio Np, vel OS; completo parallelogrammo ORTS, erit potentia tertia π eiusque directio T O, fiant directiones P M, N p parallelæ, ut evanescat angulus π O p, hoc est, anguli ROT, TOS sive ORT, ut angulus OTR infinite parum differat a duobus rectis, & latus ei oppositum O R fiat $=$ R T $+$ O T; unde fiet OT, quæ potentiam tertiam π exprimit, $=$ OR $-$ RT, quæ est differentia potentiarum P, & p; quod directio potentiæ π sit reliquis parallela, eadem, ac supra, ratio demonstrat.

Quia quævis ex tribus potentiis pro tertia sumi potest, inposterum, ne qua confusio oriatur, potentiam mediam, seu inter binas extremas constitutam semper exprimemus litera π, binas extremas per P, & p. Illud ex dictis modo patet, binas extremas uti P & p Fig. I. vel π & p F. III. semper in eandem partem tendere, mediam in partem contrariam, quotiescunque eæ æquilibrium tuentur.

Duplici casu potentiæ parallelæ esse possunt 1. Si earum directiones sub æquali angulo ad vectem inclinantur, *ut F. IV. T. II. potentiæ PM, & p N; quo casu ut distantiæ a tertia potentia π inveniantur, directiones producendæ sunt in m, & n, erit P: p $=$ Cn: Cm; & π $=$ P $+$ p. Vectis urgebitur vi duplici, deorsum vi P Q $+$ p q, & directione P p vi $=$ P S $+$ p s; contra vis potentiæ tertiæ resolvetur in binas directiones, & vires æquales.* 2. Si potentiæ ad vectem adplicantur sub angulo recto; *atque hic casus maxime spectari solet; vectis enim plerumque ponitur situ horizontali, & directiones ponderum ad horizontem normales sunt, ut F. V. ubi perpendicula, & distantiæ ponderum P, & p sunt ipsa vectis brachia C P, & C p. Arcus P m, p n, sive spatia tempu-*

sculis

Digitized by Google

scalis minimis descripta, ac celeritates elementares, ut radii sive brachia vectis CP, & CP; potentia tertia π adplicata in puncto C, a quo desumtæ distantiæ cum ponderibus P, & p reciprocant, pariter normalis ad vectem, & summæ eorum ponderum æqualis; nam si remoto fulcro in C ope trochleæ adplicetur pondus π æquale P+p, teste experientia obtinetur æquilibrium. Cæterum quemcunque situm habeat vectis, aut formam quamcunque, si pondera ex filo flexili pendeant, eorum directiones semper pro parallelis habendæ sunt (§. CXVIII. Post. V.)

§. CXXIV.

Vectis Triplicis Generis.

Mechanici vectem triplicis generis statuunt pro vario situ potentiæ tertiæ, seu puncti fixi, aut basis, fulcri, hypomochlii, centri motus; hæc enim omnia idem denotant. *Vectis primi generis est*, si punctum fixum π inter pondus movendum P, & potentiam p medium constituitur. *Vectis secundi generis*, si pondus movendum P est inter fulcrum, & potentiam. *Vectis tertii generis*, si potentia movens ponitur inter fulcrum, & onus movendum. Vectis primi generis cognominatur *heterodromus*, quia pondus, & potentia eidem adplicatæ, si moventur, in diversas partes abeunt: Vectis secundi & tertii generis est *homodromus*; facto enim motu pondus & potentia in eandem abeunt partem; ut igitur intelligatur, ad quod genus pertineat datus vectis, directio ponderis, & potentiæ motæ spectanda est. De hoc triplici genere singulatim quædam adnotanda sunt.

I. In vecte primi generis, in quo fulcrum in puncto quodam intermedio fixum est, æquilibrium habebitur *primo*, si & pondera vel potentiæ adplicatæ, & distantiæ utrinque æquales sunt: *secundo* si, quo maius est unum pondus præ altero, tantundem eiusdem distantia a fulcro minor fit. Primus casus ad libram, vel bilancem, alter ad Stateram Romanam pertinet, de quibus infra differemus: utroque casu erit $P : p = d : D$. Ad vectem primi generis pertinent trabes fulcris utrinque ceu muris impositæ, ac superius gravatæ ponderibus. Nam per-

 inde

Digitized by Google

inde est, sive potentiæ, aut pondera P, & p deorsum, & tertia potentia π sursum agat, sive hæc agat deorsum imposito, vel suspenso pondere, & illæ sursum uti si (F. VI. T. II.) loco potentiarum P & p substernuntur fulcra; ac tum quodvis earum tanta vi resistet, quanta vi ageret potentia adplicata ad conservandum æquilibrium. Est autem p : π = A C : AB; unde erit p sive resistentia, aut vis fulcri, $= \frac{\pi . AC}{AB}$. & P: π = CB: AB; & $P = \frac{\pi . CB}{AB}$.

Ex his confici potest ratio, quanta firmitate spectatis oneribus impositis, & longitudine trabium fulcra pollere debeant; Pondus intermedium in utrumque sustentaculum dividitur in ratione reciproca distantiarum, quas ab eodem sustentacula, vel fulcra habent. Sit pondus a binis fulcris sustentandum, vel humeris imponendum æquale 120 tt; si ponas, unum fulcrum non nisi 20 tt ferendis par esse; cogetur alterum fulcrum reliquam partem ponderis sustentare, nempe 100 tt; erit igitur ratio, qua vires distribuuntur ut 20: 100 seu 1: 5. in eadem igitur ratione distantia ponderis ab utroque fulcro determinanda est, ut nimirum pondus ab eo fulcro, quod unam totius partem sustinet, distet quinque partibus; ab altero distet una parte. Quocirca data trabs, vel pertica in 6 partes æquales dividi debet. Hoc modo vel infans par erit, ut cum Hercule gestet pondus ex pertica suspensum. Ut autem in hoc casu gestationis, experientia & usus respondeat theoriæ, necesse est, ut pertica, ex qua pondera gravia suspenduntur, sit horizonti parallela; facta enim inclinatione pondus intermedium aliter distribuitur, sive potius eius distantia ab eo fulcro minuitur, quod depressius est, & augetur a fulcro altiore; si vectis A B obtineat situm A q, distantia ponderis a fulcro p, quæ ante erat = CB, fiet e B; & in situ vectis A r, erit distantia ab eo fulcro = d B, quia directio gravitatis est verticalis ad horizontem, & distan-

diſtantias metitur perpendiculum in ponderis directionem demiſſum. Præterea in caſu geſtationis etiam ponderis ipſius vectis vel perticæ habenda eſt ratio; quo quidem neglecto, & præciſo perinde erit, an ea pertica longior vel brevior fuerit, ſi ratio diſtantiarum, & ſitus, quem indicavimus, ſervetur. Ad vectem primi generis revocantur forſices, forcipes, inſtrumenta nucifraga, emunctoria elychniorum, in quibus claviculus medius eſt inſtar fulcri, bina brachia ceu bini vectes heterodromi: pondus eſt materia ſcindenda aut frangenda: potentia adplicatur manubrio; quare ut vis potentiæ creſcat, fabri, aliique opifices manubria longiora adhibent, & materiam ſcindendam, ſi paulo vehementius reſiſtit, propius ad clavum admovent: quamquam in his quidem inſtrumentis, quorum latus in aciem deſinit, ceu in forſice, ratio quoque cunei, ſeu potius plani inclinati ſpectanda eſt, uti infra exponemus.

II. In vecte homodromo, ſive ſecundi & tertii generis fulcrum in puncto extremo ponitur, ut (F. VII. T. II.) in c fulcrum, in O pondus vel onus movendum, in V vis agens ſeu potentia ſit, quando eſt vectis ſecundi generis, aut ſi eſt tertii generis (F. VIII. T. II.) in c denuo fulcrum, in Q onus, in P potentia. utroque caſu pondera ſeu potentiæ, ac diſtantiæ a fulcro C deſumtæ reciprocant, ut ſit $O : V = VC : OC$, & $Q : P = PC : QC$. Celeritates elementares, ſive arcus minimo tempuſculo deſcripti a potentiis normaliter adplicatis erunt ut diſtantiæ, vel radii CV, CO, vel CQ, CP. Ad vectem ſecundi generis refertur remus, in quo fulcrum eſt aqua, remigis manus in altero extremo adplicata eſt potentia, ſeu vis agens, onus vero ipſa navis: item malus navis, cuius fulcrum in navis fundo hæret, pondus circa pavimentum ſuperius, potentia in ſuperiore mali parte eſt ventus vela implens, & onus propellens: culter inciſorius: dentes molares, quorum ope fortius mordemus (cum interiores, ac fulcro propiores ſint) quam dentibus, *inciſoriis* dictis. Ad vectem tertii generis pertinent eæ partes machinarum, quæ pede inſiſtente premuntur, ut agitetur rota quædam, ut fit circa cotes, folles. Quævis ianua vel ciſta fulcrum in cardinibus habet, reſiſtentiam vero in altero extremo, & in

Digitized by Google

in puncto intermedio manubrium, cui potentia admovetur; hinc si duo homines connitantur, alter, ut aperiat, alter, ut claudat ianuam; fortius aget, qui a cardine seu fulcro distat longius. Ex hoc genere potentia seu vis agens nullum commodum habet virium, sed lucrum temporis, ut pondus e. g. rota tanto moveatur celerius, quo magis a fulcro distat. Eodem genere usi sunt Veteres ad lapides maxima cum celeritate eiiciendos in hostium turmas: eodem utimur in forcipibus destinatis ad prehendendos carbones; aliisque in rebus, in quibus parva est restistentia superanda, & vires abunde suppetunt, aut si necessitas ad eiusmodi vectis usum adigat, uti cum saepe scala uno extremo fixa in C (F. IX. T. II.) adhibita circa P manu erigitur; ac tum, quo altius ea erigitur, eo minus a potentia onus sentitur; ponatur enim pondus scalæ superandum, æquipollere ponderi adpenso Q; perspicuum est, tantundem imminui eius a fulcro c distantiam, quo maior est altitudo, ad quam elevatur. Hac eadem vectis specie uti naturam animalium in adhibendis musculis ad movendos artus ostendunt Anatomici.

§. CXXV.

Vectis Rectangularis.

Si vectis brachia curvilinea, aut in angulos inflexa sint, vectes *incurvi*, *inflexi*, & *angulares* vocantur, quorum variæ species pro angulorum varietate censentur. In his punctum fixum seu hypomochlium plerumque sub vertice anguli, nempe in concursu binarum linearum ponitur.

I. *Si in vecte rectangulari* (F. X. T. II.) *punctum fixum, seu potentia tertia* π *constituitur in angulo recto, & potentiæ seu pondera P, & p agant directione ad vectis brachia normali, erit vis potentiæ* π *seu resistentia puncti fixi, eiusque directio ut hypothenusa* π *C, & potentiæ æquilibrantes reciproce ut catheti, seu brachia vectis rectangularis.* Concipiatur enim potentia P, quæ est ut A π, translata in C B, & potentia p, quæ est ut B π translata

lata in C A ; erit vis potentiarum P , & p composita = C π , ac proin vis & directio potentiæ tertiæ π seu resistentia puncti fixi = π C. Colliges : 1. in fulcro π tam parum excipitur vis æqualis summæ ponderum, vel potentiarum P , & p (uti nonnulli putant) quam parum diagonalis æquatur summæ laterum. 2. Si brachio verticali A π non modo in supremo puncto A , sed in aliis quoque punctis , uti in m esset adplicatum quoddam pondus una cum pondere in A adplicato obsistens potentiæ P, perspicuum est, potentiam p eo casu minorem fieri , quam si sola obniteretur potentiæ P. 3. Si loco potentiæ p adplicetur in A obex immobilis, vis in obicem , eiusque resistentia foret æqualis potentiæ p æquilibrium tuenti cum altera P. 4. Si obicem quendam ponas non tantum in A , sed etiam in punctis intermediis, ceu in m ; actio potentiæ P in obicem superiorem A multo minor evadet, quam si unus in A obex ponatur. Hæ deductiones tam perspicuæ sunt, ut commemorari non debuissent , nisi earundem usum facere alio loco cogitaremus.

II. *Sint* (F. XI. T. II.) *bini vectes rectangulares A Ca , B C b communi axe in C ita connexi, ut brachia verticalia Ca , Cb , quæ eiusdem sint longitudinis circa a & b libere separari , & a se divergere queant. Brachiis horizontalibus A C , B C appendantur pondera M , & N, quæ sint reciproce , ut longitudo eorundem brachiorum , sive reciproce ut distantiæ eorundem ponderum.* His positis manifestum est : 1. Si brachia verticalia circa a , & b nullo nexu , aut vinculo cohiberentur , pondera M, & N circa C rotata describerent arcus A a B β. 2. Si eadem brachia constringuntur quodam vinculo o , pondera M & N non nisi mediante hoc vinculo in se mutuo agunt ; dum enim pondus M deorsum nititur , utrumque brachium verticale trahitur directione o q , simul pondus N in B directione tangentis B s sursum urgetur ; & vicissim dum pondus N deorsum nititur , utrumque brachium verticale trahitur directione o p ; & pondus M urgetur sursum directione tangentis A t. Igitur hæc pondera M & N non nisi mediante vinculo o in se mu-

Digitized by Google

tuo agunt. 3. Si manente vinculo alterutrum pondus e. g. N prævaleret, eiusque ad pondus M ratio maior poneretur, quam sit ratio reciproca distantiarum A C, B C, illud descenderet per arcum B β, brachia C b, C a situ verticali exciderent, & pondus M cum suo brachio attolleretur in U. Manente igitur vinculo æquilibrium in vecte uno rectangulari BCb turbari non potest, quin turbetur etiam in altero a C A. 4. Quæri potest, quanta vi pondera M & N, si in æquilibrio sint, agant tum in vinculum o, tum mediante eo vinculo in se mutuo. Ut quæstio resolvatur, concipiatur remoto vinculo in brachio verticali C a ope funiculi & trochleæ in G, adplicari pondus m, quod in æquilibrio sit cum pondere M; & in brachio verticali C b adplicari eodem modo pondus n, quod in æquilibrio sit cum pondere N. Cum eadem maneant pondera M & N, eædemque illorum distantiæ, tantundem nunc agent in pondera opposita m, & n, ob quæ brachia verticalia manent coniuncta, quantum antea agebant in vinculum o, eoque mediante in se mutuo; & si pondera m, & n æqualia inveniuntur posito æquilibrio, etiam vis ponderum M & N in vinculum o, eoque madiante, in se mutuo, æqualis est, atqui hoc ipsum facili calculo reperitur. Nam *primo* ex hyp. est $M : N = BC : AC$; & $M \times AC = N \times BC$. Dein ex præc. numero patet, ut pondera M & m sint in æquilibrio, opus esse, ut sit $M : m = aC : AC$; eritque $m = \frac{M \times AC}{aC}$. pariter ob eandem rationem est $N : n = bC : BC$; ac $n = \frac{N \times BC}{bC}$. unde facile colligitur, pondera m, & n, ac vim ponderum M & N in vinculum o esse æqualia; nam $M \times AC = N \times BC$ & $aC = bC$.

§. CXXVI.

Vectis Obtusangularis.

Sit (F. XII. T. II.) vectis obtusangularis A C B; fulcrum in C; pondera P & p agant directionibus gravitatis

Digitized by Google

tatis & parallelis A a, B b; dico: si pondus P adplicatum in B in æquilibrio sustinet pondus p adplicatum in A; idem pondus P adplicatum in D æquilibrium cum eodem pondere p efficiet. Manifestum est, pondus P adplicatum in B non nisi per vim normalem B f vel G e alteri ponderi p obniti, & æquilibrium tueri; hæc vis normalis æquilibrium efficiens cum pondere p, erit $= \frac{p \cdot AC}{CB}$.

Porro vis normalis ad vim absolutam ponderis P est, ut B f, vel Ge : Be, vel ob similitudinem triangulorum B e G, B C D, ut C D : B C. Sit vis absoluta P; erit

$$\frac{p \cdot AC}{BC} : P = CD : BC; \ \& \ P = \frac{p \cdot AC}{CD}.$$

Porro pondus in D normaliter adplicatum, quod cum pondere p efficeret æquilibrium, pariter esset $= \frac{p \cdot AC}{CD}$; igitur idem pondus sive adplicetur in B, sive in D æquilibrium constitueret; ex quo patet, potentias æquilibrantes P & p semper esse reciproce ut perpendicula C A, C D in eorum directiones A a, B b vel D b demissa. Resistentia in fulcro C æqualis est summæ ponderum P, & p; transferatur enim vis B G in m C, & vis G e in n C (cum directiones parallelæ vires non immutent) erit vis composita in C = C O = B e, nempe ut vis absoluta ponderis P; cumque etiam a pondere p vis in C sit æqualis gravitati absolutæ; erit resistentia in fulcro C æqualis summæ ponderum P, & p.

§. CXXVII.

I. Vectis acutangularis A C B (F. XIII. T. II.) ad homodromos pertinet; si enim motus sequeretur, pondus P adplicatum in B, & potentia p adplicata in A eandem haberent directionem. Hinc si directiones parallelæ sunt, erit P : p = A C : m C; concipi enim potest pondus P in m adplicatum.

II. Ex binis vectibus homodromis componitur vectis

ctis acutangularis A C B (F.XIV. T.II.) cuius fulcrum in C, onus vel resistentia superanda per vinculum m n naturale, vel artificiale exprimitur, potentia in A & B, vel concipi potest in uno extremo A, vel B obex immobilis. Si potentia normaliter adplicatur ad vectem A C, erit ea ad resistentiam ut m C : A C. Hæc vectis acutangularis consideratio ad fissionem corporum solidorum ceu lignorum, & vim potentiæ per cuneum agentis adplicari potest.

§. CXXVIII.

Vectis Incurvus.

Sit (F.XV. T. II.) vectis incurvus A C B; potentiæ divergentes A q, B P; quæ producantur: donec concurrant in T; fiat T S = A Q; T R = B P; completo parallelogrammo diagonalis T O repræsentat vim compositam potentiarum A Q, B P; si iam tertia quædam potentia = O T, vel K C sit æqualis & opposita vi T O, vel si fulcrum, quod ferre possit vim T O, adplicetur in C directione K C, habebitur æquilibrium. Ex C in directiones potentiarum agantur perperpendicula C m, C n, fiatque in triangulis C T m, C T n recta C T sinus totus = 1. sit *f.* Sinus; erit

1. A Q = T S = R O = *f.* O T R
2. B P = T R = S O = *f.* O T S
3. C T : 1 = C m : *f.* O T S = B P
4. C T : 1 = C n : *f.* O T R = A Q.

Unde fit A Q : B P = C n : C m; hoc est, si æquilibrium habetur, potentiæ, & distantiæ earundem a centro motus reciprocant. Patet, quam generalis sit propositionis supra demonstratæ adplicatio.

CAPUT

CAPUT II.

De Centro Æquilibrii, ac Gravitatis.

Uti æquilibrium non ad solas gravitatis vires, sed ad potentias quascunque pertinet: ita theoria centri æquilibrii multo latior est, quam ut ad sola corpora gravia restringi possit, etsi ab his exempla & adplicatio theoriæ maxime peti soleant. Est autem hæc de centro æquilibrii, & gravitatis tractatio tum ad machinarum vim & usum, tum ad innumerabilia naturæ, & artis opera explicanda omnino necessaria.

§. CXXIX.

Definitio. Collectio plurium punctorum, vel corporum, quæ simul in considerationem veniunt, & per vires mutuas, vel lineas inflexiles connexa sunt, adpellatur *systema punctorum, vel corporum*. *Centrum æquilibrii* est punctum illud in systemate punctorum, vel corporum, cui potentia tertia, vel resistentia adplicanda est, ut systema totum in æquilibrio sit; ac si vires punctorum, vel corporum a gravitate proveniunt, id punctum vocatur *centrum gravitatis*. Unde perspicuum est, latius patere æquilibrii, quam gravitatis centrum.

Sint (F. XVI. T. II.) in vecte AB quotcunque potentiæ, vel pondera adplicata P & p, Q & q, ita ut summæ factorum ex quovis pondere in suam ab hypomochlio C distantiam ex utraque istius parte æquales sint, nempe $P.PC + Q.QC = p.pC + q.qC$. Habebitur, systema corporum; nam pondera connectuntur recta inflexili AB, & ad explicandum æquilibrium, & vim in hypomochlium C simul considerantur. 2. Pondera omnia, si dictæ summæ factorum circa C æquales sunt, in æquilibrio erunt; id quod & experientia confirmat, & theoria æquilibrii; quotcunque enim utrinque adhibeantur pondera, vel potentiæ, semper æquilibrium habetur, si potentiæ cum distantiis reciprocant, sive si facta ex singulis potentiis in suas distantias utrinque æqualia sint. (Schol. §. CXXII.) 3. Momenta ponderum P & Q ex una parte, & momenta ponderum p, & q ex altera sunt æqualia; & quamvis singula pondera deorsum tendant,

ac

Digitized by Google

ac vectem circa C convertere & gyrare nitantur; tamen si potentia tertia in puncto C est adplicata, nullus sequetur motus, sed totum systema in æquilibrio erit. 4. *Ob hanc ipsam caussam punctum C est centrum æquilibrii, & quia in posito casu vires potentiarum P, Q, p, q a gravitate proveniunt, idem est centrum gravitatis.* 5. *Quia directiones ponderum sunt parallelæ, potentia tertia est æqualis summæ eorundem* (§. CXXIII.) *& in eo puncto, ubi illa adplicanda est, tota vis ponderum collecta concipi potest, nempe in centro gravitatis; certe qui vectem ponderibus oneratum in centro gravitatis sustentat, totam vim ponderum sentit.*

§. CXXX.

Corollarium I. Centrum gravitatis (similiter de centro æquilibrii sentiendum, si aliæ potentiæ gravitati substituuntur) est illud punctum in systemate corporum, a quo desumtæ distantiæ cum ponderibus reciprocant. Ibi enim adplicanda est resistentia, ut systema in æquilibrio sit. Hinc datis binis ponderibus P, & p, quorum directiones sunt parallelæ, eorumque distantia sive longitudine vectis inveniri potest centrum gravitatis, sive punctum, in quo hypomochlion est adplicandum; dicatur longitudo vectis, sive tota ponderum distantia δ; distantia ponderis P a centro gravitatis sit x; erit distantia ponderis alterius $\delta - x$. Est autem vi huius corollarii $P : p = \delta - x : x$; & $Px = \delta p - px$; unde fit $Px + px = \delta p$; ac $x = \frac{\delta p}{P + p}$ hoc est, $P + p : \delta = p : x$, *ut summa ponderum ad totam eorum distantiam; ita pondus unum p ad distantiam alterius P a centro gravitatis.* Distantia ponderis p dicatur d; erit $d = \delta - x = \delta - \frac{\delta p}{P + p}$; sive facta redu-

ctione

ctione $d = \frac{\delta P}{P+p}$, ut ſumma ponderum P + p, ad totam eorum diſtantiam δ; ita pondus unum P ad diſtantiam alterius ponderis p a centro gravitatis.

Sit longitudo vectis ſive $\delta = 6$ *ped.* $P = 7$ tt. $p = 5$ tt. fiat: $12 : 6 = 7 : \frac{42}{12} = 3\frac{1}{2}$, *quæ erit diſtantia ponderis p a centro gravitatis; unde diſtantia alterius ponderis P fit* $= 6 - 3\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$. *Sit longitudo vectis* $= 40$. *pondus* $P = 600$. $p = 200$; *invenietur diſtantia ponderis P a centro gravitatis* 10, *alterius p diſtantia* 30.

§. CXXXI.

Corollarium II. Si per centrum gravitatis concipiatur ductum planum verticale, erit ſumma diſtantiarum perpendicularium omnium maſſæ punctorum ex utraque parte æqualis. Sint ex una parte puncta 50 in diſtantia duorum pedum a fulcro vel centro gravitatis; ex altera parte ſint puncta 100 in diſtantia unius pedis; habebitur æquilibrium, quia maſſæ, & diſtantiæ reciprocant; nam $50 : 100 = 1 : 2$. Porro liquet, diſtantiam 2 pedum quinquageſies ſumtam eſſe æqualem diſtantiæ unius pedis centies ſumtæ; atque hoc modo ſummæ diſtantiarum utrinque æquales ſunt; quod ex ratione maſſarum, & diſtantiarum reciproca neceſſario ſequitur. Eiusmodi planum dicitur *planum gravitatis*, vel *planum diſtantiarum æqualium*. Si (F. XVII. T.II.) extra ſyſtema quotcunque corporum, quorum directiones parallelæ ſunt, aſſumitur quodvis planum SV, erit ſumma factorum ex quovis pondere in ſuam a plano SV diſtantiam æqualis facto ex ſumma ponderum in diſtantiam centri gravitatis ab eodem plano; h. e. ſi pondera ſint P, p, π, & *centrum* gravitatis C; erit $P.\,PA + p.\,pA + \pi.\,\pi A = \overline{P + p + \pi}.\,CA$. Concipiatur per centrum gravitatis C ductum planum verticale; erunt ſummæ diſtantiarum ponderis P & p ex una parte, & ponderis π ex altera a plano per C ducto æquales; ſi iam diſtantiæ referun-

tur

tur ad planum SV, summæ earundem tantundem augentur, dum pondus π in centro gravitatis C collocatur, & a plano s v magis removetur, quantum eædem minuuntur, dum pondera remotiora P & p collocantur in eodem centro C, & ad planum SV propius admoventur. Si data tempora P, p & π non iaceant in eadem recta (ut in F. XVIII. T. II.) ducta m n ad SV parallela, productaque q P in n & posito in c centro gravitatis inter p & P, erit $P : p = Cp : CP = pm : Pn$ ob similia triangula Cpm, CPn; ac proinde $P \times Pn = p \times pm$. Cum sit $pr = pm + mr$ vel CA; erit $p.pr = p.pm + p.CA$, & cum sit $Pq = nq$ vel $CA - Pn$, erit $P.Pq = P.CA - P.Pn$; adeoque $p.pr + P.Pq = p.pm + p.CA + PCA - P.Pn$; est autem $P.Pn = p.pm$; adeoque $p.pr + P.Pq = \overline{p+P}.CA$. Hinc dato systemate quotcunque corporum A, B, C, D inveniri potest centrum gravitatis; cum enim summa factorum ex singulis ponderibus in suas a plano distantias æqualis sit facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem; erit hæc distantia centri gravitatis ab assumto plano æqualis summæ factorum ex singulis ponderibus in suas a plano distantias divisæ per summam ponderum.

Sit (F. XIX. T. II.) data ratio ponderum A, B, C, D, & singulorum inter se datæ distantiæ; assumto plano SV, si in O ponatur centrum gravitatis; *erit* $A.AH + B.BH + C.CH + D.DH = \overline{A+B+C+D}.OH$; *ac proin*

$$OH = \frac{A.AH + B.BH + C.CH + D.DH}{A+B+C+D}.$$

in numeris idem patet; nam $OH = 4$. *est autem*

$$\frac{1.13 + 4.8 + 10.3 + 5.1}{1+4+10+5} = \frac{80}{20} = 4.$$

Ad idem gravitatis centrum O pervenitur, si per analogiam §. CXXX. indicatam primo quæratur centrum gravitatis inter A & B; quod est in m. Dein concipiatur

in

in m adplicatum pondus $= A + B$ *, atque inter hoc & pondus C eodem modo centrum gravitatis quæratur; idque erit in n ; demum in hoc puncto n summa ponderum* $A + B + C$ *ponatur adplicata instar ponderis unius, atque inter* $A + B + C$ *& inter D investigetur commune centrum gravitatis in O.*

§. CXXXII.

Propositio I. *In quovis corpore solido datur centrum gravitatis, idque unicum.* Dem. Quodvis corpus solidum spectari potest vel ut *systema elementorum eiusdem gravitatis*: ita ut duorum quorumvis centrum sit in medio lineæ ea coniungentis, vel ut *systema molecularum inæqualium*, quarum centrum in eo puncto est, a quo desumtæ distantiæ cum iisdem massulis reciprocant. Quocirca cum inter bina quævis elementa, vel binas quasque moleculas sit quoddam centrum gravitatis, in quo totum eorum pondus collectum concipi potest; si hæc binariorum centra iterum iuncta cogitentur: dabitur horum quoque commune centrum gravitatis, eodemque modo centrum quoddam omnium elementorum, vel molecularum; quisquis earum sit numerus. *Id vero centrum in uno systemate, sive uno corpore non nisi unicum est.* Si enim extra systema elementorum, vel molecularum corpus constituentium assumitur quodvis planum, & summa factorum ex singulis elementis in suas ab eo plano distantias dividitur per summam elementorum, quotus indicat distantiam centri gravitatis ab eodem plano; quemadmodum igitur eodem dividendo, & divisore posito non nisi unicus quotus obtinetur; sic non nisi unicus est valor exprimens distantiam centri gravitatis ab eo plano: h. e. unicum duntaxat in quovis corpore centrum est gravitatis, eo prorsus modo, ac in vecte adplicatis certo loco ponderibus non nisi unicum est punctum, a quo desumtæ omnium datorum ponderum distantiæ cum iisdem reciprocant.

Centrum gravitatis non semper idem est, ac centrum figuræ, vel magnitudinis. Centrum figuræ adpellatur medium figuræ, aut solidi punctum, a quo lineæ omnes *ad figuræ angulos ductæ sunt æquales ; quale reperitur in quovis polygono regulari, aut symmetrico, quod lateribus æqualibus, & parallelis constat. Siquod in data figura, aut solido est punctum, per quod ducta recta, vel ductum planum illud dividit in partes magnitudine æquales, id est centrum magnitudinis : contra centrum gravitatis est, per quod ducta recta vel planum corpus dividit in partes æquiponderantes. Incidunt aliquando in se se hæc centra, ut in circulo, sphæra &c. si partibus homogeneis constant: sæpe distant : multæ figuræ carent centro magnitudinis : centrum gravitatis nullibi deest. Quamvis omnes dimensiones geometricæ, ceu lineæ, superficies, solida, omni proprietate physica, adeoque & gravitate careant ; expedit tamen concipere singula puncta lineæ viribus quibusdam prædita, ut centrum æquilibrii, & gravitatis in quavis dimensione quæri, inventumque ad corpora physica transferri possit sub certa hypothesi, si ea satis homogenea sint, & elementis æquabiliter distributis constent. Centrum gravitatis inest in quovis corpore singilatim: centrum gravium adpellatur telluris centrum, in quod omnia tendunt. Centrum gravitatis commune adpellatur, quod habent plura corpora diversa, quæ unum systema componunt.*

§. CXXXIII.

Theoremata, ac Lemmata de Centro Gravitatis Dimensionum Geometricarum.

I. *Centrum gravitatis lineæ rectæ est medium eius punctum.* Si enim singula puncta lineæ ceu totidem potentiæ æquales vel ponduscula æqualia concipiuntur, bina quævis puncta ex utraque medii parte æquidistant a centro gravitatis ; summa igitur momentorum omnium utrinque æqualis est.

II. *Ut centrum gravitatis in perimetro trianguli reperiatur*, iungantur (F. XX. T. II.) puncta media d & e binorum quorumvis laterum AB, BC, & recta iungens d e, cuius extremis punctis adplicata sint pondera longitudini linearum iunctarum proportionalia ; quorum inventum gravitatis centrum f iungitur cum medio puncto g tertiæ lineæ A C ; recta iungens f g rursus habetur

pro

Digitized by Google

pro vecte, in cuius uno extremo f est pondus AB + BC; in altero extremo g pondus AC; quo modo inveniri denique potest commune centrum gravitatis omnium laterum ceu in H. Hac eadem methodo centrum gravitatis reperitur in quovis dato systemate rectarum etiam non concurrentium.

III. Ut inveniatur centrum gravitatis trianguli, vel superficiei triangularis, (F. XXI. T. II.) ex binis angulis quibuscunque A, & D agantur ad puncta media laterum oppositorum binæ rectæ; dico in earum concursu C fore centrum gravitatis; nam quarumvis rectarum basi parallelarum, quas recta AF in partes æquales, ut ipsam basin BD secat, centra gravitatis iacent in recta AF, adeoque & centrum gravitatis totius areæ iacet in AF; similiter vero demonstratur, quod centrum gravitatis totius areæ iaceat in recta DE, atque adeo in communi intersectionis puncto C; cum unicum tantum in quavis dimensione esse possit. Colliges: centrum gravitatis trianguli a vertice distat duabus tertiis partibus rectæ ex vertice ad baseos punctum medium ductæ, seu punctum C ex tota AF resecare trientem CF. Cum enim ducta EF bifariam dividat latera AB, BD, erit BE : AE = BF : DF, proin rectæ EF, AD sunt parallelæ. Hinc ob similitudinem triangulorum ECF, ACD, erit AC : CF = AD : EF = AB : AE = 2 : 1. sive AC : CF = 2 : 1, & AC + CF : CF = 2 + 1 : 1. Idem valet, quiscunque angulus pro vertice, & quodcunque oppositum latus pro basi sumatur. Quapropter centrum gravitatis trianguli obtinetur, si sumantur duæ tertiæ partes cuiusvis rectæ e quovis angulo ad lateris oppositi punctum medium ductæ.

IV. *Centrum gravitatis trapezii* invenitur, si id per diagonalem in bina triangula dividitur, quorum centra gravitatis coniungens recta habetur pro vecte, cuius extremis adpensa intelliguntur pondera iis triangulis proportionalia, inter quæ centrum gravitatis reperiri potest.

V. *Polygona irregularia* dividuntur in tot triangula, quot sunt latera demtis duobus; singulorum superficies, ac centra gravitatis, demum commune centrum omnium reperitur.

VI. Centrum gravitatis tum *peripheriæ tum figuræ circularis vel ellipticæ* incidit in centrum figuræ: itemque centrum gravitatis parallelogrammi, polygoni regularis, cumque *cylinder* ex infinitis circulis, & *parallelopipedum* ex infinitis parallelogrammis ceu elementis constet; idcirco centrum gravitatis in hisce solidis in medio axis centra gravitatis basium coniungentis consistit, si ea homogenea sint.

VII. Centrum gravitatis *pyramidis polygonæ* cuiusvis a vertice distat $\frac{3}{4}$ rectæ ex vertice ad centrum gravitatis baseos ductæ; hinc centrum gravitatis coni seu recti seu obliqui distat a vertice $\frac{3}{4}$ axis.

§. CXXXIV.

Definitio. *Linea directionis corporis* est quævis recta e centro gravitatis ad horizontem perpendicularis; generatim quævis recta per centrum gravitatis ducta, *diameter gravitatis* adpellatur.

§. CXXXV.

Propositio II. *Quamdiu centrum gravitatis corporis, vel systematis sustentatur, totum pariter sustentatur corpus, vel systema.* Patet ex notione centri gravitatis, quod illud est punctum, in quo adplicata resistentia æquilibrium cum systemate efficit, & circa quod si sequeretur motus, is ex utraque parte æqualis, & alter alteri oppositus esset.

Quamdiu in vecte punctum illud, a quo desumtæ distantiæ cum ponderibus reciprocant, sustentatur, totus vectis, omniaque adpensa pondera sustentari debent. Porro quodvis corpus vel systema corporum eiusmodi vectem exhibet; nam perinde est, sive pondera utrinque concipiantur adpensa ad vectem, sive eorum vis tota in ipso suspensionis puncto immobiliter fixa concipiatur, ut adeo totus vectis quomodocunque oneratus instar unius massæ solidæ considerari queat; ut, quemadmodum in vecte sustentato centro gravitatis, omnia pondera sustentantur; sic idem in quovis corpore, aut systemate corporum usu venire debeat.

§.

Digitized by Google

§. CXXXVI.

Propositio III. *Corpus cuiuscunque figuræ, aut massæ plano horizontali insistens, nullaque alia vi impulsum, vel retentum, quam proprio pondere, consistet in suo situ, nec labetur, quamdiu linea directionis intra basin corporis cadit: si vero hæc linea cadat extra basin: labetur versus eam partem, in quam linea directionis cadit.* Nam centrum gravitatis, si corpus plano horizontali insistit, nullaque extranea vi impellitur, duntaxat secundum directionis lineam nititur ad motum, nullumque alium habet nisum, vel directionem; si igitur hæc linea intra basin corporis cadit, centrum gravitatis sustentatur: igitur & totum corpus: contrarium fit, si cadit extra basin.

§. CXXXVII.

Propositio IV. *Quodvis corpus polyedrum (quotcunque laterum, etiam infinitorum uti sphæra) plano inclinato impositum per sese, & remoto omni affrictu per planum lubricat, sive repit, id est, sine ratione descendit, utcunque cadat linea directionis sive extra sive intra basin eius corporis; modo perpendicularis ex centro gravitatis in planum ducta intra basin cadat.* Si enim vis normalis, qua corpus agit in planum-inclinatum, ab eodem plano excipitur, ac sustentatur, motus corporis per planum fit per vires relativas longitudini plani parallelas, ita ut quodvis punctum corporis plano impositi, atque ipsum maxime centrum gravitatis ea vi & directione parallela urgeatur; hinc polyedrum, si nihil obstat, per planum inclinatum repere cogitur super basi sua. At vero quia motu polyedri inchoato per vires relativas, basis resistentiam patitur ob affrictum, perinde ac si vis contraria eidem basi imprimeretur; hinc vis relativa, & celeritas partium inferiorum minuitur, & a partibus superioribus prævertitur; quapropter si linea directionis cadit extra basin (F.XXII. n.2. T.II.) polyedrum rotatur circa angulum solidum o; quia centrum gravitatis descendere potest per arcum e n, cuius quodvis punctum n propius est lineæ horizonta-

Digitized by Google

li a b, quam punctum e. At vero si (n. I.) linea directionis Z u cadit intra basin corporis plano impositi, polyedrum Z non rotabitur; nam rotatio fieret circa angulum solidum C, ac centrum gravitatis describeret arcum Z i, & in i ab horizontali A B magis distaret, quam antea. Nam in triangulo C m Z latus C Z ob angulum oppositum maiorem est maius quam Z m distantia ab horizontali; quare etiam C i = C Z erit maior distantia; Polyedrum igitur hoc casu rotari non potest, quin centrum gravitatis ascendat. Unam addidi limitationem: *modo perpendicularis ex centro gravitatis in planum ducta intra basin cadat.* Nam cadat extra; ut P r (n. 3.) perspicuum est, quod vi & directioni absolutæ P d, planum non ita obsistat, ut vis normalis P r a plano sustentetur, & extinguatur; quapropter etsi partes inferiores corporis P, queis plano insistit, nullam paterentur celeritatis imminutionem; tamen centrum gravitatis secundum lineam directionis P d moveri, ac corpus P labi deberet.

Multi in hac re lapsi sunt opinione quidem mea; ac fortassis paradoxum non nullis videbitur, sphæram plano inclinato impositam per illud repere, non rotari debere. Quapropter respondendum est ad opposita argumenta. Ac I. generatim statuunt: corpus cuicunque plano insistens labitur, si linea directionis cadit extra basin. R. Si corpus plano horizontali *insistit, eiusque directionis linea extra basin cadit; labitur; verissime id dictum. At si plano inclinato imponitur, eiusque vis pressiva seu normalis a plano extinguitur, vires habet relativas seu plano parallelas, quarum directione descendit; non autem rotatur remoto affrictu; quia nulla est rotationis caussa. II. Corpus in plano horizontali positum, si linea directionis extra id planum cadit, rotatur: igitur idem in plano inclinato continget. R. In plano horizontali centrum gravitatis nullum exerit nisum, quam verticalem secundum lineam directionis, ob quem, si hæc extra basin cadat, centrum gravitatis, cum minime sustentetur, deorsum ruet, ac polyedrum circa angulum convertet. At in plano inclinato centrum gravitatis vim ac directionem plano parallelam habet; huic igitur obsequetur, quamdiu nulla adest, rotationis caussa, id est, si remoto affrictu partes inferio-*

res

Digitized by Google

res basis eadem, qua superiores celeritate per planum descendere queant.

III. Si polyedrum (n. 2.) rotatur, centrum gravitatis e descendens per arcum e n propius accedit ad horizontem; atqui si potest, debet sane accedere. R. Quia vis absoluta est obliqua ad planum, & vis pressiva seu normalis in planum, huius reactione extinguitur, sola retinetur vis parallela; per hanc igitur accedet ad horizontem. Illud addendum: Si per affrictum aut vim contrariam celeritas partium inferiorum magnopere minuitur, & excessus celeritatis iam acquisitæ a partibus superioribus par sit centro gravitatis ad eam altitudinem elevando, ad quam illud rotatione elevari debet, tum corpus descendens rotabitur opinione quidem mea, etsi centrum gravitatis cadat intra basin.

§. CXXXVIII.

Adplicatio Theoriæ.

I. Corpus in centro gravitatis suspensum ex linea flexili, manet in ea positione, quæ illi datur; sic enim dum punctum suspensionis seu obstaculum & centrum gravitatis in eadem recta sunt ad horizontem perpendiculari, & centrum gravitatis, & totum corpus sustentatur. At corpus ex quovis alio puncto libere suspensum, tamdiu circa punctum suspensionis converti debet, donec illud sit in linea directionis. Nam obstaculum, sive punctum suspensionis vim centri gravitatis elidit; ergo in eadem recta concurrere debent. Hoc modo empirice determinatur centrum gravitatis superficierum; suspenditur nempe superficies ex quovis puncto, ac notatur perpendicularis per hoc punctum transiens, quæ erit diameter gravitatis; tum corpore ex alio puncto suspenso rursus notatur verticalis per hoc punctum transiens; quæ erit alia diameter gravitatis. Punctum interfectionis utriusque diametri est centrum gravitatis superficiei. Reperitur etiam diameter gravitatis, siquod corpus aciei prismatis, chordæ, aut extremitati mensæ imponatur, quærendo situm in quo partes utrinque æquilibrium teneant. Si corpus A B (F.

XXIII. T. II.) per funes flexiles d e, f g in e & g suspenditur, illud una cum funibus ita inclinatur, ut si ii concipiantur producti, donec concurrant in K, punctum concursus & centrum gravitatis C sint in eadem linea ad horizontem normali. Sit vectis A B (F.XXIV. T. II.) qui concipiatur divisus in partes æquales octo. Corpus oblongum, & homogeneum M N in totidem partes æquales divisum filo flexili E e in distantia ab hypomochlio C ut 3, & ex altera parte filo flexili D d in distantia ut 1 adplicetur vecti: dico, corpus oblongum in æquilibrio fore, eiusque gravitatis centrum fore directe infra C hypomochlium vectis. Nam partium e f, e g centrum gravitatis transit per filum flexile E e, ita ut in E sit vecti adplicatum pondus ut 2: partium vero d f, d h centrum gravitatis est in recta D d, ita ut in D censeatur adplicatum pondus ut 6; cum igitur hæc pondera D & E = 6, & 2 ac distantiæ E C, C D = 3 & 1 reciprocent, in vecte dabitur æquilibrium. Centrum vero gravitatis corporis oblongi erit in O puncto, a quo desumtæ distantiæ d O, e O cum ponderibus 6 & 2 reciprocant; hoc est immediate infra hypomochlium C. Unde patet, cum pondus partium f e, e g circa e in æquilibrio sit, id in hoc puncto e, vel E veluti collectum, & concentratum concipi posse; similiter pondus partium h d, & d f, quodam modo in d, vel D collectum; inter centra partialia e & d commune gravitatis centrum est in O. Sit vectis A B (F.XXV. T.II.) cuiuscunque figuræ, aut ponderis; fulcrum in C; onus movendum P in A, potentia movens p in B. Brachii A C centrum gravitatis sit in Q, & brachii C B centrum gravitatis in q. Tum vero si brachia A C, B C remotis ponderibus P & p in æquilibrio sint, concipi potest, ac si vectis careret omni pondere, & in Q & q pondera gravitati eorum brachiorum æquipollentia ad lineam geometricam essent adplicata. Si (F. XXVI. T. II.) linea vel pertica gravis P A sustentatur in A, pondus omnium punctorum lineæ, aut partium perticæ perinde agit in fulcrum A, ac si id in medio lineæ puncto collectum, & linea P A gravitatis expers foret.

II. Artifices ut a lapſu præſervent corpora, iis ampliores baſes adfigunt, vel corpora prope baſin graviore materia onerant, ut linea directionis quovis levi impulſu aut motu extra baſin ampliorem non exeat, aut centrum gravitatis propius ad baſin accedat; uti fit in candelabris. Quæ in cuſpidem, aciemve deſinunt corpora, ei impoſita ægre manent erecta, levi enim aeris motu linea directionis extra baſin vagatur: at ponderibus æquilibrantibus utrinque onerata citra lapſum agitari poſſunt. Quædam corpora videntur ſponte ſua aſſurgere, aut ſurſum tendere, cum eorum gravitatis centrum reipſa deſcendit; uti fit in cono duplicato, qui per planum inclinatum aſcendere videtur; Sit (F. XXVII. T. II.) circulus A B D communis baſis conorum, in C centrum gravitatis utriusque. Sit D F latus regulæ acclivis, ita ut F G ſinus anguli inclinationis ſit minor radio C D circuli baſeos, centrum gravitatis C in ſitu C D magis diſtat a linea horizontali, quam ſi perveniat ad F; reipſa igitur id centrum deſcendit, dum conus per planum aſcendere videtur. Similiter ſi lateri cylindri cavi adfigitur materia quædam gravis ceu plumbum, isque ita imponatur plano inclinato, ut plumbum ſuperiorem plani partem reſpiciat, centrum gravitatis deſcendet verſus inferiorem partem, & cylindrum ſurſum aget. Qua ſimili ratione aliquando teſſeræ, aut globi luſorii adulterantur. Filum ferreum (XXVIII. T. II.) recurvum & pondere gravatum uno extremo, & altero exiguæ baſi ceu extremitati menſæ incumbens ſuſtentatur ob centrum gravitatis per baſin tranſiens, idem rationem vectis acutangularis A C B habet.

III. Admiranda inprimis eſt naturæ ſagacitas in locando centro gravitatis, eoque intra baſin conſervando. Ita enim illa corpora omnium animalium compoſuit, ut, cum pedes fulcri, aut baſeos vices gerant, ex utroque latere pondus adſit æquale, & linea directionis cadat intra baſin; unde regulæ etiam ſaltandi, arma tractandi, & artes funambulorum derivantur, qui baculum ſat gravem manu tenent, eumque modo in hanc partem protrudunt, ut centrum gravitatis intra baſin conſervent. Quæ partes geminatæ ſunt in corpore animali, earum una in uno, altera in altero latere æquidistat a medio; contra partes simplices medium tenent locum. Ab ipsa natura discimus, ut, cum per declive descendimus, corpus aliquantum retrorsum, in ascensu vero prorsum flectamus, uti idem fit ab iis, qui dorso impositum onus baiulant: qui obeso sunt corpore, situ magis erecto incedunt: qui de sella surgit, corpus in anteriorem partem inclinat, ac pedes retrahit, ut centrum gravitatis versus eam promoveatur partem, quam stans acquirit: qui nutat in unam partem, brachium & crus extendit in alteram: si calces coniunctim muro apponimus, nihil tollere e terra possumus; homo uni insistens pedi, facili impulsu labitur, ac corpus versus eam partem, cui insistit, flectit: qui luctantur, pedibus divaricatis consistunt, quo ampliore basi gaudeant. Aves longiore collo gaudentes longos etiam pedes habent, quos volando retrorsum extendunt, sicut ciconiæ. Eædem uni etiam pedi tuto insistunt, quia ob prælongos, & in orbem sparsos unguiculos basis sat ampla est relate ad massam corporis exiguam; si caput sub alta condunt, in illud latus id inflectunt, ex qua parte pedi uni insistunt.

IV. Celebrantur etiam muri inclinati, & turres præsertim Bononiensis, Pisana, coloniensis, quæ etsi inclinatæ sint, longo tempore firmæ consistunt, eoquod lineæ directionis per basin transeant. Accedit, quod turres ob decrescentem latitudinem murorum versus verticem ad figuram pyramidum vel conorum, haud penitus cavorum accedant, in quibus centrum gravitatis magis removetur a vertice; ob hanc caussam, si plano inclinato imponas cylindrum, ac conum eiusdem altitudinis ac baseos, citius labetur cylinder, quam conus. Similiter currus fœno, aut tritico onusti ad magnam altitudinem per vias declives citius evertuntur, quam currus humiliores.

V. *Sit denique* (exercitationis caussa) *parallelopipedum A B D H* (*F. XXIX. T. II.*) *per totam longitudinem homogeneum*) *&* *grave, in cuius punctis extremis A, & B adpensa sint pondera P, & Q; oportet determinare punctum C, cui potentia tertia seu resistentia*

-*est*

eſt adplicanda, ut ea parallelopipedum ponderibus P & Q, ac propria etiam gravitate oneratum in æquilibrio teneat. Reſolutio. Quoniam id ſolidum ex hyp. homogeneum eſt, & ſymmetricum, eius centrum gravitatis in medio puncto ſectionis M baſi parallelæ conſiſtet. Concipiatur in eo puncto adpenſum pondus N æquipollens ponderi totius ſolidi. Sit longitudo eiusdem L; ponaturque planum S V, ita ut diſtantia A S ſit $=1$. Diſtantia centri gravitatis a pondere Q ſit x; erit diſtantia alterius ponderis P a centro gravitatis $= L - x$. Quoniam ex §. CXXXI. ſumma factorum ex quovis pondere in ſuam ab aſſumto plano diſtantiam æqualis eſt facto ex ſumma ponderum in diſtantiam centri gravitatis ab eodem plano, erit

$$P + N + \frac{LN}{2} + Q + LQ = (P+Q+N)(1+L-x):$$

facta membri alterius multiplicatione, & reductione utriusque erit $\frac{LN}{2} = LP + LN - Px - Qx - Nx.$

$$\& \quad 2Px + 2Qx + 2Nx = 2LP + LN$$

unde fit $x = \frac{\overline{2P+N}.\,L}{2(P+Q+N)}$.

Colliges I. Si præſcinditur a gravitate ſolidi, ſeu vectis, hoc eſt, ſi ponitur $N = 0$; erit $x = \frac{PL}{P+Q}$; ſive ut ſumma ponderum $P + Q$ ad totam eorum diſtantiam L; ita pondus P ad diſtantiam alterius ponderis Q a centro gravitatis; uti oſtenſum eſt §. CXXX.

2. Si ponitur $P = Q$; erit $x = \frac{\overline{2P+N}.\,L}{2(2P+N)} = \frac{1}{2}L.$ Hoc eſt, ſi pro vecte ſumitur corpus ſymmetricum grave, eique æqualia utrinque adpenduntur pondera, centrum gravitatis etiam computata propria gravitate vectis eſt in medio. vid. N. I. huius §.

3. Si

Digitized by Google

3. Si ponitur P = o; erit $x = \frac{LN}{2Q + 2N}$; hoc est, si corporis homogenei & æqualiter extensi e.g. cylindri, vel parallelopipedi gravitate sua præditi uni duntaxat extremitati adplicatur pondus, inveniri potest punctum, ubi fulcro est imponendum; ut pars prominens vi suæ gravitatis cum altera parte, & adpenso pondere æquilibrium obtineat. Si sumitur regula lignea gravis, cuius pondus N = 29 drachm. longitudo L = 208 lin., pondus Q = 101, erit x, seu distantia ponderis Q a fulcro $= \frac{29 \cdot 208}{2 \cdot 101 + 2 \cdot 29} = 23\frac{1}{2}$ proxime, hoc est fulcrum non omnino binis pollicibus distabit a pondere, uti experientia comprobat. Discimus ex hoc casu, quomodo onus super humero commodissime gestari queat, si nempe baculus cum adpensa sarcina ita humero imponitur, ut ipsius pars anterior sola in æquilibrio sit cum parte posteriore, & onere adpenso; tum enim manus facillime reget baculum, & in suo situ servabit, neque brachii vis premens fatigabit humerum; atque ita leve fit, quod bene fertur onus.

CAPUT III.

De Statera, Libra, & Axe in Peritrochio.

Examinato gravitatis centro de instrumentis mechanicæ, ac machinis adcuratius disseri potest. Machinæ omnes vel ad vectem revocantur, vel ad planum inclinatum. De utroque genere agendum; ac primo de statera, libra, & axe in peritrochio, in quibus ratio vectis clarius perspicitur.

§. CXXXIX.

Definitio I. *Statera Romana*, ut vulgo adpellatur, est pertica, aut virga rigida inæqualium brachiorum, cuius ope corporum præsertim graviorum pondera explo-

Digitized by Google

plorantur. Eius partes sunt 1. ipsa virga A I (F.I. T.III.) quae *iugum*, vel *scapus* dicitur; 2. *axis*, circa quem scapus mobilis est. 3. *Trutina*, vel *ansa* D, cui axis inseritur. 4. *Lingula* (vel *examen*) C e ad scapum verticalis, quae si intra trutinam absconditur, situm horizontalem iugi indicat. 5. Lanx vel uncus O, ex quo corpora suspenduntur, quorum pondus quaeritur. Brachium minus C A fere crassius est longiore; ut illud una cum lance, vel unco in aequilibrio sit, antequam adplicentur pondera. In longiore brachio pondus constans p, quod *cursor*, vel *bolis* dicitur, adhibetur; idque tamdiu removetur a fulcro C, donec cum onere examinando in aequilibrio sit. Id brachium longius dividitur in certas partes, ut distantia bolidis a fulcro statim innotescat. Ea divisio fere fit empirice, designando primum puncta, in quibus pondera aequalia utrinque aequilibrium tenent; dein aliud punctum brachii longioris determinatur, in quo bolis duplum pondus prioris sustentat, & aliud punctum, in quo sustentatur pondus triplum; atque ita porro. Triplex staterae species est. I. Cum pondus p notum per brachium C I est mobile, lanx autem O, & ansa D immobiles: haec species in usu est maxime. II. Si ansa est mobilis: lanx autem, & pondus immobiles. III. Quando lanx mobilis; pondus autem, & ansa non moventur. In omni casu statera est vectis heterodromus per se inaequalium brachiorum, etsi haec, praesertim si ansa mobilis est, aequalia fieri queant.

§. CXL.

Problema I. *Ope staterae determinare pondera corporum.* Res. Cum in vecte posito aequilibrio pondera & distantiae reciprocent; hinc dato uno pondere seu cursore p, eiusque distantia d; item alterius ponderis O distantia D; erit $O = \frac{pd}{D}$. Sit p = 5 tt.; distantia reperitur tamdiu illud per brachium movendo, donec aequilibrium obtineatur; cuius indicium est lingula intra trutinam erecta. Sit haec distantia d = 10; ac D = 2.

erit

erit $O = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$. sit $D = 1$. $p = 4$. $d = 12$; erit $O = 48$. Magnæ ſtateræ ferreæ uſui in primis ſunt curribus onuſtis ponderandis.

§. CXLI.

Definitio II. *Bilanx* ſeu *libra* eſt vectis æqualium brachiorum, cuius ope de æqualitate ponderum iudicamus. Eius partes fere eædem ſunt, ac in ſtatera, nempe *ſcapus* vel *iugum*, quod in bina brachia æqualia dividitur ab *axe*, & *trutina* : *lingula*, ſeu *examen* : *lances binæ*.

§. CXLII.

Problema II. *Examinare libram.* Ut de ponderum impoſitorum æqualitate iudicari poſſit, neceſſe eſt 1. ut brachia ſint eiusdem longitudinis, & ponderis; atque ut lances quoque idem habeant pondus. Utrumque deprehenditur, ſi libra vacua a pondere peregrino, & ſepoſitis etiam lancibus ſitum horizontalem teneat, ſive ita conſiſtat, ut lingula intra trutinam abſcondatur; tum adhibitis lancibus, iisque etiam permutatis idem obſervetur; ſi removeri lances nequeant, pondera, quæ æquilibrantia deprehenduntur, etiam tum in æquilibrio eſſe debent, ſi alterum in alterius lancem transfertur. Fallacia libræ in eo eſt, quod ſtatera in bilance obtrudatur; ſi nempe brachia ſunt inæqualis longitudinis, quæ tamen remoto peregrino pondere ſitum horizontalem obtinent propterea, quod ſimul inæqualis ponderis ſint; ac tum merx longiore brachio adpenſa æquilibrabit cum alio noto pondere, etſi ab hoc deficiat. Dolus detegitur ponderis, ac mercis permutatione.

Ad perfectionem bilancis præterea requiritur 1. *ut quam minimo ponduſculo ſitum mutet. Hinc axis fere in aciem deſinit, ut fulcro annulari incumbens facile mobilis ſit.* 2. *Brachia longiora præſtant. vix enim effici poteſt, ut penitus æqualia ſint; erit autem differentia ponderum, quæ videntur æquilibrare, eo minor, quo maior eſt longitudo brachiorum. Sint eiusmodi pondera P, & Q. brachium,*

Digitized by Google

chium, ex quo pendet P, sit L, alterum sit L + l tantillo longius. Si videntur æquiponderare, erit $PL = QL + Ql$; *&* $Q = \frac{PL}{L+l}$ *sit aliqua differentia P — Q; erit hæc differentia* $= P - \frac{PL}{L+l} = \frac{Pl}{L+l}$. *hæc igitur differentia eo minor fit, quo maior est longitudo L. ac fit, ponitur* $l = o$, *hoc est, si brachia essent penitus æqualia, erit* $\frac{Pl}{L+l}$, *differentia pariter* $= o$.

3. *Firmitas, & crassities brachiorum ponderibus examinandis proportionata esse debet; cavendum enim, ne ultra firmitatem suam oneretur bilanx, & brachia incurventur, ac fides illius propterea corrumpatur.* 4. *Ne lingula brachii inclinati pondus augeat; ei in scapi parte inferiore contrapondium addi solet.* 5. *Est aliud præterea libræ requisitum, recta positio centri motus; ad quam pertinet sequens*

§. CXLIII.

Problema III. *Determinare in libra positionem centri motus, ut ex situ horizontali iugi ponderum æqualitas tuto explorari possit.* Resolutio. Sit F. II. T. III. iugum libræ A B; puncta suspensionis A & B; centrum motus C. manifestum est, id punctum C in libra esse in aliquo puncto rectæ P C, quæ iugum A B secat bifariam, ut centrum motus ab utroque suspensionis puncto distet æqualiter. At quæri potest, utrum centrum motus C poni debeat in ipsa recta A B coniungente puncta suspensionis; an supra rectam A B in D, vel directe infra in d. Dico, *ut ex situ horizontali iugi ponderum æqualitas tuto explorari possit, centrum motus non in ipsa linea iugi A B, nec infra, sed supra eam collocandum esse.* Dem. Sit *primo* centrum motus in ipsa linea A B; quiescet libra in quocunque situ obliquo a C b, etsi pondera in A vel a, & B vel b adpensa sint æqualia; quia posita quacunque iugi inclinatione æquales manent eorundem a centro motus distantiæ C m, C n ob æqualitatem triangu-

lo-

lorum C a n, C b m. quapropter ex *solo* situ horizontali, ponderum æqualitas non colligitur, uti nec inclinatio iugi indicio est, pondera esse inæqualia. Dein si alterum pondus e. g. B vel pauxillo maius est, iugum mox situm verticalem adfectabit, & lances evertentur; quod in usu libræ valde molestum est.

Secundo sit centrum motus (F. III. T. III.) infra lineam iugi A B. Si iugum hoc casu vel paullum dimoveatur a linea horizontali, non redibit ad eum situm, sed vertetur, & gyrabit circa centrum C; donec b sit in A, & a in B, etsi pondera in A & B sint æqualia. Posita enim quavis inclinatione a C b erit distantia n C ponderis A minor, quam distantia C m ponderis B; istuc igitur perpetuo prævalebit, donec subvertatur totum instrumentum. Si pondera sunt inæqualia; hoc rursus ita accidet; hinc ad usum commodum bilancium hæc centri positio adhiberi non potest.

Tertio sit centrum motus non in ipsa linea, sed supra eam in D; tum vero æqualia pondera a situ horizontali dimota ad eundem mox redeunt, nec ullo situ obliquo consistunt; nam (F. IV. T. III.) pondus B elevatum maiorem distantiam D m, quam pondus A depressum habet; illud igitur ob maius momentum prævalebit, & ad situm horizontalem redibit. Patet igitur, centrum motus supra lineam A B puncta suspensionis coniungentem collocari debere, ut ponderum æqualitas ex situ horizontali tuto explorari possit. Cavendum tamen, ne iusto altius elevetur id centrum; secus libra evadet pigra, & inæqualitatem ponderum ægre indicabit.

Corollarium I. Ex dictis intelligitur ratio sequentis experimenti (F. V. T. III.) Extremis punctis iugi A B duo cubi eiusdem molis ac ponderis ita adfigantur, ut supra, vel infra iugum ambo existant. Si *supra iugum* extiterint (F. V. T. III.) uno tantisper elevato in a, uterque circa axem C rotatus situm priori oppositum acquiret: *Si infra*; (F. VI.) cubus B elevatus in b relabetur illico, & priorem situm tuebitur. Si iugum A B in se spectetur, centrum motus, & centrum gravitatis in idem punctum C incident; at ob affixos cubos graves

cen-

Digitized by Google

centrum gravitatis ex C transfertur in f. Quare cubis sursum spectantibus centrum gravitatis f supra centrum motus existet, adeoque iugum vertetur, ac cubi ad situm oppositum pervenient. In hoc dein situ, dum cubi deorsum spectant, ac centrum gravitatis f infra centrum motus C existit, iugum a situ horizontali dimotum eundem post aliquot oscillationes recuperabit, uti ex iis, quae §. praec. n. 3. dicta sunt, perspicuum est.

§. CXLV.

Corollarium II. Uti in omni vecte, sic in libra, quae est vectis aequalium brachiorum, momentum ponderis vel potentiae est ut factum ex vi absoluta, quam habet in distantiam a centro motus; quod quidem factum eiusdem potentiae *vis relativa*, vel *momentum* nuncupatur. Ex quo derivanda est ratio alterius experimenti, quod sane mentionem meretur. Si homo insistens lanci librae maioris ad aequilibrium reducitur cum pondere in altera lance posito, ac dein manu sua, vel ope baculi partem quandam iugi sursum trudit, destruet hoc pacto aequilibrium; & lanx illa, cui insistit, praeponderabit. Ut ratio huius experimenti perspiciatur, sit F. VII. T. III.) iugum AB, ex quo lances pendent. vir insistens lanci D, & aequilibratus cum pondere in E posito sursum impellat vel partem AC in H, vel partem BC in K; dico, quod lanx D sit descensura. Cum enim actio, & reactio semper aequales & oppositae sint, necesse est, ut quaecunque vis ex D agat contra punctum H, vel K, par omnino & opposita vis vel impressio agat in lancem D, haec contraria impressio vel pressio in lancem D perinde se habet, ac si iugo esset adplicata in A puncto suspensionis; consequenter eadem vis, quae sursum premit puncta H, vel K, deorsum premit punctum A. Posito igitur V pro hac vi, exprimet quantitas V. HC momentum, quo brachium AC sursum agitur, dum fit impressio in H, & quantitas V. KC exprimit momentum, quo brachium BC sursum agitur, dum fit impressio in K; in utroque autem casu quantitas V. AC exprimit momentum, quo brachium AC ob reactionem urgetur deorsum. Quamobrem cum facta impressione in H vis relativa sursum = V. H C sit minor vi relativa deorsum, quae est = V. A C; lanx D descendet differentia harum virium, quae est = V. A H. Dum autem fit impressio in K, inprimis eadem vi relativa = V. K C, qua brachium B C in K sursum truditur, brachium A C urgetur deorsum; ob reactionem autem idem brachium A C deorsum agitur vi relativa = V. A C; quapropter descendet summa harum virium, quae est = V. A K. Igitur universe si distantia puncti illius, in quo fit impressio sursum, a puncto A ponitur = D, erit vis, qua lanx descendit = V. D. ac si fit impressio in A, nullus sequetur motus; si in B, omnium maximus.

§. CXLVI.

Definitio. *Axis in peritrochio* (F. VIII. T. III.) est cylinder, vel tympanum ope rotae concentricae, quae *peritrochium* dicitur, circa axem mobilis. Coniungitur nempe rota maior, & rota minor, quarum centra pertransit communis axis, ita ut rotae sibimet adfixae simul circumvolvantur; peripheriae rotae minoris adplicatur onus, & peripheriae rotae maioris potentia. Rota maior, ut potentiae ab axe ceu fulcro distantia augeatur, instruitur prominentibus ex peripheria bacillis, qui *Scytalae* dicuntur: imo omissa maiore rota scytalae longiores adhibentur minori rotae vel cylindro infixae, saepe etiam zona circularis aut cylinder cavus. Haec rota maior, zona, vel cylinder cavus, aut scytalae, quae vicem earundem obeunt, dicitur *peritrochium*, velut circumcurrens, rota vero aut cylinder minor, cui onus adplicatur, nuncupatur *axis*; hinc tota machina *axis in peritrochio*, & si axis situ horizontali iacet, *succula*; si verticaliter erigitur, *ergata* vocatur.

§. CXLVII.

Propositio. *Si potentia ad radium peritrochii vel ad scytalam, & pondus ad radium axis perpendiculariter adplicantur, potentia est ad pondus, ut radius axis ad radium peritrochii.* Dem. Axis in peritrochio reipsa est ve-

vectis heterodromus, cuius hypomochlion est in medio puncto diametri per axem transeuntis : distantia ponderis est radius axis: distantia potentiae radius peritrochii, sive longitudo scytalae; ex quo patet, potentiam ad pondus esse reciproce, ut est distantia ponderis, sive radius axis ad distantiam potentiae sive radium peritrochii aut longitudinem scytalae. Sit potentia p pondus O, radius axis A, radius rotae maioris, vel peritrochii R; erit $p : O = A : R$; & $p = \frac{AO}{R}$. Ponantur $A = 2$. $R = 30$. $O = 1000$; erit $p = 66$ proxime.

§. CXLVIII.

Corollarium. Dum potentia peripheriam suae rotae vel peritrochii semel percurrit, & axis semel circumagitur, ac funis axi semel circumvolvitur, pondus attollitur per spatium aequale peripheriae axeos; hinc spatia percursa, & celeritates potentiae ac ponderis sunt ut peripheriae rotarum, hae ut radii, hoc est reciproce, ut potentia, ac pondus. Huc igitur pertinet quodvis genus machinae, qua potentia in gyrum agitur, simulque axem, vel cylindrum, cui pondus adplicatur, circumagit; estque huius machinae usus perfrequens. Nam ope simplicis vectis pondus non nisi ad altitudinem brachii brevioris elevari potest; hinc rota in axe adhibetur, ut infiniti veluti vectes tot nimirum, quot sunt radii in quovis circulo simul uniantur, sive vectis quidam perpetuus efficiatur; quia uno radio depresso mox alius succedit. Claves, quibus ad elateres horologiorum adducendos utimur, sunt axes in peritrochio, modo suculae, modo ergatae pro vario horologii situ. Sucularum maximus est usus in fodinis, altisque aedificiis, ergatis saepe animalia adhiberi solent.

Si potentia ita adplicatur ad scytalas, ut sursum exerat vires, fiatque eadem ponderis & potentiae directio, machina sequetur leges, & rationem vectis homodromi, curandum maxime est, ut directio potentiae ad radium peritrochii, vel scytalam normalis sit; hinc palmulae sic in-

Digitized by Google

feruntur rotis ab aqua agitatis, ut ea perpendiculariter in illas incidat. Funes adhibeantur flexiles, ac tenues, ut ne nimium virium in superando eorum rigore absumatur. Cavendum, ne iidem glifcant supra axem, aut spiræ spiris involvantur; ex quibus sequitur, ut onus attollendum recidat, aut crassities axis, & distantia ponderis a fulcro, momentumque illius crescat; imo si funis admodum validus adhibetur, ad radium axis dimidia eius crassities computanda est, ut vera ponderis distantia obtineatur. Loco diametri per medium axem vel cylindrum transeuntis centris basium infiguntur axiculi, iique fulcrorum foraminibus, vel crenis inseruntur. Ad minuendam vero frictionem ea foramina, vel loculamenta, in quibus axiculi circumaguntur, non rotunda, sed ex tribus, quatuorve arcubus circularibus convexis constituuntur, quos aliqua tantum parte axiculi contingunt. Vis huius machinæ quodam modo infinita est, cum radius peritrochii semper augeri possit, ac tantundem decrescat potentia, quantum radius peritrochii, vel longitudo scytalæ crescit, aut contra axis gracilior fit. In usu tamen limes quidam eius incrementi est, quia ipsa scytalarum longitudo, aut vastitas peritrochii plurimum incommodi habet; hinc si datis ingenti pondere, & exigua potentia, longitudo scytalarum enormis evaderet, multiplicantur cum axibus rotæ, utque altera alteram circumagere valeat, dentibus instruuntur, vel rotæ dentatæ iungitur tympanum cum bacillis; quæ quidem in Museis Physicis passim exhiberi solent.

CAPUT IV.

De Trochleis, & Machina Funiculari.

Theoriam æquilibrii, ac genuinas staticæs leges vis & usus trochlearum plurimum & illustrat, & confirmat. Iisdem addimus explicationem machinæ funicularis, quæ ex iisdem derivatur principiis, & sæpe trochleis indiget.

§.

Digitized by Google

§. CXLIX.

Definitio I. Trochlea eſt rotula, vel orbiculus circa axem mobilis, cuius peripheria cava chordam, vel funem circumductum, qui *funis ductarius* dicitur, recipit. Includi eadem circa axem ſolet anſa, capſula, vel loculamento CD, in cuius extremitate D eſt uncus, ex quo vel ſuſpenditur ipſa trochlea (F.IX. T.III.) vel pondus (F.X. T.III.) Ne is orbiculus continuo motu circa axem excavetur penitus, & deteratur, firmari ad axem ſolet, ut una cum axi moveatur in ſuo loculamento.

§. CL.

Definitio II. Trochlea *fixa* eſt, quæ ex unco, aut quovis retinaculo firmo ſuſpenditur: (F.IX.) *mobilis* vero, quæ una cum pondere ex unco ſuſpenſo movetur. (F. X.) Ut autem vis trochlearum ad principium generale æquilibrii (§. CXIX.) revocetur, ea, quæ funibus utrinque adplicantur (ſive pondera ſint, ſive quævis potentiæ) inſtar *potentiarum agentium* ſpectanda ſunt, quarum directiones ſunt tangentes circuli vel trochleæ, reſiſtentia vero, ſive tertia potentia vi compoſitæ potentiarum agentium æquipollens per centrum trochleæ tranſit. In trochlea fixa potentiæ agentes ſunt pondus O, & quævis potentia trahens in p: tertia potentia eſt in C centro trochleæ. In mobili (F. X.) potentiæ agentes ſunt retinaculum B, & potentia agens in A; tertia potentia, cuius vis æqualis & oppoſita eſt vi reliquarum, eſt in C trochleæ centro.

§. CLI.

Propoſitio. *Quotiescunque potentiæ ope trochleæ ſeu fixæ, ſeu mobilis agentes, & funi utrinque adplicatæ in æquilibrio ſunt, hæc quatuor concurrere debent:* 1. *Ut directio tertiæ potentiæ per trochleæ centrum tranſeat.* 2. *Ut potentiæ trahentes, ſeu funi utrinque adplicatæ æquales ſint,* 3. *Ut tenſiones funis ex utraque parte:* & 4. *Anguli, quos directiones potentiarum trahentium cum di-*

Digitized by Google

rectione tertiae potentiae efficiunt, itidem sint aequales. Demonstratur (F. XI. T. III.)

1. *Directio tertiae potentiae per trochleae centrum transit.* Nam tertiae potentiae vices subeunt axiculi; qui, cum per centrum transeant, non potest directio tertiae potentiae per centrum non transire tum in trochlea fixa, tum in mobili.

2. *Potentiae trahentes seu funi utrinque adplicatae sunt aequales.* Nam universe potentiae in aequilibrio constitutae (§. CXXI.) sunt reciproce ut perpendicula ex directione tertiae potentiae in directiones earundem demissa, nempe in trochlea ex centro in tangentes; haec perpendicula sunt radii trochleae, qui aequales sunt.

3. *Funes aeque tenduntur ex utraque parte*; cum enim potentiae funi adplicatae sint aequales, earumque vis in quovis directionis, quam habent, puncto itidem aequalis (§. CXVI. n. III.) necesse est, ut tensio funis A a sit aequalis tensioni funis B b.

4. *Anguli, quos directiones potentiarum trahentium cum directione tertiae potentiae efficiunt, aequales sunt.* Producantur directiones potentiarum, donec concurrant in O. Quoniam in eodem puncto etiam tertia potentia concurrit, ut aequilibrium obtineatur (§. CXX.) eiusque directio per centrum transit, erit recta C O in directione tertiae potentiae. Ex elementis autem recta per centrum ex concursu tangentium ducta angulum tangentium secat bifariam; quod quidem ex aequalitate triangulorum a C O, b C o facile a quovis perspicitur. Patet igitur veritas omnium membrorum propositionis; cuius inversa aeque vera est, & extra dubium posita. Si enim potentiae aut funium tensiones, vel anguli directionum cum tertia potentia sunt inaequales, vis composita potentiarum non transit per centrum trochleae; quia unica recta, quae nempe angulum tangentium secat bifariam, ex concursu tangentium per centrum transit; hinc directio tertiae potentiae, & vis composita reliquarum non sunt in eadem recta; proinde aequilibrium destrui debet.

§.

§. CLII.

Corollarium I. Vis abſoluta cuiusvis potentiæ A & B eſt ad vim relativam, qua agunt in reſiſtentiam C, ſive qua pondus O directione OC aſcendere cogunt, ut ſinus totus ad coſinum anguli obliquitatis, quem directiones earundem cum directione OC reſiſtentiæ vel ponderis efficiunt. Nam vis obliqua O a reſolvitur in vim O t, & vim O e; pariter vis O b in vim O s & O e; vires O t, O s ad aſcenſum ponderis O nil conferunt; imo ſe deſtruunt mutuo. Igitur vis abſoluta O a vel O b eſt ad vim relativam O e, qua pondus O aſcendere cogitur, ut O a : O e, hoc eſt ſumta O a pro ſinu toto, ut ſinus totus ad ſinum anguli O a e, qui eſt coſinus anguli a O e, quem directio cuiusvis potentiæ cum directione reſiſtentiæ, vel ponderis efficit.

§. CLIII.

Corollarium II. Si directiones potentiarum trahentium ſunt parallelæ, angulus obliquitatis a O b evaneſcit, & coſinus fit æqualis ſinui toti, ac vis relativa abſolutæ. In trochlea fixa (F. IX.) ſi directiones funium parallelæ ſunt, vis potentiæ trahentis p eſt æqualis vi ponderis O poſito æquilibrio, ut in vecte æqualium brachiorum A C B, cuius fulcrum in C premitur vi æquali ſummæ potentiarum, ſeu ponderum p, & O. Quare trochlea fixa vires potentiæ non auget; habet tamen multa commoda 1. Ut eius ope directiones, ut libuerit, mutari poſſint, atque aliis potentiis pondera ſubſtitui. 2. Quia homo ægre ſurſum trahit, ope trochleæ fixæ directionem mutare in aliam, qua deorſum trahat, ac pondere totius corporis uti poteſt. 3. Ope trochleæ, ac mutatæ directionis evitatur periculum, cui trahentes ſubiacent, ſi infra pondus elevatum conſiſtunt. 4. Trochleæ funium attritum minuunt. Quando trochlea mobilis adhibetur, funis altero extremo in B firmandus eſt; tum vero manifeſtum eſt, quod poſito æquilibrio retinaculum B, & potentia trahens A æquales ponderis partes ſuſtineant; quia generatim potentiæ funibus adplicatæ æquales eſſe debent. Si directiones

Digitized by Google

funium parallelæ sunt; resistentia centri sive ponderis O æqualis est summæ potentiarum trahentium; quævis igitur potentia dimidiam ponderis partem sustinet; & potentia p est ad resistentiam O, ut 1 : 2. Celeritas vero potentiæ p est ad celeritatem ponderis O, ut 2 : 1. Dum enim pondus O uno pede ascendit, tum funis A a, tum funis B b uno pede fit minor, sive potentia funem 2 pedum attrahet. Ob hanc caussam trochlea mobilis consideratur ut vectis secundi generis a C b, cuius fulcrum est in b, pondus in C, potentia in a; aut spectari potest trochlea mobilis, ut axis in peritrochio, quando potentia sursum trahit, eandemque, ac pondus, directionem habet.

§. CLIV.

Corollarium III. Ex his colligi potest, qua firmitate pollere retinacula debeant, ex quibus vel trochlea, vel funis pendet. Trochleæ magnitudo rationem virium non mutat; maiori tamen funis facilius advolvitur ob minorem curvitatem peripheriæ. Maxime curandum, ut directiones funium sint parallelæ, sive ut funis ductarius semiperipheriam ambiat; tum enim vis relativa potentiæ, qua effectus editur, æqualis fit absolutæ. Contra eo minor erit vis relativa, quo minor est chorda arcus, quem ambit funis ductarius; quod haud ægre demonstrari potest.

Ex hisce principiis variæ trochlearum coniugationes explicandæ sunt. Trochlea enim unica monospastos *dicitur, & quidem primi generis, si fixa est: secundi generis, si mobilis; trochlea duarum rotularum, trium, plurium* dyspastos, trispastos, *generatim* polyspastos, *nominatur; de quibus deinceps agendum est.*

§. CLV.

Coniugationes Trochlearum.

I. Si funis trochleam mobilem ambiens (F. XII. T. III.) eidem in tribus punctis a, C, b adplicatur, ac directiones partium funis parallelæ sunt, potentia agens

p

Digitized by Google

p est ad pondus O, ut 1 : 3. Nam tensio partis Bb & Aa, item tensio partis Bb, & Cc æquales sunt ac proin potentiæ funibus adplicatæ, ceu æquales concipi debent; cum igitur summa potentiarum parallelarum sit æqualis toti resistentiæ O, ac potentiæ quoque hoc casu æquales sint; erit tota resistentia ad unam potentiam p, ut 3 : 1. Sit (F. XIII.) vectis æqualium brachiorum CA, CB, & potentiæ A, & B æquales, & parallelæ; erit tertia potentia $O = A + B$. Adde aliam potentiam P agentem directione opposita directioni resistentiæ o; patet, hanc imminui quantitate æquali huic potentiæ P, eodemque tempore, si æquilibrium retineatur, imminui potentias A, & B; quare tota resistentia O dividetur per potentias A, B, P; & si istæ, ut in nostro casu, æquales sint, erit O ad A vel B, ut 3 : 1.

II. Si (F. XIV. T. III.) singulæ trochleæ mobiles habent singulos funes, quorum unum extremum retinaculo, alterum proximæ trochleæ annectitur, erit potentia trahens p ad resistentiam O, ut unitas ad illam dignitatem binarii, cuius exponens est numerus trochlearum mobilium; sive positis 3 trochleis mobilibus, erit potentia ad pondus, ut unitas ad tertiam dignitatem vel potentiam binarii, sive ut 1 : 8. Per quamvis enim trochleam mobilem potentia fit duplo minor; per duas quadruplo, per tres octuplo minor.

III. Frequentior usus est trochlearum capsis inclusarum, quarum varia coniugatio, ac structura est; aliquando enim trochleæ omnes revolvuntur circa eundem axem, vel clavum transversum in lateribus capsæ fixum; aliquando plures sunt trochlearum ordines in singulis capsis, & axibus parallelis, atque aliis supra, vel iuxta alios dispositis. Capsa una, quæ *fixa* dicitur, firmatur unco, suo in fulcro immobili, alia capsa mobilis connectitur cum pondere versus capsam fixam attollendo. In tali polyspasto lex generalis est hæc: (F. XV. T. III.) *Si funes inter se paralleli sunt, potentia p est ad resistentiam O, ut unitas ad numerum funium;* omnes enim funes si parallelæ sunt, æqualiter tenduntur, proindeque tota resistentia per singulos distribui-

 tur

Digitized by Google

tur æqualiter; nec vero potentia plus ſuſtentare debet, quam ſit tenſio unius funiculi, cui adplicatur; unde perſpicua eſt veritas legis. Dicatur numerus funium n; erit $p : O = 1 : n$; & $p = \frac{O}{n}$. Sit $O = 600$. $n = 12$; erit $p = 50$. Dici etiam poteſt: *Potentia eſt ad pondus, vel reſiſtentiam, ut unitas ad duplum numerum trochlearum mobilium;* ac tum ſi extremitas funis ductarii annectitur trochleæ cum pondere mobili, ut vera ratio potentiæ ad pondus obtineatur, duplus numerus trochlearum mobilium unitate augendus eſt. Ut funium parallelismus ſervetur, rotulæ ſuperiores aſcendendo, inferiores deſcendendo creſcunt. Si prægrandia pondera levantur, canales orbiculorum madefieri ſolent, ne funium attritu nimis incaleſcant. Ponderi adpenſo addendum eſt pondus capſæ & uncorum. Præterea neceſſe eſt, ut trochleæ ipſæ, retinacula, funes ponderi movendo proportionati ſint. Nec vero in uſu trochlearum ingens earum numerus adhibetur; cum funes tam longi, & continui ægre conficiantur. Cæterum huic incommodo medetur ſequens coniugatio trochlearum, quæ præ aliis vim ingentem habet.

IV. Singulis trochleis ſinguli funes ita adplicentur (F. XVI. T. III.) ut alterum extremum eidem reſiſtentiæ, vel oneri O, alterum proximæ trochleæ innectatur. ſola trochlea ſuprema A ſit fixa, reliquæ B, & D mobiles; dico: erit potentia p ad onus O ut $1 : 7$; in hac enim ratione inverſa ſunt celeritates oneris, ac potentiæ. Aſcendat O uno digito; tantundem fiet longior funis AB, eodemque ſpatio trochlea C deſcendet; funis autem C D fit longior tribus digitis, nempe uno ob aſcenſum oneris, ac binis ob deſcenſum trochleæ C quo ex utraque parte funis eandem ambientis digitus unus funi C D accedit. Hinc trochlea E deſcendet tribus digitis; at funis E p ſeptem digitis longior evadet ob deſcenſum trochleæ E, per quem ex utraque parte funiculi eam ambientis tres digiti longitudini E accreſcunt, & unus præterea ob aſcenſum oneris O.

Ut adcuratius demonſtretur præcedens numerus, ſit pars ponderis, quam ſuſtinet funis O A, vel A B = x;

erit

Digitized by Google

erit tenſio vel pars ponderis ſuſtentata a fune C D vel O B dimidia potentiæ tertiæ agentis ſecundum A B; proin $= \frac{1}{2} x$; *ſimiliter erit tenſio funis E p vel O D dimidia potentiæ C D; proin* $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x = \frac{1}{4} x = p$, *ſeu potentiæ funem E p tendenti.*

2. *Cum pondus O ſuſtentetur a tribus funibus O A, O B, O D, erit pondus* $O = x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x$; *ac* $4 O = 7 x$; $x = \frac{4}{7} O$; *ac* $\frac{1}{7} O = \frac{1}{4} x = p$; *unde fit* $7 p = O$; *ſeu* $O : p = 7 : 1$.

§. CLVI.

Definitio. Chordæ, ſeu funiculi quotcunque idem punctum trahentes, & in æquilibrio conſtitutæ, machinam funicularem efficiunt. F. XVII. Pondus π chorda C π ſuſpenſum in C, quod hinc trahitur directione CB, inde directione C A, ſuſtentabitur, ſi eius vis æqualis, & directio oppoſita eſt vi compoſitæ ex tractionibus CB, C A. Vis trahens in B exprimatur per C n, vis trahens in A per C m; productis directionibus ultra punctum concurſus C fiat H C = C n, & F C = C m; ac completo parallelogrammo ducatur diagonalis T C, quæ eſt vis æquipollens in B & A trahentibus. Igitur ſi pondus π trahat vi æquali & oppoſita, æquilibrium dabitur, & reliqua obtinebunt omnia ſecundum leges æquilibrii; puta 1. quod tenſiones chordarum ſint reciproce ut perpendicula ex quovis puncto directionis tertiæ chordæ in eas demiſſa. 2. Si loco potentiarum in A & B chordæ alligentur ad retinacula, quodvis urgebitur vi tanta, quanta eſſet potentia æquilibrans, ibidem poſita. 3. Vis relativa, qua pondus π a potentiis A & B directione π C ſurſum urgetur, eſt ad vim abſolutam earundem, ut coſinus anguli obliquitatis, quem directio cuiusvis potentiæ e. g. A cum directione ponderis π efficit, ad ſinum totum; reſoluta enim vi C m in C o, & o m, ſola vis C o in pondus π directione π C agit; eſt autem ſumta C m pro ſinu toto recta C o coſinus anguli obliquitatis. Evaneſcente angulo m C o coſinus fit æqualis radio, & vis relativa abſolutæ. 4. Si pondus π adplicatur intermediæ trochleæ in C; æquilibrium non dabi-

dabitur nisi potentiæ in A & B trahentes sint æquales; ac si tum chordæ C A , C B alligentur ad retinacula , pondus π per chordam A C B tamdiu versabitur, donec versetur in medio, ubi directiones chordarum productæ cum directione ponderis π angulos utrinque æquales efficiunt. Unde colligi potest, quam generalis, quamque consentanea experientiæ sit ratio æquilibrii ex compositione, atque oppositione virium derivata.

CAPUT V.

De Plano inclinato, Cuneo, & Cochlea.

Vires relativas corporis plano inclinato impositi determinavimus Sect. II. C. VII. Nunc potentiæ cum eiusmodi corpore in æquilibrio constitutæ determinandæ sunt. Vulgo statuunt : si potentia est ad pondus corporis plano inclinato impositi, ut altitudo ad longitudinem; æquilibrium habetur. At enim hac lex minime generalis est , atque ad unicam duntaxat potentiæ directionem pertinet. Quapropter cum directiones potentiæ admodum variari possint, easdemque in usu machinarum spectare maximi momenti sit , generatim potentiæ æquilibrantes sub quavis directione examinandæ sunt. Ad planum inclinatum reduci cuneum , & cochleam , ipsa rerum istarum expositione palam fiet.

§. CLVII.

Propositio. *Ut* (F. XVIII. T.III.) *potentia π pondus O plano inclinato impositum sustentet, seu cum vi relativa ponderis O in æquilibrio sit , ea est ad hoc pondus , ut sinus anguli inclinationis plani A C B ad cosinum anguli π O S , quo directio O π potentiæ π ad planum S n vel A C inclinatur.* Dem. Ex centro O ducatur S n ad A C parallela ; & vis absoluta O f resolvatur in pressivam O m, & relativam O n; quæ quidem vis relativa O n , ut in æquilibrio teneatur , impediaturque a motu , necesse est, ut a vi æquali & contraria O S sustentetur. Ducatur S π ad S n normalis, & completo parallelogrammo O S π r, recta O π exhibebit

bit potentiam ϖ, eiusque vires abſolutas ſecundum directionem O ϖ, ſi cum pondere O eſt in æquilibrio. Sinus totus Of in triangulo O f n, & ſinus totus O ϖ in triangulo O ϖ S dicatur 1. erit

1. On: Of = ſin. ang. incl. A C B: 1.

2. O ϖ : O S (O n) = 1 : CoS. ang. ϖ O S.

Quare ex æquo perturbate erit;

O ϖ : O f = ſin. ang. incl. A C B : coſ. ang. ϖ O S.

§. CLVIII.

Corollarium I. Si directio potentiæ ϖ eſt parallela ad planum, angulus inclinationis ϖ OS evaneſcit, adeoque coſinus eiusdem anguli fit æqualis radio vel ſinui toti. eſtque ut Of vel longitudo plani; igitur potentia parallela ϖ eſt ad pondus O, ut angulus inclinationis plani A C B ad radium, ſive ut altitudo plani ad longitudinem. Si autem potentia parallela ad planum paullo maiorem rationem habeat ad pondus, quam ſit ratio altitudinis ad longitudinem, eadem pondus per planum attollet; ſi rationem habet paullo minorem, pondus per planum tarde deſcendet. Atque hic eſt potiſſimus uſus planorum, quæ ad horizontem inclinantur, ut pondera gravia facilius attolli ad quandam altitudinem, vel ex eadem ſine magno impetu demitti poſſint: ope eiusmodi planorum plauſtra onerantur, & levantur. Rotæ curruum in ſcrobe hærentes facilius extrahuntur, ſi anterius labrum ſcrobis aut foſſæ declivius reddatur, inclinati ſuggeſtus tormentis bellicis, doliis, aliisque ponderibus attollendis, vel demittendis ſubſternuntur, eodem pertinent commoda ſcalarum in cellis etiam ſubterraneis, pegmatum, tectorum &c. In eiusmodi planorum uſu maxime curandum eſt, ut directio potentiæ fiat plano parallela; hoc enim modo eiusdem vis tota in pondus impenditur; ac ſi idem pondus in diverſis planis ſuſtentandum eſt, eo minor potentia parallela ſufficiet, quo minor fuerit plani altitudo, ac conſequenter etiam minor vis relativa; ſi altitudo plani ſit infinite parva, id eſt, ſi pondus in plano horizontali iacet, potentia infinite parva vi ponderis ſuperandæ par erit; directirectioni igitur horizontali ponderum non gravitas eorundem, ſed inertia & frictio reſiſtit. Contra ſi angulus inclinationis plani ita creſcat, ut a recto non differat, vis relativa ponderis ſit æqualis abſolutæ, & potentia ponderi ſuſtentando æqualis eſſe debet.

Dum centrum O ponderis (F. XIX.) a potentia π provehitur in d, potentia deſcendit ſpatio O d = p π; altitudo vero perpendicularis a pondere ſuperata, eſt = e d; ſunt igitur celeritates ac ſpatia a potentia & pondere confecta, ut O d : e d = A C : A B ſive ut longitudo ad altitudinem; quare ſi potentia ad pondus rationem habeat inverſam, nempe ut altitudo ad longitudinem, in æquilibrio erunt.

§. CLIX.

Corollarium II. Quando potentia π agit directione π O ad horizontem parallela, eadem eſt ad pondus, ut altitudo plani ad baſin. Nam univerſe eſt π O : O f ſive π : O, ut altitudo plani ad coſinum anguli, ſub quo directio potentiæ π ad planum inclinatur. Hoc caſu autem (F. XX. T. III.) cum ſit O π parallela ad C B, & O S ad A C, erit angulus S O π æqualis angulo inclinationis plani C, & conſequenter coſinus huius anguli = ang. A; igitur erit potentia ad pondus, ut altitudo ad baſin, eoque maior potentia requiretur, quo maior altitudo eſt plani, & minor baſis; eo minor, quo minor altitudo, & maior baſis. Hoc modo adhibentur plana inclinata inſtar cuneorum, dum ea ſubtus onera gravia immittuntur; ac tum directio potentiæ trudentis eſt horizontalis; ac ſi pondus O, vel eius centrum gravitatis non niſi directione O Q moveri poſſit, eo tempore, quo pondus attollitur altitudine H G; potentia promovetur ſpatio C H; ſunt igitur celeritates, ac ſpatia potentiæ, & ponderis ut C H : H G = C B : B A; ſive ut baſis ad altitudinem; quare ſi potentia ad pondus ſit in ratione inverſa, nempe ut altitudo ad baſin, in æquilibrio erunt. Verum in hoc caſu plani inclinati duplex frictio conſideranda, nempe baſeos plani C B ad baſin corporis, ſupra quod illud truditur; dein ipſius plani ſecundum longitudinem A C cum onere attollendo.

§. CLX.

Digitized by Google

§. CLX.

Corollarium III. Ut potentia π in æquilibrio teneat vim pressivam ponderis O in planum, hoc est, ut eius pressionem in planum impediat, necesse est, ut eadem potentia sit ad pondus ut est basis, sive cosinus inclinationis plani ad sinum anguli, sub quo directio potentiæ π ad planum A C inclinatur. Nam F. XXI. T. III. ut vis pressiva, quam exhibet recta O m nullum effectum sortiatur, opus est, ut a vi directe opposita & contraria O r elidatur. Fiat π r parallela ad S n, & S π parallela ad O r. Recta O π exhibebit vim absolutam potentiæ π agentis directione O π. Est autem (§. C. II.)

$$Om \text{ seu } Or : Of = B : 1.$$

$$\& \; O\pi : Or = 1 : \text{sin. ang. } O\pi r \text{ seu ang. } \pi OS$$

$$\text{unde erit } O\pi : Of \text{ seu } \pi : O = B : \text{sin. ang. } \pi OS.$$

Si potentia π agit directione ad planum parallela, non inclinatur ad planum, sive angulus inclinationis sit infinite parvus, pariterque sinus eiusdem; hinc pondus haberet rationem infinitam ad potentiam, hoc est, potentia parallela pressionem in planum impedire non potest.

Satis iterum, & abunde colligitur ex dictis, quanti momenti sit in omni mechanica, directiones potentiarum adcurate examinare. Quamvis enim in usu machinarum calculo trigonometrico non utamur; tamen theoria cautos & circumspectos nos reddit, ut recte & commode utamur potentiis. Inclinationes directionum, vel planorum, per varia triangula lignea explorantur in datos angulos immissa, ut istorum magnitudo quaqua ratione ex nota earundem magnitudine æstimari possit, ac potentiæ, aut ponderis vires supputari.

§. CLXI.

Definitio. Cuneus, ut fere adhiberi solet, duplex est planum inclinatum, cuius basis (F. XXII. T. III.) vel dorsum aut latitudo est recta A B, altitudo vero C I, quam non nulli cunei longitudinem vocant. Usui est

est tum in fissione corporum, ceu lignorum, tum etiam si ingentia onera ad exiguam altitudinem attollenda sunt; nam perinde est, sive onus super planum, sive planum subtus corpus promoveatur.

§. CLXII.

Observatio. Corpora firma, ceu ligna, ex fibris constant, in longum productis, aliisque brevioribus secundum latitudinem dispositis, per quas fibrae longitudinales, ut vocant, connectuntur; illae ingenti vi elastica pollent, hae maxime cohaesionem efficiunt, & fibrarum longiorum distractioni resistunt. Hinc cum cuneus in hiatum iam factum adigitur (F. XXII.) fibrae, quae directione m G, & n G sunt positae, vi sua elastica tanto magis partium separationi resistunt, quo magis tenduntur, & producuntur interposita latitudine cunei, reliquae autem fibrae secundum latitudinem positae vel comprimuntur in partibus m & n, vel distenduntur pariter circa I. Haec fibrarum tensio & compressio, si solidum findendum longius est, ad certum duntaxat terminum velut ad G pertingit, ultra quem actio cunei sentitur nulla. Is terminus, ad quem actio cunei pertingit, & resistentiae vis, quae in usu cunei ab elasticitate & cohaesione fibrarum nascitur, a peculiari corporum plexu, & constitutione pendet. Ac concipi potest, totam resistentiam fibrarum omnium aequipollere cuidam vinculo O Q, ita, ut si actio cunei usque ad G pertingat, vis omnium fibrarum, qua partium separationi resistunt, tanta sit, quanta esset vinculi O Q eidem separationi pariter resistentis; atque ita perspicuum est, latera cunei ita agere in punctis m, & n, ac si potentia esset adplicata duplici vecti secundi generis, qui unum acutangularem efficit, ita ut fulcrum utriusque vectis sit in G, onus in O & Q, potentia in m, & n adplicata.

Quae de fibris corporum diximus, ad omnia corpora solida tum flexibilia, tum rigida pertinent. Funis ex filis, & quodvis filum ex filamentis subtilioribus componitur, uti microscopia exhibent: ligna in fibras oblongas divelluntur, quae ex fibrillis subtilioribus cavis constant: latera

fibril-

Digitized by Google

fibrillis solidis subtilissimis nectuntur. Eodem modo lapides, metalla, chordæ, quæ ex intestinis animalium fiunt, membranæ, coria se habent. Quid est enim (inquit Musschenbroeck Introd. ad cohær. corp.) cylindrus metalli solidus, præterquam congeries filamentorum metallicorum tenuium, sibi coniunctorum?

§. CLXIII.

Propositio. *Dum potentia agit ope cunei, tum ratio plani inclinati, tum ratio vectis homodromi habenda est.* Ostend. F. XXII. T. III. dum cuneus altitudine e I intruditur, corpus eodem tempore recedit spatio m n; quare cum potentia ad resistentiam sit reciproce ut spatium confectum, ea ad resistentiam erit ut m n ad e I, vel ut A B ad C I; hoc est, ut latitudo basis cunei ad eius altitudinem; hinc quo minor est basis cunei, eo maior eiusdem vis est, uti patet in cultris, novaculis, serris, gladiis, dentibus, securibus, forficibus, clavis, qui sunt cunei plurium laterum: in acu, quæ cuneus est laterum infinitorum; verbo, quodcunque corpus ex basi latiore in acumen desinit, rationem, ac vim cunei habet. Dicatur potentia ope cunei agens p. resistentia corporis R, basis cunei B, altitudo A; erit $p : R = B : A$. At enim etsi in corporibus findendis eadem adhibeatur potentia agens p, & idem cuneus, sive eiusdem dorsi B, & altitudinis A, non tamen æqualis reperitur resistentia; proinde R non est generatim $= \frac{pA}{B}$; hinc

2. In vi cunei determinanda præter rationem plani inclinati aliud spectandum est, nempe vectis homodromus, cuius fulcrum est in G, resistentia in O & Q, potentia p in m, & n adplicata; quapropter potentia est ad resistentiam, ut O G, vel Q G ad m G vel n G. Universe igitur potentia est ad resistentiam ut $B \times OG : A \times mG$.

Quemadmodum diversa est corporum, quæ finduntur, elasticitas, & cohæsio, & ob hanc caussam diversa resi-

resistentia; *ita vis vinculi O Q diversa concipi debet in diversis corporibus. Si primus cuneus iam penitus immersus est corpori findendo, adhibeaturque novus, facilior fit distractio, eo etiam ex capite, quia distantia potentiae in A vel B adplicatae a fulcro G augetur. Multi Physici docent, quod particulae aquae in funes, vel hygrometra insinuatae, tum particulae liquorum solventium, corrodentium, salinorum, venenorum &c. velut totidem cuneoli sint, qui partes corporum, in quae ingrediuntur, dissolvere debeant. At enim ostendemus, istiusmodi solutiones corporum ex solis viribus mechanicis derivari minime posse. Veteres ad diffringendos lapides in lapicidinis utebantur cuneis, quae commodius hodie pulveris pyrii ope praestamus.*

§. CLXIV.

Definitio. Cochlea seu vitis est duplex, solida seu exterior, & cava, seu interior. Solida constat ex spiris, quas *helices* vocant, cylindro circumvolutis: cava helices habet cylindro cavo incisas, quae alterius helices solidas in se recipiat, ita ut ambae exacte quadrent. Cochlea solida generari concipitur ex rotatione plani inclinati super cylindrum, ita ut longitudo unius helicis vel spirae sit longitudo plani, distantia duarum helicum altitudo, & peripheria cylindri basis. Concipiatur eiusmodi helix, quae peripheriam cylindri semel ambit, evoluta; & facile intelligetur, eandem manere longitudinem, altitudinem, basin plani, sive id rectum sit, sive in gyrum contortum.

§. CLXV.

Propositio. *Potentia, quae ope cochleae agit, est ad resistentiam, ut distantia duarum helicum ad peripheriam cylindri cochleae.* Dem. Generatim posito aequilibrio celeritas, ac spatium a potentia, & resistentia eodem tempore confectum rationem earundem reciprocam habet. Porro dum potentia, quae in usu cochleae semper agit directione ad basin cochleae vel plani parallela, peripheriam cylindri sive basin semel percurrit, resistentia percurrit distantiam unius helicis ab altera; erit igitur potententia ad resistentiam reciproce ut spatium a resistentia confectum nempe ut distantia duarum helicum, ad spatium confectum a potentia sive ad peripheriam cylindri cochleæ.

Ostendimus §. CLIX. potentiam, quæ directione ad basin plani inclinati parallela agit, esse ad pondus in ratione altitudinis ad basin plani. Cum igitur in usu cochleæ potentia agat hac eadem directione, erit ad resistentiam, ut distantia helicum, quæ est altitudo, ad peripheriam cylindri, quæ est basis plani circumvoluti; ac si pauxillum augeatur potentia, ea resistentiam superabit; crescitque eius vis, si distantia helicum decrescit, vel peripheria cylindri maior fit. Eadem plurimum iuvatur, si capiti cylindri inseritur vectis; tum enim eodem tempore, quo resistentia per distantiam binarum helicum movetur, potentia peripheriam circuli maioris describit; & cylinder cochleæ cum eiusmodi vecte fit quodammodo axis in peritrochio. Adplicatio cochleæ varia est; aliquando intra cavam, quæ etiam matrix dicitur, immobilem, solida, seu mas movetur: aliquando per marem quiescentem matrix volvitur. Attritus tamen ingens est, de quo in determinanda ratione potentiæ & resistentiæ præscindi debet. Servit cochlea potissimum pressioni, prælis vinariis, sigillatoriis, typographicis, monetariis &c. per eandem citra percussionem firmiter connectuntur metalla, ligna. Terebræ quoque perforandis corporibus inventæ cochleas æmulantur.

CAPUT VI.

De Machinis Compositis.

Machinarum compositarum maxima est varietas, & multitudo; neque nostrum est, minutim omnia exequi, cum ex generalibus principiis, & legibus machinarum casus particulares pendeant. De polyspastis trochlearibus, etsi ad machinas compositas pertineant, iam supra egi, cum opportunus se locus offerret. Cuneum ad machinas compositas quadam ratione referri debere, ex dictis constat.

 Nunc

Digitized by Google

Nunc de vectibus, compositis, ac rotis dentatis maxime agendum est.

§. CLXVI.

Definitio. *Machina composita* est compages, vel combinatio plurium simplicium machinarum, quæ ad effectum quemdam præstandum iunguntur; dicique potest *homogenea*, quando ex pluribus eiusdem speciei coalescit: *heterogenea*, si ex combinatione machinarum speciei diversæ fit. Ratio compositionis fere in eo consistit, ut potentia in machina illa, cui onus, vel resistentia adplicata est, consideretur respectu proximæ machinæ instar oneris, pro quo alia potentia quæritur; quæ inventa relate ad aliam machinam partialem denuo instar oneris sumitur, atque ita deinceps, donec in ultima partiali machina denique vera potentia adplicetur.

§. CLXVII.

Propositio. *Dum potentia agit ope machinæ compositæ ex pluribus simplicibus in se invicem agentibus, ea est ad onus, vel resistentiam in ratione composita ex rationibus omnibus, quæ in machinis simplicibus compositam constituentibus obtinent. Dem.* Sint tres vectes heterodromi (F. XXIII. T. III.) A B, B C, C D. Onus in O; fulcra in l, m, n; potentia p in D. Concipiatur potentia quædam fictitia in B, quæ cum O tueretur æquilibrium, eaque sit E; tum alia in C, quæ cum potentia priore fictitia in E adplicata æquilibrium sustineret; eaque sit = e. erit

1. $O : E = Bl : Al.$
2. $E : e = Cm : Bm.$
3. $e : p = Dn : Cn.$

Unde compositis rationibus, factaque primæ rationis divisione per E e, erit

$$O : p = Bl \times Cm \times Dn : Al \times Bm \times Cn.$$

Ponatur $Bl = Cm = Dn = 5$; & $Al = Bm = Cn = 1$, erit $O : p = 125 : 1$.

§.

§. CLXVIII.

Corollarium. Inter vectes compositos maxime celebratur statera composita (F. XXIV. T. III.) tormentis bellicis, anchoris gravissimis, campanis, aliisque oneribus prægrandibus levandis & ponderandis serviens. Sit enim A C vectis secundi generis; onus in B, fulcrum in A; in C concipiatur potentia fictitia E, quæ ope vinculi C D adplicetur instar oneris ad stateram F D, quæ est vectis primi generis; sit p cursor, seu vera potentia, l fulcrum.

erit $O : p = CA \times Fl : AB \times Dl$

ponatur $CA = 6.\ AB = 2.\ Fl = 5.\ Dl = 1.$

erit $O : p = 30 : 2 = 15 : 1.$

§. CLXIX.

Definitio. *Machina rotata* dicitur, quæ vel tota vel ex parte componitur rotis inter se coniunctis. Rota *stellata* est, quando dentes ex peripheria eiusdem instar radiorum extant: *pectinata*, si dentes plano rotæ infiguntur, idque planum situm verticalem habet: *coronata*, si dentes plano rotæ infixæ verticaliter prominent. In eiusmodi machina singulæ rotæ firmantur in suis axibus, vel in cylindro, qui circa axiculos minores cylindri basibus utrinque infixos volvitur. Eidem cylindro circa eundem axem inseritur tympanum, vel ipsa cylindri superficies ad æqualia intervalla incisis crenis dentata est, vel denique axi inseritur curriculum, id est, tigilli, aut paxilli, qui inter se paralleli sunt, & disco circulari infiguntur. Eiusmodi curriculum sæpe *laterna* nuncupatur. Generatim in machina rotata distinguenda est rota a suo tympano; ac si machina cietur ad motum, vel tympanum rotam circumagit, vel rota tympanum; motus enim a rota ad tympanum, vel a tympano ad rotam propagari potest. Ea pars machinæ, cui potentia motrix adplicatur, fere est tympanum recurvo manubrio versatile; dentes huius tympani dentibus primæ rotæ inserti eandem una cum

 alio

alio tympano circumagunt, & dum huic tympano inferuntur dentes secundæ rotæ, etiam hæc cum suo itidem tympano, vel cum cylindro, cui pondus per funem est adplicatum, circumagi debet; quo quidem modo a potentia ad pondus per plures machinas simplices propagatur motus.

§. CLXX.

Propositio. *Potentia p manubrio R versans rotatam machinam (F. XXV. T. III.) est ad onus movendum O, ut factum ex radiis tympanorum & radio cylindri Q, cui onus adplicatum est, ad factum ex radiis omnium rotarum, & manubrii.* Dem. Manubrium R cum suo tympano A eidem axi inserto, ac dein rota r cum suo itidem tympano *a*, ac denique rota ϱ cum radio a cylindri Q sunt totidem axes in peritrochio; in quibus potentia ad onus, vel resistentiam semper est ut radius axis vel tympani ad radium rotæ vel manubrii, fiat igitur secundum hanc legem analogia: ut radius A tympani primi ad radium manubrii R; ita potentia p manubrium versans ad effectum, quem illa ope manubrii obtinet; qui quidem effectus adplicatur rotæ r. Ponatur is = E, ac fiat eodem modo: ut radius tympani *a* ad radium rotæ r, ita effectus E seu vis huic rotæ adplicata ad effectum, qui per tympanum *a* obtinetur. Dicatur is e, fiatque ut radius a axis vel cylindri ad radium rotæ ϱ; ita effectus, seu vis e huic rotæ adplicata ad onus O. Quapropter sequentes habentur analogiæ:

$$A : R = p : E.$$
$$a : r = E : e.$$
$$a : \varrho = e : O.$$

Unde compositis rationibus est $A\,a\,a : R\,r\,\varrho = p\,E\,e : E\,e\,O = p : O$.

§. CLXXI.

Corollarium I. Quo minora sunt tympana relate ad rotas, aut quo maior ponitur rotarum numerus; tan-

tanto maius obtinetur incrementum virium. Ponatur $R = 28''$. $r = 20''$. $\rho = 15$. $A = 7''$. $a = 5$. $a = 3$. Sitque $O = 5000$, invenietur potentia $p = 62\frac{1}{2}$. Si vero ponitur $R = 10$. $r = 12$. $\rho = 15$. $A = 2$. $a = 3$. $a = 3$. $p = 50$; erit $O = 5000$. Sit denique $R = 15$. $r = 18$. $\rho = 20$. $A = 1$. $a = 1\frac{1}{2}$. $a = 2$. $p = 50$; erit $O = 9000$.

§. CLXXII.

Corollarium II. Si pro radiis tympanorum, & pro radio cylindri, cui onus adhibetur, assumitur unitas, deturque pondus & potentia, inveniri potest numerus rotarum computato, siquod est in machina, manubrio, & præterea ratio cuiusvis radii rotæ, ad radios tympanorum, & cylindri. Dicatur numerus rotarum x; erit

$$p : O = 1 : x = \frac{O}{p}.$$

Pondus datum O dividatur per datam potentiam p, & quotus distribuatur in factores; erunt hi tot radii rotarum, quot factores sunt assumti. Sit $O = 5000$. $p = 50$; erit $\frac{O}{p} = 100. = 4 \cdot 5 \cdot 5$. Tres igitur rotæ assumendæ sunt, ita, ut ratio unius radii ad tympanum sit $4 : 1$. Ratio reliquarum binarum sit $5 : 1$.

§. CLXXIII.

Corollarium III. Ex ipsa constructione machinæ rotatæ liquet, quamvis rotam, ac tympanum eidem axi insertum integram revolutionem eodem tempore absolvere. At si revolutiones tympani unius comparantur cum revolutionibus rotæ a tympano motæ haud ægre intelligitur numerus revolutionum tympani ac rotæ esse reciproce ut est numerus dentium rotæ ad numerum dentium tympani. Sic numerus revolutionum manubrii R est ad numerum revolutionum rotæ r reciproce ut numerus dentium huius rotæ r ad numerum denti-

Digitized by Google

um tympani A manubrio respondentis; nam eodem tempore, quo manubrium semel circumvolvitur, unam etiam revolutionem absolvit tympanum A; verum rota r, cuius dentes tympano A inseruntur, eo minorem revolutionis partem illo tempore peraget, quo numerus dentium in rota r maior fuerit, quam numerus dentium tympani A; consequenter eo plures dabuntur revolutiones manubrii & tympani A, quam rotæ r, quo in hac maior extiterit numerus dentium, quam in tympano A. Universe igitur numerus revolutionum rotæ, vel tympani cuiuscunque m est ad numerum revolutionum tympani vel rotæ n, quæ ab m movetur, reciproce ut numerus dentium tympani vel rotæ n ad numerum dentium rotæ, vel tympani m. Et quoniam ob dentium æqualitatem numeri eorundem sunt ut peripheriæ rotarum, vel ut radii, idcirco rationi numerorum dentium substitui potest ratio circumferentiarum, vel radiorum. Ex quibus illud denique elegantissimum corollarium derivatur: *numerus revolutionum rotæ velocissimæ est ad numerum revolutionum rotæ tardissimæ, ut factum ex radiis rotarum ad factum ex radiis tympanorum.* Sint (F. XXVI. T. III.) tres rotæ R, r, ϱ; numerus dentium in R = 120. in r = 100. in ϱ = 60. Sintque tria tympana A, *a*, a; numerus dentium idem in omnibus, & = 10. Præterea sit N numerus revolutionum rotæ R; n numerus revolutionum tympani A, & rotæ r; ν numerus revolutionum tympani *a* & rotæ ϱ. x numerus revolutionum tympani a, & rotæ velocissimæ q; fiet secundum dicta

$$1.\quad N : n = A : R.$$

$$2.\quad n : \nu = a : r$$

$$3.\quad \nu : x = a : \varrho$$

Compositis rationibus, factaque primæ rationis divisione per n, fiet

$$N : x = A\,a\,a : R\,r\,\varrho = 10.\,10.\,10 : 120.\,100.\,60 = 1 : 720.$$

Hoc est, dum rota R unicam revolutionem absolvit, tympanum a & rota q peraget revolutiones 720; & si una revolutio rotæ R absolvitur intra 12 horas; ro-

Digitized by Google

rota q intra id tempus revolvetur, singulis minutis primis horariis; nam $12 . 60 = 720$. Si igitur numerus revolutionum N rotæ tardissimæ ponitur $= 1$. erit

$$1 : x = A \alpha a : R r \varrho ; \& \; x = \frac{R r \varrho}{A \alpha a} ; \text{ hoc est,}$$

si factum ex radiis rotarum dividitur per factum ex radiis tympanorum, quotus ostendit, quoties rota velocissima circumeat, donec tardissima unam revolutionem absolvit.

Machinas ex variis rotis dentatis compositas, quarum ultima fere ope manubrii vertitur, vel adiunctam habet cochleam infinitam, Pancratia *adpellant*; *quasi omnia per eas effici, ac moveri possint. Compositio machinarum frequentissima est ex axe in peritrochio, & trochleis, quod quidem genus, si rostrum longe eminens habeat*, grus *adpellatur. Ad machinas compositas cochlea Archimedis, ab Archimede scilicet inventa, referenda est; constat ex cylindro, cui circumvolvitur tubus plumbeus instar spirarum, quæ sunt in cochlea, inservitque aquis ex imo in subliminorem locum attollendis. Quidam ad machinas compositas etiam bina plana ita coniuncta referunt, ut pondera filo per trochleam transeunte connexa in se mutuo agere, sesequ tenere in æquilibrio possint. Sint (F. XXVII. T. III.) eiusmodi planis imposita corpora Q & P, quorum massæ sint Q, & P; vires relativæ acceleratrices q, & p. Longitudo A C sit $= L$; longitudo A B $= l$. Perspicuum est, ut hæc corpora in æquilibrio sint, vires earundem æquales esse debere; sunt autem hæ vires ut factum ex massa in vim acceleratricem; adeoque erit $Q q = P p$. Porro vires acceleratrices corporum planis impositorum, si altitudo plani utrinque eadem est, sunt reciproce ut longitudines planorum (§. CV.) adeoque erit $p : q = L : l$; & ob $Q q = P p$; $Q : P = p : q$; proinde $Q : P = L : l$. Hoc est*, ea corpora in æquilibrio erunt, si massæ sint directe, ut longitudines planorum.

CAPUT VII.

De Resistentia, & Firmitate Absoluta Corporum Solidorum.

De illa Mechanices parte, quæ potentias motrices revocat ad certas regulas, plurimi Philosophi ac Mathematici, Antiqui & Recentiores tractarunt; hanc alteram eiusdem partem, quæ resistentias, & firmitates corporum examinat, plerique omnes reliquere intactam. Hæc tamen res in omni Mechanices usu plurimum commodi habet, & ex virium oppositione, & statices legibus maxime pendet. Non cohærentiæ caussas, sed quantitatem investigamus hoc loco, & ad calculum referre, certe quidem perutiles de ea regulas exponere conamur.

§. CLXXIV.

Definitio. Resistentia, & firmitas corporum est ea illorum vis, qua rupturæ, & partium separationi, cum trahuntur, aut premuntur, resistunt. Et quoniam corpora solida ex fibris in longum productis constant, quas aliæ fibrillæ transversæ inter se nectunt; (§. CLXII.) idcirco *resistentia & firmitas absoluta* dicitur, qua potentiæ secundum longitudinem fibrarum agenti resistunt: *resistentia respectiva*, qua resistunt potentiæ directione ad fibras normali agenti. Inter has potentiarum directiones, quarum altera est normalis, infinitæ directiones obliquæ concipi, sed quæ in parallelam unam, normalem alteram resolvendæ sunt.

Si (F. I. T. IV.) pertica vel chorda A B secundum longitudinem fibrarum suspensa, vel in A fixa trahitur a potentia vel pondere P; aut si trabes verticaliter erectæ imposita mole gravantur, eique vi resistunt; hæc absoluta est eorum corporum resistentia. Si autem corpus oblongum A C D fixum in C D, aut infixum muro trahitur directione A B ad longitudinem eiusdem normali, resistentia est respectiva; F. II. T. IV.

§. CLXXV.

Definitio II. *Potentiæ rumpentes* sunt, per quas fit ruptura, aut diffractio corporum; vires, quas trahendo,

Digitized by Google

do, vel premendo exerunt, recte *vires in nexum* nuncupantur. Utimur autem maxime ponderibus potentiarum loco, & vocamus pondus *maximum*, per quod proxime fit diffractio, vel ruptura, & quo notabiliter imminuto diffractio non fieret.

§. CLXXVI.

Hypothesis. Concipiatur (F. I. T. IV.) corpus oblongum A B eiusdem per totam longitudinem crassitiei, ceu chorda, filum metallicum, regula lignea, cylinder quicunque, vel parallelopipedum verticaliter in A figi, aut suspendi; sitque id corpus primo liberum ab omni pondere, seu vi trahente, præterquam propriæ gravitatis: tum ponatur etiam secundum fibras oblongas trahi; vera erunt sequentia:

I. *Vis in nexum supremum A, quæ a propria gravitate partium oritur, est ut pondus individuale eiusdem corporis.* Singulæ enim particulæ sive sectiones corporis sunt graves, seque habent ut ponduscula adpensa. Quare vis in singulos nexus ab infimo B usque ad supremum A crescit progressione naturali numerorum 1, 2, 3, 4 &c. ac vis in supremum nexum erit ut terminus ultimus progressionis, sive ut numerus singulorum pondusculorum, qui efficit pondus individuale dati corporis.

II. *Vis in nexum singularum particularum, quæ a pondere adpenso oritur, per singulas partes ab infimo nexu B ad supremum A æqualis est.* Nam pondus vim suam proxime exerit in obstaculum sui motus, nempe particulam B. Eadem igitur vi, quam pondus exerit, urgetur nexus inter primam B, & secundam particulam; porro secunda eadem vi, qua trahitur, trahit tertiam, tertia quartam; secus si minor alicubi vis esset, pondus non sustineretur. Igitur vis in nexum, qui inter binas quasque particulas intercedit, semper æqualis est

III. *Resistentia absoluta dati corporis æqualis est summæ virium in nexum, quæ tum a propria gravitate inferiorum, tum a pondere maximo oriuntur.* Nam quamdiu

diu corpus tum proprio ponderi, tum adiectitio P ferendo par est, inter vires in nexum ab iis ponderibus ortas, & resistentiam, vel cohaerentiam corporis aequilibrium habetur ob aequalitatem actionis, & reactionis; quoniam autem firmitas corporum non est infinita, usque adeo augeri potest vel proprium pondus corporis aucto eius volumine, vel adiectitium P, vel utrumque, ut sit proximum diffractioni. Patet igitur veram resistentiae mensuram esse summam ponderis proprii, & adiectitii ponderis maximi, per quod divulsioni partium proximum fit.

IV. *Relate ad pondus adiectitium spectanda est crassities corporis, non longitudo: relate ad proprium pondus longitudo spectanda est, non crassities.* Nam quia vis adiectitii ponderis P per singulas fibras aequaliter distribuitur, erit vis in nexum particularum, quae ab illo pondere oritur, in singulis fibris tanto minor, quo maior est numerus fibrarum, seu maior crassities, eo fere modo, quo in polyspasto trochleari vis totius oneris per singulos funiculos aequaliter dividitur, aut quo vis corporibus impressa per singula elementa eorundem ita distribuitur, ut, quo maior est eorundem numerus, eo minor generetur velocitas. Igitur numerus fibrarum, quae secundum latitudinem dispositae sunt, & crassitiem corporum efficiunt, spectandus est: longitudo vero relate ad pondus adiectitium nihil mutat, quia per singulas sectiones aequalem vim in nexum exerit. At vero relate ad propriam gravitatem nil confert crassities; ea enim crescente ipsa gravitas propria tantundem crescit. Fieri autem potest, ut ita augeatur longitudo, ut corpus proprio ponderi succumbat.

Nonnullos Philosophos, qui fila, & funes longiores magis resistere opinabantur, quam breviores, ipse iam Galilaeus refutavit in Dial. Mech. 2. Musschenbroeck in Introd. ad cohaerent. corp. ait: " Tentamina plurima feci " cum fidibus metallicis clavicymbalo inservientibus, quae " sive longae, sive breves fuerint, idem pondus gestave- " runt, funes, filave contorta raro in longissimo tractu " aeque crassa, & proinde aeque fortia fieri possunt; hinc " experimenta cum iis instituta adeo mire variant. " Conf.

§.

Digitized by Google

§. CXVIII. n. III. in horologiis pondera ex funiculis suspensa aeque in rotas agunt, sive iidem longiores, sive breviores fiant.

§. CLXXVII.

Corollarium I. Quia resistentia absoluta in corporibus homogeneis est ut crassities; hinc si illa captis experimentis in singulis corporum generibus explorata est, inveniri eadem sub data quavis crassitie poterit. E.g. cognita resistentia unius filamenti tenuis, invenitur resistentia funis utcunque crassi ex filamentis similibus sibi parallelis, & non intortis compositi, ita cum filum lini crassitiei setae equinae sustineat $3\frac{1}{2}$ tt, funis ex his filis confectus, & 7000*ies* crassior sustinebit libras $7000 \times 3\frac{1}{2}$. atque eiusmodi funis ex 7000 filis non intortis confectus crassitiem pollicis cylindrici proxime efficit. Ponatur nunc ista crassities $= 1$. & fiat funis anchorarius, cuius diameter efficit quinque pollices; erit crassities funis anchorarii ut quadratum diametri, ac pondus, quod sustinebit, $= 7000 \times 25 \times 3\frac{1}{2}$. Ex quo intelligitur, eiusmodi funibus haud aegre naves sustineri posse, etsi a procellosis fluctibus agitentur. In quolibet igitur corporum genere experimentum de resistentia absoluta desideratur, indagando pondus maximum, quod ab assumto corpore notae crassitiei sustinetur. Eiusmodi experimenta Cel. Musschenbroeckius in dissertationibus complura adcuratissime recenset; unde non nulla hoc loco exponemus.

§. CLXXVIII.

Observatio de Resistentia Absoluta.

I. Ligna parallelopipeda, quorum quodvis latus erat 0, 27. poll. Rhenol. Rupta fuerunt a sequentibus ponderibus:

Lignum

Digitized by Google

Lignum	Tiliæ	a tt	1000
	Abietis	—	600.
	Alni	—	1000
	Quercus	—	1150.
	Ulmi	— —	950
	Fagi	— —	1250
	Fraxini	—	1250
	Piceæ	— —	550.

II. Fila metallica cylindrica diametri, 0.1 pollicis Rhenol. ab appensis sequentibus ponderibus fuerunt rupta.

Filum	ex	Cupro rubro	a tt	299. 25
	ex	Orichalco	— —	360.
	ex	Auro	— —	500.
	ex	Stanno		40, 25
	ex	Plumbo	— —	29, 25.
	ex	Argento	— —	370.
	ex	Ferro	— —	450

III. Cylinder vitreus ex purissimo, albissimoque vitro, cuius diameter, ubi maxime gracilis erat, & ubi ruptum est vitrum, fuit 0, 23 pollic. sustinuit libras 118, alius ex eodem vitro libras 150.

IV. Filum unum serici e glomere paulo ante evoluti observante Musschenbroeckio tulit 80 grana medica, aliquando 85, aliquando 90. Similiter testatur Reaumur, unum eiusmodi filum bombycis tulisse drachmam, aliud etiam sesqui drachmam; habet autem drachma medicum 3 scrupulos; scrupulus 20 grana. 57 eiusmodi fila tulerunt grana 4845, proinde unum tulit grana 85. Singula tantæ subtilitatis erant, ut 57 fila simul sumta efficerent crassitiem humano pilo æqualem. Pilus e capite hominis sani & iuvenis evulsus tulit grana 2069. De Lanis ait, capillum sui capitis tulisse 1200 grana: aliud grana 1920; eam discrepantiam ab ætate, crassitie pilorum, imo etiam cultura derivant. Septem eiusmodi capilli formabant crassitiem setæ equinæ parem, ac tulerunt 9635 gr. Seta autem equina duntaxat 7970, vel 7920. Tela araneæ maioris per microscopium observata talis crassitiei est, ut 16 eiusmodi filamenta in fasciculum

Digitized by Google

lum collecta forment crassitiem pili humani. Is fasciculus tulit grana 2400; igitur singulæ telæ grana 150. Lini mediocriter subtilis, neque ulla arte ante tractati, quam ut neri possit, filamenta 23 parum intorta formabant filum æque crassum, ac seta equina; ac simul tulerunt 11710 gr. aucto pondere frangebantur.

Etsi spectata theoria resistentiæ corporum homogeneorum sint in ratione basium; tamen si alterius diametri, ac basis fila adsumuntur, quam in captis experimentis; ratio ponderum, quæ sustinent, ac basium non adcurate respondet tum ob varias corporum etiam homogeneorum affectiones, tum ob eam caussam, quod corpora, quæ adpensis ponderibus trahuntur, paulatim attenuentur, atque aliam crassitiem acquirant. Nec vero id inutilem theoriam reddit; cum in usu filorum, perticarum, trabium &c. semper paullo maior sumi crassitudo queat, quam ratio ponderis sustinendi poscat. Percommodum etiam est in omni Architectura civili, ut propinqua quadam ratione determinari possit crassities, ac firmitas trabium, aliorumve sustentaculorum, quæ ad extruendas ædes, ianuarum postes, tabulationes, contignationes destinantur, ut spectato onere, quod ferre coguntur ea fulcra, tum ruinæ ac rupturæ periculum, tum inutilis vastitas, atque enormitas evitetur. Multa ad Philosophiam experimentalem pertinentia institutis de cohærentia absoluta experimentis observavit sagacissimus Musschenbroeckius, & de omni re Physica optime meritus; ac 1. Aurum adpenso pondere minus attenuari, ac prolongari, quam cuprum vel orichalcum; forte quia magis compactum est, nec tot poris pertusum, ac alia metalla; certe & ligna densiora præ aliis magis firma reperiuntur; quamquam densitas pro generali lege cohærentiæ statui non potest; secus plumbum, uti densitate, sic & vi cohærentiæ proxime sequeretur aurum; atqui illud omnium metallorum maxime imbecille est. 2. A cupro minus ponderis ferri, quam ab argento; constat nihilominus, si idem argento misceatur, augeri cohærentiam. 3. Fila metallica, dum appenso onere trahuntur, & attenuantur, insignem calorem concipere, qui ab attritu partium compressarum oritur.

§.

Digitized by Google

§. CLXXIX.

Corollarium II. Quoniam in supremum nexum, ubi corpora suspenduntur, præter adiectitium pondus tota vis gravitatis propriæ corporum agit; hinc si nexus partium æqualis ponitur, diffractio in suprema parte continget; id quod experientia in funibus, ac filis longis comprobat. Fieri etiam potest, ut corpus proprio pondere frangatur, si ita eius longitudo augeatur, ut vis propriæ gravitatis ponderi maximo æqualis fiat; & quoniam crassities spectato proprio pondere nullum momentum habet; idcirco corpora homogenea, quæ proprio pondere rumpuntur, eiusdem longitudinis sunt, etsi crassitie differant.

CAPUT VIII.

De Resistentia Respectiva Corporum Solidorum.

Leges resistentiæ respectivæ ex theoria æquilibrii in vecte maxime derivantur: quæritur autem primo ea resistentia in figuris planis: tum ad corpora solida, quæ eiusdem per totam longitudinem crassitiei sunt, fit adplicatio.

§. CLXXX.

Hypothesis. Sit planum quodcunque expers crassitiei, sed gravitate præditum, e. g. (F. II. T. IV.) parallelogrammum A B C D, secundum lineam B D parallelum horizonti, & secundum A B normale, quod immobiliter sustentetur in C D, aut infixum sit corpori G; quoniam eius gravitas perinde se habet, ac si in centro gravitatis esset appensum pondus P æquipollens ponderi totius gravitatis: concipi potest, dimidium eius ponderis suspendi in dupla distantia nempe in B. Sit igitur in B pondus E æquale dimidio ponderi parallelogrammi; tum aliud pondus Q maximum, quod vis cohærentiæ ferre potest, donec diffractio proxime contingat. Erunt pon-

pondera E & Q potentiæ rumpentes. His positis vera sunt sequentia.

I. *Si pars prominens C D A B cum parte sustentata I K duntaxat esset connexa in supremo puncto C, resistentia respectiva, seu cohærentia illius nexus, uti ea instar potentiæ spectatur, æqualis est facto ex summa ponderum E + Q in longitudinem parallelogrammi D B, quam dico L, diviso per altitudinem eiusdem A.* Nam resistentia respectiva eodem modo se habet, ac momentum potentiæ in C adplicatæ se habet posito vecte rectangulari C D B (§. CXXV. n. I.) si enim in C ponitur potentia p, & altitudo C D parallelogrammi dicitur A;

$$\text{erit } A p = \overline{E + Q} \times L \text{ ; \& } p = \frac{\overline{E + Q} \times L}{A}.$$

II. *Si pars prominens C D A B cum parte sustentata per totam altitudinem C D connexa est, vis cohærentiæ in suprema parte C minor requiritur, quam si ea sola resisteret.* (§. CXXV. n. I.) Nihilominus tota resistentia respectiva semper æquatur facto ex ponderibus E + Q in longitudinem D B; quod ex theoria æquilibrii perspicuum est.

III. *Si pars prominens parallelogrammi cum parte sustentata per totam altitudinem C D connexa est, resistentia respectiva supremi nexus in C æqualis est facto ex potentiis rumpentibus in earum a fulcro distantiam diviso per tertiam partem Quadrati altitudinis;* sive si resistentia supremi nexus dicitur U; erit $U = \frac{\overline{E + Q} \times L}{\frac{1}{3} A^2}$.

1. Etsi cohærentia omnium partium per totam altitudinem æqualis sit; tamen vis, qua singulæ partes urgentur, crescit ab infimo puncto D usque ad supremum C; ita, ut si partes seu fibræ oblongæ tenderentur, tensio supremæ fibræ esset C m; & tensio fibræ cuiusdam intermediæ, ut O n; ac quocunque magno, aut parvo intervallo partes per altitudinem dispositæ cede-

Digitized by Google

rent, necessario superiores maiore celeritate, maioreque spatio, quam inferiores cederè cogerentur pro maiore distantia a puncto D, circa quod, si diffractio contingit, parallelogrammum convertitur. Cum igitur huic tensioni aut vi, qua fit tensio, sit æqualis resistentia, sequitur, ut hæc ab infimo puncto D ad supremum C crescat ordine naturali numerorum 1, 2, 3, 4 &c. eritque summa omnium resistentiarum, quam adpello S, ad resistentiam supremi nexus seu ad u, ut triangulum C D m ad basin C m; & quia $CD = A$, & basis $Cm = u$; erit triangulum seu dimidium factum ex altitudine in basin, $= \frac{Au}{2}$; consequenter

$$S : u = \frac{Au}{2} : u = A : 2.$$

2. Quoniam hæ resistentiæ ab infimo puncto crescentes instar potentiarum eodem modo crescentium spectari possunt; earum omnium commune centrum gravitatis o, uti in triangulo (§. CXXXIII. n. III.) a vertice D distat binis partibus tertiis altitudinis, seu $\frac{2}{3}$ A. Ac si in centro gravitatis O summa omnium resistentiarum concipitur collecta, earum momentum erit $S \times \frac{2}{3} A = \frac{Au}{2} \times \frac{2}{3} A = \frac{A^2 u}{3}$.

3. Quoniam parallelogrammum a pondere maximo Q redactum est ad statum divulsioni proximum; erit tota resistentia respectiva cum potentiis rumpentibus in æquilibrio, & momenta utrinque æqualia, seu

$$\frac{A^2 u}{3} = \overline{E + Q} \times L; \text{ unde fit } u = \frac{\overline{E + Q} \times L}{\frac{1}{3} A^2}.$$

Hæc instar porismatum præmisi, ex quibus leges resistentiarum deinceps fluent. Resistentia respectiva in supremo nexu C potissimum quæritur, quia ea, utpote maxime distans a fulcro D maximum momentum adversus potentias rumpentes habet; & siqua ruptura fieret, ea

primo

primo circa supremum nexum C contingeret, quo dissoluto diffractio reliquarum partium & rotatio parallelogrammi circa angulum D consequeretur. Sed iam ad parallelopipeda transeundum est.

§. CLXXXI.

Propositio. *Resistentiæ respectivæ in parallelopipedis sunt in ratione composita ex directa potentiarum rumpentium, ac distantiarum, seu longitudinum, & reciproca duplicata altitudinum, & simplice latitudinum.* Ostend. Pondus appensum Q vires suas per omnes supremos nexus secundum latitudinem dispositos ita diffundere debet, ut si latitudo in dupla, tripla, vel quacunque multiplicium ratione crescat, vicissim vis ad diffractionem urgens in eadem ratione decrescat; quare resistentia respectiva ponderi opposita, est reciproce ut latitudo parallelopipedi. Si vero spectatur propria eiusdem gravitas seu E, ea cæteris manentibus tantundem crescit, quantum crescit ipsa latitudo, quam dico B; quare dum factor E exprimens dimidium pondus parallelopipedi auget factum $\overline{E + Q} \times L$, vicissim divisor B exprimens rationem reciprocam latitudinis tantundem illud minuit; quocirca cum resistentia ratione altitudinis sit in singulis parallelogrammis, seu u sit

$$= \frac{\overline{E + Q} \times L}{\frac{1}{3} A^2};$$

eaque tantundem decrescat, quo plura concipiuntur parallelogramma coniuncta, sive quo maior est latitudo; erit in parallelopipedo resistentia respectiva supremi nexus $= \frac{\overline{E + Q} \times L}{\frac{1}{3} A^2 B}$; & si ponitur aliud parallelopipedum, aliaque prioribus homologa, erit ob quantitatem $\frac{1}{3}$ constantem,

$$V : u = \frac{\overline{E + Q} \times L}{A^2 B} : \frac{\overline{e + q} \times l}{a^2 b}.$$

Et quoniam potentiæ rumpenti semper adnumerandum est proprium pondus corporum, ponatur id pondere maximo Q iam contineri, vel ab eo præscindi, ut formulæ simpliciores evadant, erit $V : u = \frac{Q\,L}{A^2\,B} : \frac{q\,l}{a^2\,b}$.

§. CLXXXII.

Corollarium I. *In corporibus homogeneis potentiæ rumpentes directione normali adplicatæ sunt in ratione composita ex directa duplicata altitudinum, & latitudinum & reciproca longitudinum.* Nam in corporibus homogeneis resistentia respectiva fibrarum. uti ea instar potentiæ ponderi maximo obnitentis consideratur, eadem est, & constans; hinc erit in superiore analogia $V = u$; & $\frac{Q\,L}{A^2\,B} = \frac{q\,l}{a^2\,b}$.

Unde fit $QL : ql = A^2 B : a^2 b$

& $$Q : q = \frac{A^2\,B}{L} : \frac{a^2\,b}{l}.$$

Ex hac iam formula $Q = \frac{A^2\,B}{L}$, cæteræ leges, quas Mechanici operose demonstrant, per sese prona methodo fluunt.

§. CLXXXIII.

Corollarium II. *Si sint bina parallelopipeda eiusdem materiæ & crassitiei, sed diversæ longitudinis, erunt potentiæ rumpentes normaliter adplicatæ reciproce ut longitudines*; nam $Q = \frac{A^2\,B}{L}$; & in hac hyp. $A^2\,B = 1$; igitur $Q = \frac{1}{L}$. Eodem modo deducuntur reliqua, si omnes comparationis termini uno excepto, constantes ponuntur; uti si sola latitudo in datis corporibus homogeneis diversa est, erunt potentiæ rumpentes directe ut latitudines corporum; quod ab experientia compro-

ba-

Digitized by Google

batum reperit Muschenbroeckius in binis parallelopipedis quercinis, quorum altitudo erat 0, 33 poll. longitudo 9 dig. alterum, cuius latitudo erat 0, 26 pollic. tulit libras; alterum duplæ latitudinis duplum pondus seu 10 tt. sustinuit.

§. CLXXXIV.

Corollarium III. *Si ratio solius gravitatis propriæ habetur ac solidum grave eiusdem per totam longitudinem crassitiei muro infigitur ita, ut eius longitudo sit horizonti parallela, & altitudo adeum normalis, vires ad diffractionem urgentes sunt in ratione composita ex directa duplicata longitudinum, & simplice gravitatum specificarum, ac reciproca altitudinum.* Nam si ratio solius gravitatis propriæ habetur & ponitur $Q = 0$; valor resistentiæ respectivæ (§. CLXXXI.) abit in hunc: $u = \frac{E\ L}{\frac{1}{3}\ A^2\ B}$.

Porro pondus individuale corporum est in ratione composita gravitatum specificarum G, & voluminum, & volumina in ratione composita altitudinum A, latitudinum B, & longitudinum L; cum igitur pro E, quod dimidium pondus denotat, ponendum sit $\frac{A\ B\ L\ G}{2}$;

erit valor resistentiæ $= \frac{A\ B\ L^2\ G}{\frac{2}{3}\ A^2\ B} = \frac{3\ L^2\ G}{2\ A}$; in analogia fractio $\frac{3}{2}$ est constans. Hinc crescente longitudine corpus proprio pondere diffringi potest; sic teste Mariotto cylinder vitreus diametri $\frac{1}{3}$ lin. longitudinis 6 ped. infixus foramini horizontaliter propria gravitate fuit diffractus.

Multa præterea perelegantia corollaria ex dictis derivari possunt; quorum fundamenta iecisse satis est pro instituti nostri ratione; quapropter observationes de resistentia respectiva, ac flexione corporum subiiciemus; tum vires in nexum, quas pondera ad vectem adplicata exerunt, *considerabimus, ex quibus æquilibrii caussam non nulli petunt.*

§. CLXXXV.

Observationes De Resistentia Respectiva.

Adhibuit Muſchenbrœckius parallelopipeda, quorum quodlibet latus erat 0, 27 pollic. Rhenol. quæ, cum flecterentur ante rupturam, diſtantias ante & poſt experimentum ſollerter obſervavit, uti tabella oſtendit.

Diſtantia ponderis a foramine, ante Experimentum. Pollic.	Diſtantia ponderis a foramine, cum frangitur corpus. Pollic.	Pondus frangens Unciar.
Picea - - - 10	- - - - - - 9	- - - - 40.
Quercus - - 10	- - - - - - 8,5.	- - - - 48.
Ulmus - - - 11	- - - - - - 9	- - - - 44.
Abies - - - 11	- - - - - - 9,5.	- - - - 36,5.
Alnus - - - 10	- - - - - - 9,25.	- - - - 48.
Fagus - - - 10	- - - - - - 7	- - - - 56,5.

§. CLXXXVI.

Obſervatio II. Omnia corpora ſolida flexioni ſunt obnoxia, eorumque partes, antequam diſſolvantur, cedunt aliquo intervallo. Gradus ac diverſitas flexionis non modo a viribus potentiæ inflectentis, ſed potiſſimum a diverſa fibrarum conſtitutione pendet. Utcunque autem variæ ſint inflexiones, nullum adhuc deprehenſum eſt abſolutæ rigidum, quod in tenuiora filamenta ſectum non ſenſibiliter flectatur. Vitrum certe quidem ex rigidiſſimis eſt, quorum cognitionem adhuc nacti ſumus; idem tamen in fila tenuina ductum admodum flexile obſervatur, uti plumæ ex vitro confectæ, & tubi capillares probant. In his aliquem tres pedes longum in peripheriam circuli inflexum a ſe eſſe Muſchenbroeckius teſtatur.

Ex æqualitate actionis & reactionis deduximus (§. *XXXI.*) *generale principium ad tenſionem, & compreſſionem corporum elaſticorum, ac proinde etiam ad flexionem*

Digitized by Google

nem eorundem pertinens; facta enim inflexione regulæ elasticæ partes seu fibræ superiores tenduntur: inferiores comprimuntur, ut in convexa superficie particulæ a se recedant, in concava ad se accedant. Generale illud principium his verbis enunciatur: Elater corporum pro ratione virium extranearum tenditur, & comprimitur, quamdiu corpus elasticum tendi, aut comprimi potest; sive resistentia & vis elateris corporum tensorum & compressorum æquatur vi tendenti, & comprimenti, quamdiu corpus elasticum ulteriorem compressionem admittit; sunt enim & tensionis & compressionis certi in omnibus corporibus limites, ad quos si ea pervenerit, partes amplius cedere non sentiuntur, quæcunque vis maior corpori inferatur; ipse aer, qui maxime comprimi potest, posteaquam eos limites attigit, perinde ac marmor durissimum resistit. Atque hoc casu resistentia non tam elateri, quam corporum impenetrabilitati, aut vi cohærentiæ adscribenda est, uti fit in rigidis corporibus: donec cohærentiæ vis a potentia agente superetur, ac nexus corporum dissolvatur. Ex eo, quod indicavimus principio concluditur primo: Si idem corpus elasticum æqualiter tenditur, comprimitur, flectitur, etiam vis tendens, comprimens, flectens æqualis est. Secundo: quo magis fibræ corporum extrahuntur, vel producuntur, eo magis resistunt potentiæ agenti; Nec tamen productiones, seu elongationes corporum tensorum, aut contractiones compressorum vi tendenti, aut comprimenti proportionales sunt, ita, ut si hæc dupla vel tripla sit, etiam corpus duplo vel triplo magis producatur, vel contrahatur, quam vi simpla; in plurimis enim corporibus, cum tenduntur, observamus productiones primo satis magnas esse; dein duplicata vi tendente productiones fieri minores, triplicata pariter minores, ut adeo productiones fibrarum continuo decrescant; quod capto experimento Bernullius observavit; sumta enim fuit chorda ex intestinis animalium tres pedes longa, cuius extremæ parti successive appensa sunt libræ 2, 4, 6, 8. Elongationes chordarum fuerunt 9, 17, 23, 27 lin. Atqui si eæ ponderi tendenti fuissent proportionales, futuræ erant ut 9, 18, 27, 36. Verum quamcunque elongationes corporum ad vires tendentes rationem habeant; id tamen ex indicato supra principio manifestum est, quod vis, & resi-

stentia elateris, quamdiu corpus tendi, aut comprimi potest, semper vi tendenti, & comprimenti par sit, & si in eodem corpore tensio, vel compressio, aut inflexio maior est, vis quoque tendens, comprimens, aut inflectens maior esse debet.

§. CLXXXVII.

Hypothesis. Sit F. III. T. IV. vectis sive regula flexilis I K A a æquabilis figuræ & elasticitatis per omnes partes, eaque concipiatur divisa in partes æquales octo, ac quævis eiusmodi pars concipiatur habere 10 particulas itidem æquales ut ab A usque ad E 40 particulæ, & ab A usque ad I sint 80. Hæc regula infra aliam horizontalem I a immobiliter sit fixa, aut infixa muro. Dein successive in diversis a fulcro I K distantiis adplicentur pondera, nempe P in distantia simpla in e, & pondus p dimidium prioris in *a* distantia dupla; ac observetur

Primo quomodo tota regula inferior flectatur, & a superiore deprimatur; quod ostendunt intervalla A a, B β inter regulam superiorem, & inferiorem intercepta.

Secundo quomodo singulæ partes 1. 2, 3 &c. a puncto suspensionis ponderum versus fulcrum incurventur, sive quantam amissa figura rectilinea superius convexitatem, inferius cavitatem acquirant; idque colligi potest ex plano quodam ad partem convexam adplicato; angulus enim mixtilineus maior vel minor inter planum, & partem convexam interceptus maiorem vel minorem partium curvaturam indicat. Quantitas flexionis ad ipsum fulcrum I K ope tenuis cunei in angulum mixtilineum ad fulcrum immissi explorari potest; quamquam hæ observationes non nisi crassiore quodam modo hac quidem methodo fieri possunt, uti fere in aliis contingit experimentis plurimis; sola enim mathesis adcurationem habet. His constitutis & observatis vera erunt sequentia.

I. *Pondus normaliter adpensum vim duplicem exerit in singulas particulas vectis, normalem, & parallelam ad eundem vectem.* Nam *primo*, pondus normaliter adpen-

Digitized by Google

pensum non modo primam particulam, cui adplicatum est, sed omnes reliquas usque ad fulcrum urget verticaliter deorsum tota sua gravitate. Ac constat ex theoria aequilibrii, quod in fulcro cuiusvis vectis heterodromi sentiatur vis aequalis summae ponderum normaliter adplicatorum. *Secundo* observamus, regulam seu vectem inflecti a pondere, & incurvari, id est, partes superiores tendi, inferiores comprimi; quae est ipsissima tractio particularum vecti parallela; cuius ratio est haec: dum pondus p particulam primam normaliter deorsum urget, eam necessario simul determinat, vel urget ad divulsionem a proxima particula, hoc est, pondus p primam particulam determinat ad gyrationem circa punctum b tanquam axem; cum autem haec gyratio a nexu B b impediatur, necessario hic idem nexus, & cum eo secunda particula trahitur directione vecti parallela, eo fere modo, quo in quovis vecte rectangulari (F. IV. T. IV.) dum brachium horizontale urgetur deorsum, alterum brachium verticale A C urgetur ad gyrationem circa axem C, cuius prima directio est A d sive tangens arcus, quem punctum A gyrando describit; quae quidem tangens cum sit normalis ad brachium vel radium A C, eo ipso ad brachium C B & horizontem parallela erit. Haec quidem tractio, seu vis parallela, cum tendat ad dissolvendum nexum, adposite *vis in nexum* adpellatur, estque *proportionalis* ponderi p appenso, ita ut si aliud pondus duplum, triplum, vel in quacunque serie multiplum, vel submultiplum adhibeatur, pariter tractio parallela, seu vis in nexum dupla tripla, vel quomodocunque multipla, vel submultipla existeret.

II. *Vires in nexum particularum a puncto suspensionis usque ad fulcrum crescunt continuo, sive per singula puncta distantiae, & uniformiter, id est, per singula puncta aequaliter dependenter a pondere appenso.* Nam ex observationibus curvatura singularum partium AB, B C, C D &c. in quas regula divisa concipitur, a puncto suspensionis usque ad fulcrum continuo fit maior, ita ut dum primae partes A B, B C parum admodum a linea recta recedunt, interiores F G, G H magis convexae sint; consequenter vires quoque incurvantes, seu inflectentes, quas adpellamus vires in nexum, a puncto su-

Digitized by Google

ſpenſionis verſus fulcrum creſcant, neceſſe eſt (uti ex Schol. §. CLXXXVI. colligitur. Ratio huius incrementi videtur eſſe eiusmodi; quemadmodum in prima particula ex vi normali oritur vis parallela; ita idem fit in ſingulis particulis reliquis; quare in ſecunda particula, quæ a prima iam trahitur vi parallela, & quæ præterea ſuſtinet actionem normalem ponderis, ex qua nova vis parallela priori æqualis oritur, dabitur vis parallela dupla prioris. Hæc ſecunda particula, eadem vi, qua ipſa trahitur, nempe dupla trahit tertiam; cum autem hæc tertia particula æque, ac priores, ſuſtineat actionem normalem ponderis; idcirco habebit vim triplam, quarta quadruplam, & ſic deinceps in quacunque particularum ſerie, ſi nexus non ſolvitur. Hæc incrementi ratio ut manifeſtior evadat, ſint (F. IV. T. IV.) bini vectes rectangulares A C B, a c b ſintque brachiis horizontalibus appenſa æqualia pondera P, & p. Inprimis punctum A ob pondus P trahitur horizontaliter directione tangentis A d. Si inter ſuprema puncta A & a brachiorum verticalium intercedat nexus, eadem tractio horizontalis dependenter a pondere P erit in puncto utroque A & a. Si dein alteri brachio horizontali c b pondus p priori æquale adpenditur, in puncto ſupremo a vectis ſecundi dabitur vis ſeu tractio horizontalis dupla, cui ſuſtinendæ requiritur pondus Q æquipollens ponderibus P & p ſimul, ſi brachia verticalia A C, a c eiusdem longitudinis ſint ac horizontalia C B, c b. Sic in vecte propagatur tractio parallela, & vis normalis ponderis, quam ſecunda quoque particula (uti omnes reliquæ usque ad fulcrum) ſentit, idem præſtat, ac pondus p in poſito caſu adplicatum ſecundo vecti rectangulari a c b.

§. CLXXXVIII.

Corollarium I. Quia vis parallela a puncto ſuſpenſionis usque ad fulcrum creſcit uniformiter ſecundum numeros ordine naturali aſcendentes 1, 2, 3, &c. idcirco ad ipſum fulcrum ea vis eſt ut factum ex vi, quæ erit in primum nexum, in diſtantiam ponderis a fulcro. Ac ſi (F. V. T. IV.) vectis vel regula I K A a ponitur continuari ultra fulcrum I K, & alteri extremo B adplicaplicari pondus expressum linea PM, quod sit reciproce ut huius distantia D ab hypomochlio ad distantiam d alterius ponderis expressi per rectam p N; erit vis in nexum communem IK ad fulcrum dependenter ab utroque pondere æqualis. Sit enim vis a pondere P in nexum primæ particulæ, in quam agit $= V$; erit vis in nexum communem IK dependenter ab eodem pondere $P = VD$. Sit dein vis a pondere p in nexum primæ particulæ, ex qua pendet, $= u$; erit vis in nexum communem ad fulcrum $IK = ud$. Dico; si pondera & distantiæ reciprocant, hasce vires VD, & ud in nexum communem ad fulcrum IK esse æquales; cum enim vires V, & u in primum nexum particularum, ex quibus P & p suspenduntur, cæteris manentibus iisdem, sint proportionales ipsis ponderibus (§. CLXXXVII. n. I.) erit $V : u = P : p = d : D$, quia pondera & distantiæ reciprocant; igitur erit $VD : ud = PD : pd$; est autem $PD = pd$; consequenter etiam $VD = ud$.

Parum adcurate de hac re loquuntur iidem ipsi, qui vires, æquales in communem nexum ad fulcrum pro genuina caussa æquilibrii statuunt. Aiunt enim: eadem vi, qua pondus deorsum agit, urgetur primus nexus in B. F. III. T. IV. id vero non nisi sub duplici hypothesi simul concurrente verum esse potest. 1. Si prima particula cum secunda duntaxat connecteretur in supremo puncto B, non vero per totam altitudinem Bb. 2. Si altitudo regulæ Bb æqualis ponitur assumtæ longitudini ba. Ostendimus autem supra, quomodo in determinanda vi in nexum ratio altitudinis, imo & latitudinis habenda sit. Si vis in primum nexum æquaret gravitatem absolutam ponderis, eaque dein pro ratione distantiæ usque ad fulcrum cresceret, celeriter rumperentur omnes regulæ ad eiusmodi experimenta adhibitæ; quapropter vires in nexum non æquales ponderibus, sed dum cætera omnia sunt constantia, proportionales ostendimus; idem tamen, quod hi Auctores volunt, eruimus; nempe æqualitatem virium in nexum communem ad fulcrum in hypothesi ponderum cum distantiis reciprocantium.

§. CLXXXIX.

§. CLXXXIX.

Corollarium II. Si regula aut vectis aucto pondere rumpitur (quia vis cohærentiæ infinita non est) diffractio contingit circa fulcrum, vel ad oram foraminis, qua muro immittitur ; etsi enim vis cohærentiæ per omnes particularum nexus ponatur eadem ; tamen vis in nexum ad diffractionem urgens crescit pro ratione distantiarum a puncto suspensionis ; quare diffractio fiet, ubi maxima distantia, maximaque vis est, nempe ad fulcrum, vel oram foraminis. Id quoque animadversione dignum, corpora, quorum resistentia absoluta vel respectiva contrariis potentiis succumbit, diversas festucas formare, in primis ligna quædam admodum longas & acutas, alia breviores, magisque obtusas, alia pene nullas habent; id quod notandum est pro interno pariete navium bellicarum, in quibus fervente prælio plures vulnerantur a festucis ligni milites, quam ab ipsis globis tormentariis, ut Musschenbroeckius ait; lignum, quod absque festucis rumpitur, huic incommodo medetur.

Inflexiones corporum homogeneorum sunt in ratione composita ex directa ponderum appensorum, & reciproca triplicata altitudinum, ac simplici latitudinum, & quamvis Bernoullius primus observarit: non omnes fibras per totam altitudinem trabium tendi, sed multas inferiores comprimi; tamen id assignatæ legi non obstat; quoniam in corporibus homogeneis ea altitudo, per quam fibræ tenduntur, ad totam trabium altitudinem, æqualem rationem servat, quia corpora homogenea similes flexiones habent a simili partium, ac nexuum flexione pendentes; quapropter ea lex resistentiæ respectivæ, quam §. CLXXXI. exposuimus, integra manet, cum præsertim experientia ostendat, resistentiam respectivam in ratione reciproca duplicata altitudinum esse. Multum commodi ista res habet; imminuta enim mole trabium sat firmitatis obtinetur ex iusta earundem altitudine. Certe Parentius l' Hist. de l' Acad. Roy. 1708 *integram tabellam dedit, ex qua adparet, quomodo diminuendo quantitatem ligni, & augendo altitudinem augeatur robur trabium. Est tamen proportio quædam altitudinis, & latitudinis retinenda, ne hac supra modum imminuta trabs*

vi

Digitized by Google

vi laterali rumpatur, eiusque partes mediæ ad latera extrudantur. Fuere, qui rationem resistentiæ absolutæ & respectivæ tum per experimenta quædam tum per calculos determinare conati sunt, eamque statuerunt ut 3. 1. vel ut 4: 1. Negari non potest, inquit Musschenbroeckius, has rationes aliquando obtinere; sed reperitur etiam ratio ut 18: 1. & omnes intermediæ rationes inter hanc, & 3: 1. addit: " Si Philosophi, antequam operam huic doctrinæ „ navassent, prius plurima tentamina adcurate instituissent, „ multis pepercissent laboribus, neque unquam universali „ regulæ inveniendæ incubuissent; quot enim fere diversa „ corpora dantur, totidem diversæ proportiones inter co- „ hærentiam absolutam, & respectivam deprehenduntur. „ Nec difficile est rationem invenire, ob quam multo maior absoluta, quam respectiva resistentia esse debeat; crescunt enim vires ponderum normaliter adplicatorum in nexum: fibræ per altitudinem inæqualiter tenduntur, magis superiores, quam inferiores; infimæ omnino comprimuntur; cumque in supremo nexu quædam ruptura facta est, facile inferiores fibræ scinduntur. At si actio ponderum duntaxat parallela est, uti in resistentia absoluta, eorum vis per omnes fibras æqualiter diffunditur, & in omnibus sectionibus eadem est, nec ullum incrementum habet. Sed plurimi Philosophi prætermissa hac de resistentia corporum tractatione duntaxat caussam cohærentiæ quærunt, eandem, ut Musschenbroeckius animadvertit, pro libitu fingendo, orbique obtrudendo, ut ex ea phænomena, quæ in solidorum cohærentia occurrunt, explicent; hos, inquit, sicco pede transimus, cum nihil boni, stabilisve nostræ sententiæ attulerint, sed eam potius inutilibus opinionibus aggravaverint. Sine dubio de resistentia corporum, & usu atque adplicatione theoriæ multa commemorari præterea possunt, quæ ob angustias operis prætermittenda sunt. Quapropter non nisi generales quasdam animadversiones subiiciemus de firmitate corporum, ut nemo non videat, quam late experientiæ, & observationum campus pateat.

Digitized by Google

§. CXC.

Observationes de Firmitate Corporum.

I. Vulgaris quondam opinio erat, funes ex funiculis intortis, ac convolutis compositos esse fortiores, & maiori ponderi ferendo pares, quam si totidem funiculi inter se paralleli, & non intorti adhibeantur. Contrarium primus, quod scio, docuit Mersennus L. 3 Harmonices Prop. 26. postea experientissimi viri Reaumurius, & Musschenbroeckius institutis experimentis evicerunt, funes intorsione funiculorum debiliores fieri, atque ille quatuor contorsit fila, quorum primum 9 tt, alterum 7, tertium & quartum $7\frac{1}{2}$ seorsim ferendis paria erant; quare coniunctim 31 libr. sustinere debebant; sed, posteaquam contorta sunt, appensis 21 $\frac{1}{2}$ libris frangebantur. Minuitur igitur contorsione firmitas funiculorum; atque id, ni fallor, ex iis, quae de resistentia corporum a nobis dicta sunt, comprobari potest; nam spectata intorsione perspicuum fit, partes funiculum intortum componentes inaequaliter tendi, plus exteriores, minus interiores, eo fere modo, quo nexus superiores trabium horizontaliter positarum magis tenduntur, quam inferiores; quocirca inaequalis est filamentorum resistentia, & vis externa partes iam antea tensas citius dissolvit, iisque solutis paulatim totum funem rumpit; cum igitur resistentia respectiva omnium corporum multo minor sit, quam absoluta; nihil mirum videri potest, idem in funibus observari, qui ex fibris tenuioribus perinde, ut reliqua corpora componuntur; & quamvis differentia tensionum in partibus singulorum funiculorum haud magna sit; crescit tamen eadem ex summa omnium, & in fune crassiore ex multis funiculis composito valde augetur. Errant igitur, qui fila valde contorqueri iubent, ut funis validior fiat. Sic enim rigidior redditur, non item firmior; quia ipsa contorsione iam debilitatur, & aliquando, si crassior sit, etiam rumpitur. Experientiae in funibus homogeneae materiae captae a ratione crassitierum magnopere recedunt; quod tum contorsioni, tum diversitati filamentorum lini aut cannabis adscribendum est. Sed, inquiunt: intorsione filamentorum

torum

torum crescit latitudo & crassities funis, quemadmodum e contrario longitudo funis a longitudine funiculorum deficit. Hinc putant, funiculos contortos plus firmitatis habere; sed nempe debilitationem ex intorsione ortam maiorem esse illo incremento, quod ex maiore latitudine, vel crassitie accedit, experientia, & ratio supra indicata probant. Musschenbroeckius loco funium adhiberi fasciolas vult, in quibus prima fila inter se recta & parallela manent, aut, cum fasciæ omni usui haud inserviant ob latitudinem, & planitiem, funiculos ita contexendos iudicat, quo modo tæniæ solent, vel ut capilli texuntur, ut nempe funiculis nulla vis inferatur ob contorsionem. De usu funium, qui cylindris aut trochleis circumvolvuntur, observat Cl. Amontons, eorum resistentiam, ac difficultatem crescere, quo funis rigidior est, & maiore tractus pondere, quo crassior, quo minor peripheria cylindri, cui circumvolvitur, & quo celerius volvendus est; cumque is totam resistentiam calculo subiecisset, invenit, quod potentia, quæ, ut onus 3000 libr. ope trochleæ mobilis attolleret, illius subdupla nempe =1500 tt esse deberet, computata funis resistentia ipsum onus excederet, & libras 3942 æquaret.

II. *Ex lignis* firmiora censentur, quæ minorem medullam ferunt, & quæ graviora sunt; id quod commodum est explorandæ firmitati, cum minora frusta æqualia facile ponderari possint. Lignum, quod brevi tempore in truncum latum excrescit, & cuius circuli annui maiores sunt, est solidum, ac durabile: quod plurium annorum decursu intus lente in trabe corruptum fuit, facile putrescit. Ligna, quæ crescunt in loco edito aeris iniuriis multum exposito solidiora sunt, & sicciora, quam quæ crescunt in locis humilibus, & palustribus. Ligna inculta præstant domesticis, sterilia fertilibus. Ex domesticis illa præferuntur, quæ tardius fructum ferunt, eumque acerbiorem. In quibusdam speciebus fibræ transversales multo debiliores, quam longitudinales observantur, præsertim si istæ in lineas satis rectas excrescunt; hinc dum eiusmodi ligna adpensis ponderibus gravantur, sæpe cylinder, vel parallelopipedum interius a lateribus separatur, & instar gladii ex vagi-

vagina extrahitur; id quod Musschenbroeckius expertus est in ligno alni, piceæ, & fraxini. Diversam fibrarum constitutionem in speciebus diversis indicant discrepantes festucæ, quas fracta relinquunt; ut supra adnotavi. Crescunt arbores certo tempore; deinde consistunt aliquamdiu, postea decrescunt; ac dum crescunt, trunci incrementum capiunt singulis annis, dum corticis interior tunica ad lignum trunci accedit, & accrescit; hinc non potest esse truncus per totam substantiam æque firmus; meditullium maxime annosum est; sequitur ætate pars proxima; novissima est, quæ cortici adhæret. Tenerum, & molle est lignum, quod novum, utpote parum compressum, & aquosis plenum succis; durius est, quod annosius, quia comprimitur circumquaque a ligno ambiente, & quia plus resinæ collegit; id quod experimenta a Musschenbroeckio, & Parentio instituta probant. Vulgo creditur, lignum, quo recentius, eo magis flexile esse, & quod annosius, idem esse fragilius, id verum in ramis: in trunci substantia falsum reperitur, quia oleum, quo meditullium trunci copiosius gaudet, quam partes cortici proximæ, facit, ut meditullium flexibilius sit. Solet autem idem meditullium primo corrumpi, cortex diutissime perstare; hinc meditullium eo casu haud firmissimum est, imo aliquando debilissimum; generatim vero experimenta cohærentiæ in lignis eiusdem arboris instituta docent, firmissimum esse meditullium, debilissimum cortici proximum, in intermediis partibus inæqualitas reperitur, quæ a diverso modo pendet, quo partes concreverunt, a calore, frigore, humiditate, & siccitate æstatis; ob quas aliasque caussas ligna etiam homogenea, sive eiusdem speciei magnopere sæpe discrepant, uti in solo magis, minusve aquoso, & paludoso, oleoso, salso, in regione calidiore, aut frigidiore adolescunt. De partibus eiusdem ligni præterea adnotandum est, lignum densius, sive circulo in trunco transverse secto propiores inter se esse ea parte, qua boream spectat, quam qua austrum. Partes terræ viciniores plus ponderant, magisque resistunt, quam reliquæ; nodi, rami & fibræ abruptæ firmitatem minuunt. De diversitate lignorum, quæ in diversis operum, & ædificio-

orum

rum partibus maxime usui sunt, Vid. Rieger Arch. civ. §. 168. item Bellidor Scient. Ing.

III. *Inter saxa* solidius reperitur, quod venarum plexus acutiores habet: facile finditur, quod in medio venam rubram, & velut putridam nutrit. Saxum molle recens effossum, si libero aeri exponitur, diutius durat: idem in aqua, frigore, vel calore ingente dissilit. Hinc saxa ex lapicidinis eruta per æstatem aeri exposita relinquuntur; ac quod aeris iniuriis resistant, indicio est, si in loco patente posita per biennium durent, sibique constent: humori censentur resistere ea, quorum pondus ab affusa aqua non augetur &c.

CAPUT IX.

De Frictione Corporum.

Vi theoriæ machinarum potentiæ paullulum auctæ ultra designatas superius rationes oneri movendo pares sunt; at ob frictionem, quam potentia agens non minus superare, atque ipsum onus debet, eius incrementum haud mediocre, ac multo etiam maius evadit præsertim in prægrandioribus machinis, quam non nulli sibi persuadent. Inde fit, ut magni sæpe errores committantur, ac inutiles sumtus ad construendas novas machinas proiiciantur, quæ omnem exspectationem fallunt non vitio theoriæ, sed quod hæc omnino incompleta transferatur ad usum.

§. CXCI.

Definitio. *Frictio* sive *attritus* est resistentia, quæ ex superficierum mutua adplicatione in motu corporum, & machinarum oritur. Quando nimirum corpus quoddam super aliud movetur, ac utriusque superficies quadam parte se contingunt; resistentiam experimur cæteris paribus eo maiorem, quo maior est superficierum aspe-

asperitas, sive quo minus corpora, qua parte se contingunt, polita sunt.

§. CXCII.

Observatio. Omnia corpora, utcunque polita oculis vel etiam tactui videantur, superficies inæquales & asperas, id est, partes alias prominentes, alias dehiscentes, velut colliculos quosdam, & foveolas seu cavernulas habent; hinc dum unum corpus in superficie alterius movetur, necesse est, ut prominentiæ unius in alterius cavitates se insinuent, haud secus ac si dentes rotæ unius dentibus alterius, vel scopa scopæ committatur. Hinc motus continuari nequit, nisi mobile cum suis partibus aliquantum attollatur, aut partes prominentes inflectantur, vel abradantur, aut utrumque fiat. Hæc superficierum asperitas minui potest, tolli non potest vel ob ipsam corporum porositatem, qua plurimis meatibus undique pertusa sunt, & partes solidas in vacuo diffusas atque extantes habent. Igitur frictioni quævis corpora naturaliter subiecta sunt, multasque idcirco subeunt mutationes. Vestes, ac supellectilis omne genus, instrumenta mechanica, corium, asseres, ipsa marmora, ac gemmæ frictione paulatim deteruntur: acies cultrorum, novacularum, pennarum identidem reparandæ sunt; cumque ferri in vita civili maximus sit usus, mirum haud est, eius particulas quaquaversus dispergi, & in plurimis corporibus, vel cineribus eorundem per analysin chymicam reperiri. Luti colorem nigrum, qui in viis tritis observatur, deperditis ferri particulis adscribunt plurimi. Ex attritu variæ striæ corporum, tum pulvis oritur, quæque sunt generis istius sexcenta.

§. CXCIII.

Definitio II. Motus corporis super aliud vel est *radens*, cum eædem semper mobilis partes alterius superficiei adplicantur, ut si trabs terræ incumbens, aut tra-

traha per nivem, vel glaciem movetur: vel eſt motus *volvens*, cum aliæ continuo, atque aliæ ſuperficiei mobilis partes alteri corpori adplicantur, uti cum globus vel rota per ſolum volvitur, & motus gyrationis cum translativo iungitur. Quando rotæ circa axem non ea celeritate aguntur, quam celeritas translationis poſcit, eædem partim volvuntur, partim raduntur, ac motus ex utroque mixtus oritur. Frictio, quæ motui radenti opponitur, dicitur *primæ ſpeciei*: quæ volventi, *ſecundæ ſpeciei.* In omni autem motu unius corporis ſuper aliud ea inſtar reſiſtentiæ, ſeu potentiæ motui contrariæ ſpectanda eſt; reſiſtit enim ſeparationi corporum, quorum ſuperficies contiguæ ſunt, & inter ſe ita committuntur, ut ſeparatio directione ad ſuperficies parallela difficilis evadat.

Frictio differt a pondere corporum; nam horum elevationi gravitas, non frictio per ſeſe, contra motui horizontali frictio, non gravitas reſiſtit. Siquod corpus per aliud molle incedat, idque ſecare debeat, reſiſtentia quædam oritur, quæ a frictione non nihil diverſa eſt, ad eandem tamen ſæpe referri ſolet. Quæritur, quomodo frictio ob adpreſſionem unius corporis ad aliud, ob ſuperficies, ac celeritatem motus creſcat; de quibus deinceps agendum eſt, quantum in re perdifficili, necdum ſatis tractabili fieri poteſt.

§. CXCIV.

Hypotheſis (F. VI. T. IV.) collocetur primo corpus quoddam, ceu cubus Q baſeos politæ in plano horizontali A B pariter polito, quantum ſenſibus adparet. Dein concipiatur hoc planum elevari in a, & inclinari ad horizontem eousque, donec corpus ſuper illud gliſcere incipiat, & deſcenſum proximum minitetur, ita ut aucto paullulum angulo inclinationis A B a, quem in iſta hypotheſi vocant *angulum quietis*, corpus reipſa deſcenderet. His poſitis dico

I. *Quocunque in plano polito statuatur corpus, eo maior est frictio, quo maior est pressio eiusdem in planum, sive in aliud corpus.* Cum enim ob asperitatem superficierum, illarum quoque, quae magnopere politae videntur, partes prominentes corporis unius immergantur in cavitates alterius, atque ut motus haberi possit, eaedem frangi, flecti, aut potius e cavitatibus iterum eximi debeant, vi opus est, ut vincatur pressio corporis mobilis in alterum, quae vis, ut patet, eo maior esse debet, quo maior est pressio. Quapropter frictio, qua superficies separationi resistunt, crescit pressione crescente.

Quoniam potentia motum gignens, & frictionem in motu vincens non directe opposita est pressioni, uti, siquod corpus grave directione horizontali, vel obliqua trahitur; idcirco vires potentiae, per quas frictionem vincit, non aequales ipsi pressioni, sed quodam modo proportionales esse debent. Amontonus, Parentius, Hirius, Bellidorus in plurimis casibus saepius occurrentibus, quando superficies corporum non admodum asperae, & politurae incapaces sunt, repererunt frictionem pressioni proportionalem. Ea pressio non modo a gravitate absoluta, siquod corpus in plano horizontali trahitur, vel a vi normali aut pressiva in planum inclinatum; sed ab aliis quoque caussis, & potentiis, ceu ab elasticitate saepe provenit.

§. CXCV.

II. *Si pressio eadem manet, frictio non multum variari potest, quaecunque ponatur maior vel minor corporis, quod frictionem sentit, superficies.* Concipiatur primo superficies cubi divisa in partes aequales 100, ac pressio cuiusvis partis ut 1. Igitur elevari debebunt 100 partes per summam totidem virium, quotquot iis partibus respondent. Dein concipiatur dimidius cubus alteri dimidio imponi; restabunt in superficie partes 50, quarum singulae ob duplum pondus premuntur vi ut 2; patet, quod per se eadem futura sit frictio utroque casu-su; sive enim 100 ponduscula elevanda sint e suis cavitatibus, quorum singulorum pressio est ut 1, sive ponduscula 50, quorum pressio est, ut 2; eadem adhibenda vis erit. Concipiatur frictio totalis eo maior, quo plures sunt partes prementes, sive quo maior est superficies, & quo vis pressiva in singulis partibus maior est; erit frictio totalis ut factum ex pressione singularum in summam omnium, sive in superficiem. Sint hæ pressiones singularum partium in primo casu a nobis posito P, in altero p, superficies prima S, altera s; frictiones F, & f; erit $F : f = PS : ps$. Est autem in posito casu $P : p = s : S$; consequenter $PS = ps$; igitur $F = f$, sive frictiones totales eædem.

Si manente eadem vi pressionis corpora secundum maiores superficies sibi adplicantur, sive pluribus partibus se contingunt, frictio etiam in ratione superficierum quodam modo augetur; ponatur Cubus Q gravitatis expers, eiusque tota pressio in planum A B oriri ab imposito corpore Z; inter quod, & cubum Q planum O S interiacet; perspicuum est, quod corpus impositum Z eadem vi planum O S, cubum Q, & planum A B premat; si iam planis O S, & A B immotis cubus Q extrahendus foret a potentia D; hæc non modo resistentiam frictionis, quam basis inferior cubi a plano A B patitur, sed etiam illam resistentiam, quam basis superior patitur a plano O S, superare debet; cum igitur pressio in utrumque planum sit eadem, necessario aucta superficie, qua fit attritus, vis potentiæ eundem superantis augenda est.

§. CXCVI.

III. *Si planum A B elevari concipitur in a, & inclinari sub angulo quietis, sive donec corpus proximum lapsui fiat, frictio est ad pressionem, ut altitudo plani ad basin, sive ut tangens anguli quietis ad radium.* Denotet enim Q n vim pressivam in planum, Q m relativam seu plano parallelam; patet in eo situ vim relativam Q m æqualem esse frictioni, qua corpus a motu per pla-

Digitized by Google

num unice cohibetur; est igitur frictio ad pressionem, ut Qm : Qn sive Aa : AB, ut altitudo plani ad basin, sive sumta recta AB pro sinu toto, ut tangens anguli quietis ABa ad radium. Bellidorus institutis plurimis experimentis angulum quietis reperit = 18°, 20′, cuius tangens ad radium est ut 33136 : 1,00000, proxime ut 1 : 3. Igitur hoc quidem modo frictio æqualis est tertiæ parti pressionis; ac si corpus in plano horizontali movetur, cum pressio par sit ponderi, frictio æquabit tertiam partem ponderis.

Alii paullo alium repererunt angulum quietis; Parentius 19°, 17′. Bulfingerus inter 12°, & 15°. Unde alia provenit quantitas frictionis. Amontonus omnem frictionem æquari $\frac{7}{20}$ ponderis appressi putat. Sed generalis regula adcurate statui non potest, quia in corporibus etiam homogeneis maxime discrepat superficierum constitutio, partium prominentium, vel dehiscentium figura, rigor, elasticitas, cohærentia pro varia corporum vetustate, siccitate, humiditate. In vulgarium machinarum usu, ait Caillius, tuto sumi potest, frictiones præcise pressionibus esse proportionales, saltem si motus in similibus superficiebus fieri contingat: præterea absque notabilis erroris periculo generatim cum Bellidoro in praxi mechanica statui potest, frictionem æquare tertiam partem pressionis directæ in superficiem, quæ frictionem subit. Certe experimenta minorem potius, quam maiorem frictionem exhibent.

§. CXCVII.

Corollarium I. Si pondus per planum inclinatum, ceu per machinam elevandum est, vi relativæ ponderis, quæ superanda est, addi debet frictio; ac si angulus inclinationis plani minuitur, ut vis relativa ad absolutam habeat rationem minorem, e contrario vis pressiva, & proin etiam frictio maiorem rationem habebit ad vim eandem relativam. Atque ob hanc caussam, quo maior est frictio, eo magis directio potentiæ a directione motus elevanda est. Hinc Dan. Bernoullius (Act. Acad. Petrop. 1768.) ait, si via silicata sicca onera trahenda sunt, funes ad angulum 26°. 34′ dirigendos esse;

se; addit: hanc regulam aurigas nostros non male observare vidi. Universe utiliter adhibetur obliquitas potentiæ, quando resistentia directa frictionis notabilem ponderis promovendi partem efficit, eaque a sublevatione ponderis citra aliud incommodum notabiliter imminuitur.

§. CXCVIII.

Corollarium II. Potentia movens quovis progressu motus sui frictionem superare cogitur; quo celerius igitur movetur onus, eo sæpius intra datum tempus vis opposita frictioni adhibenda est. Hinc frictionem pro ratione celeritatis crescere autumabant non nulli. At enim, quo maiore celeritate fertur corpus, eo minor intricatio partium utriusque superficiei fieri potest; quia partes prominentes in cavitates immergi non nisi intra continuum tempus possunt. Ob hanc caussam corporum celeritatem nihil momenti habere in frictione quibusdam videbatur. Dan. Bernoullius Act. Acad. Petrop. An. 1768 ait: *Corpora super plano quiescentia non aliter dici possunt frictionem habere, quam virtualiter; statim vero, ac moventur, subito totam suam frictionem manifestant, sive lentiori, sive celeriori motu ferantur; nec enim quidquam velocitates ad frictionem sive augendam sive diminuendam conferre experimentis innotuit.* Mirum id videbitur non nullis, & observationibus obviis repugnans; certe equus ad superandam currus frictionem longe maiorem vim in prima illius ad motum determinatione, quam curru in motu iam constituto adhibere cogitur; similiter in campana ad primas oscillationes cienda maiore vi opus est, quam easdem continuandas. R. Ex his conficitur, frictionem a corpore iam moto facilius superari: non item minorem esse frictionem; cum enim corpora velocitatem impressam vi inertiæ conservent, exclusa frictione sine ulla determinatione nova perseverarent in statu motus: ea præsente motum suum paulatim minuunt per sese, ac denique amittunt; nova autem potentiæ actione motum iam inchoatum, conservatumque quadam parte per vim inertiæ facilius retinent.

At enim perdifficile est, rem ad apicem examinare.

Digitized by Google

Illud in machinarum usu, & theoriæ adplicatione curandum, ut maximæ, quæ in machinarum motu occurrere potest, resistentiæ adcommodetur potentia; secus enim fieri potest, ut ea oneri aliquando succumbat. Illud etiam observatum est, inter superficies corporum heterogeneorum cæteris paribus minorem esse affrictum, quam inter homogenea, quod omnes artifices iam dudum compererunt. Chalybs minorem attritum in orichalco, plumbo & cupro habet, quam in chalybe. Ligni quercini minor est frictio, si cum ulmeo committatur, quam si quercinum cum quercino, ulmeum cum ulmeo. Remedia frictionum physica sunt olea, & pinguedines superficiebus metallorum inuncta; nam superficies reddunt magis æquabiles: cavitates implent; partium intricationem, ac mutuos ingressus, atque etiam abrasionem minuunt; calori quoque, ob quem extenduntur superficies, seseque arctius stringunt, medentur: ligna inunguntur sapone. Mechanice imminuitur frictio attollendo potentiæ directionem, quodque præcipuum est, motum rasionis vertendo in volutationem; in quem finem homines rotas subiecerunt curribus; ac sæpe rotæ, vel cylindri, vel globi non adfiguntur oneri movendo, sed subiiciuntur duntaxat; quo facto etiam frictio circa axem rotæ cessat, atque onus celerius provehi potest. Non nullæ sunt frictionum utilitates, uti in limis, lapidibus molaribus &c. patet. Currum motus rapidos in plano declivi impediunt, præsertim si rotæ catena ferrea stringuntur, ut motus volvens data opera in radentem vertatur. Ob easdem tutius gressum figunt animalia, lineamque directionis facilius intra basin conservant, vel reducunt, uti ob similem rationem muscæ, aliaque insecta per vitra etiam politissima deorsum versa obambulant, uncos, quos habent, pedibus asperitatibus eorum corporum infigentia.

Scholion Generale.

I. Disceptationem de ultima, ac genuina caussa æquilibrii in vecte in hoc Scholion conieci, neque enim ea, ut a plurimis agitari solet, momenti cuiusdam videtur esse, præsertim si illa in longum protracta res pulcherrimæ ad staticem pertinentes propterea negligendæ sunt. Nec vero eadem adcurate tractari potest, nisi plurima ex iis, quæ hac sectione exposuimus antea

sint

fint perfpecta. In ea conftanter opinione fum, nullam ulteriorem æquilibrii in vecte cauffam ftatui poffe, ac debere, nifi oppofitionem, atque æqualitatem virium potentiæ cuiusdam tertiæ cum vi compofita potentiarum agentium. Hæc quidem cauffa & vera eft, & phœnomenis explicandis penitus fufficiens: *Vera* eft, cum pofito æquilibrio ea virium oppofitio femper detur, & pofita e contrario virium oppofitione non poffit non dari æquilibrium, uti capite I. oftendimus. Eandem cauffam admodum generalem effe, ipfa theoriæ diductione exhibuimus. Potentiæ ad vectem adplicatæ fine dubio agunt in puncta vectis; fed non illud hic quæritur, qua de cauffa puncta, vel partes minimæ vectis inter fe cohæreant, ac potentiis ad divulfionem urgentibus refiftant, fed cur fyftema potentiarum vecti adplicatarum in æquilibrio fit, id quod ex intenfitate, directione, oppofitione, atque æqualitate virium pendet; etfi igitur de cohæfione nihil ftatuatur hoc loco, tamen vera, & ultima æquilibrii cauffa intelligitur haud fecus, ac pendulorum motus intelligi poteft, quin cauffa indagetur, ob quam puncta fili cohæreant. Vis cohæfionis particularum vectis conditio eft quædam, five requifitum, ut vocant, non autem cauffa, nec mediata, nec immediata æquilibrii. Verum ut nihil diffimulemus, argumenta contraria, quæ digna videbuntur, exponenda funt.

II. Dicunt: *Si pro vecte phyfico linea geometrica fumitur, æquilibrium non nifi ideale proponitur.* R. n. a. Dum lineam pro vecte fumimus, id modo denotamus, actionem potentiarum, earumque æquilibrium a pondere, craffitie, & flexibilitate perticæ aut vectis non pendere; quæ coniuncta funt, & complicata in naturæ inveftigatione, ea analyfi indigent, uti fupra adnotavi.

III. *Fulcrum, quod pro tertia potentia fumitur, duntaxat efficit, ut vectis cum ponderibus non decidat: non autem efficit, ut pondera circa fulcrum immotum gyrari & converti non poffint; atque id in primis explicandum eft, cur pondera, quorum vis abfoluta inæqualis eft, non vertantur circa fulcrum immotum.* R. Vis, qua pondera nituntur vectem convertere circa fulcrum, eadem

Digitized by Google

ipsa est, qua nituntur descendere: si ergo ex fulcro intelligitur, cur descendere nequeant; pariter intelligi debet, cur vectem nequeant convertere; neque enim duos diversos nisus exerunt pondera. Nec vero ad rationem æquilibrii necessarium est, ut obex immobilis quodam loco ponatur, aut præcise in puncto vectis intermedio ponatur; modo vis composita potentiarum agentium æqualis est vi tertiæ potentiæ vectem opposita directione urgentis, æquilibrium habebitur.

IV. *Immoto fulcro pondera circa illud oscillare possunt, uti fit, si alterutrum brachium non nihil attollatur, vel deprimatur; igitur vis ponderum a fulcro non extinguitur.* R. Ut huius oscillationis ratio penitissime intelligatur, in memoriam revocanda sunt, quæ §. CXLIII. de centro motus diximus. Quando pondera, & distantiæ reciprocant, & centrum motus *in ipsa linea iugi* situm est, quovis situ obliquo consistunt pondera sine ulla oscillatione; si *infra lineam iugi* centrum motus deprimitur, tum iugo a situ horizontali dimoto non oscillatio, sed eversio ponderum, ac vectis sequitur; si denique *supra lineam iugi* puncta suspensionis connectentem attollitur id centrum, tum oscillatio fit, quia pondus sublatum auget distantiam a centro motus, ac proin maius momentum habet ob ipsum situm, vi cuius moveri tum quidem non potest, nisi maiore respective celeritate moveatur; quapropter iterum relabitur, ac motu quodam accelerato relabitur, ita ut ultra lineam horizontalem descendat, alterumque attollat. Sed quoniam hoc alterum deinceps distantiam auget, & maius momentum acquirit, prioris motum extinguit, ipsumque relabendo motum accelerat; quo quidem modo, si affrictus & resistentia medii abesset, oscillationes, uti in omni pendulo semper continuarentur, ac mobile perpetuum haberemus. Quamprimum igitur pondera a situ suo dimoventur, ut alterum augeat, alterum minuat distantiam a centro motus, potentia tertia non iam illo vectis puncto est adplicata, a quo desumtæ distantiæ cum ponderibus reciprocant; nihil igitur mirum est, si æquilibrium eo casu deficiat; cum fulcrum instar alterius obicis, non instar tertiæ potentiæ sit.

V.

Digitized by Google

V. *Hæc theoria æquilibrii non differt a viribus respectivis, quas pro caussa æquilibrii plerique olim statuerunt, & multi etiam nunc statuunt.* R. Qui vires respectivas pro caussa æquilibrii habent, ita differunt: si pondera extrema circa fulcrum moverentur, momenta essent æqualia, & opposita; quæ sese mutuo extinguerent: igitur moveri non possunt. In nostra autem theoria non quid futurum esset, sed quid reipsa sit, ostenditur, nempe præsens compositio virium, quas potentiæ agentes exerunt, atque concursus earundem in uno puncto, & oppositio & æqualitas cum tertia potentia. Verbo, nihil in explicando effectu a nobis prætermittitur, quod ratione quadam ad illum concurrit.

VI. *Actio potentiarum, & resistentia fulcri semper æquales sunt, sive potentiæ in æquilibrio sint, sive non sint; quia non potest fulcri resistentia esse maior, vel minor, quam actio potentiarum ob æqualitatem actionis, & reactionis.* R. Æquilibrium non modo æqualitatem virium, sed oppositas earundem directiones præterea poscit. Si potentiarum altera prævalet, fulcrum sine dubio tanta vi resistit, quanta utrinque premitur; sed resistentia non in eo puncto est adplicata, a quo desumtæ distantiæ cum potentiis reciprocant. Quod porro resistentia præcise in hoc puncto adplicari debeat, demonstratur ex eo, quia vis composita potentiarum, & directio tertiæ potentiæ in eadem recta iacere debent; quotiescunque autem in eadem recta iacent, ostendimus, distantias cum potentiis reciprocare; nec sane video, quid ultra requiri a quoquam possit.

VII. *In vecte præter directiones ponderum deorsum, præterea vis & tractio parallela oritur: ergo, cum in explicando quodam effectu omnes vires, quæ concurrunt, spectari debeant, hæc vis parallela prætermitti non potest.* R. d. a. Præter directiones ponderum deorsum oritur vis parallela, si vectis crassitiem quandam, & altitudinem habet c. a. Si simplex linea, eaque rigida ac inflexilis sumitur n. a & c. Si potentiæ ad lineam geometricam concipiuntur adplicatæ, concipi sane potest æquilibrium earundem; sed quænam in tali linea concicipi potest tractio parallela? quæ tensio superiorum partium, & compressio inferiorum? quæ gyratio particularum vectis circa alias velut circa axem? omnia ratiocinia, & experimenta, quæ adferuntur ab iis, qui vim in nexum pro caussa æquilibri statuunt, theoriam vectis rectangularis, adeoque ipsum æquilibrium in vecte supponunt; quemadmodum enim in rectangulari vecte brachium verticale directione horizontali urgetur; sic particulas per altitudinem vectis dispositas instar brachii verticalis sibi repræsentant, quod a vi normali ponderis horizontaliter trahi debeat. Quodnam autem brachium verticale in simplice linea concipient? atqui in ea certe locum habet æquilibrium; igitur tractio parallela ad rationem æquilibrii non pertinet. At enim non nulli ex consideratione vectis rectangularis tractionem parallelam tanta phantasiæ vivacitate arripuerunt, ut vim ponderum normalem concipere non possint, quin illico tractionem illam parallelam sibi repræsentent. Ponatur igitur hæc vis parallela in omni vecte adesse; quid ea in declaranda æquilibrii caussa momenti denique habet? fatentur ipsimet eandem ad fulcrum dependenter ab utroque pondere æqualem esse, & in oppositas plagas tendere; atqui secundum generale Mechanices principium, *si duabus vel pluribus potentiis addantur duæ, quæ æquales sint, & contrariæ, eadem prorsus est potentia æquipollens*: si igitur binis ponderibus directione verticali agentibus addantur binæ vires parallelæ, æquales & oppositæ: illorum vis composita, qua in tertiam potentiam agunt, propterea nihil immutatur, perinde ac si non adessent omnino eæ vires parallelæ; recte igitur in exponenda caussa æquilibrii eæ prætermittuntur, quamcunque vectis crassitiem, & altitudinem habeat, ob quam tractio parallela oriri debeat. Sed si in vecte physico (lineam enim pro vecte ideali explodunt, de quo negant disseri debere) si, inquam in vecte physico præter normalem actionem ponderum tractio parallela spectanda est, cur vires geminas, quas quodvis pondus exerit, non componunt in vim unicam, quam diagonalis exprimat secundum principia Mechanices? aut quo pacto, si ea compositio fiat, caussam æquilibrii exponunt? Dicam sane, quo

id

id modo fieri possit. F. V. T. IV. In vecte A B recta P M exprimat unum pondus; recta p N alterum. Hæ vires normales, quoniam usque ad fulcrum propagantur, transferantur in K, ubi fulcrum pono; fiatque K S = P M; K R = p N. Rectæ K m, K n exprimant vires parallelas, quæ dependenter ab utroque pondere ad fulcrum æquales sunt. Vires K S & K m componantur in diagonalem K O; & vires K R, K n in diagonalem K T. Hæ diagonales cum exhibeant vires, queis punctum vel nexus K adficitur ab utroque pondere, denuo componantur in vim K Z ducta T Z æquali & parallela rectæ K O, & O Z æquali & parallela rectæ K T. Erit iam hæc vis composita K Z normalis ad vectem, & parallela directionibus ponderum P M, p N, atque in eadem recta K S; nam vires componentes K O, K T ex utraque parte æqualiter recedunt a perpendiculo nempe intervallo R T = K n, & O S = K m. Deinde vis K Z erit æqualis summæ ponderum, quorum directiones parallelæ sunt; nam K S = P M; & S Z = K R ob triangula O S Z, K R T æqualia; igitur S Z = p N = K R. Ex his perspicuum est, quod tractiones parallelæ & æquales ad fulcrum, nempe K m, K n perinde sint, ac si non essent; cuius rei ratio ex eodem petitur principio, quod supra commemoravi: vires æquales & oppositæ potentiis agentibus P M, p N additæ non mutant potentiam iis æquipollentem K Z, cui dein tertia potentia æqualis, & opposita esse debet. Cui obscura videntur, quæ de concursu parallelarum in distantia infinita diximus (quamquam ea vim omnino geometricam demonstrationis habent) is hac constructione per me utatur, in qua per rectas K m, K n tractiones parallelas æquales ad fulcrum denotare potest. Sed quia hac ratione punctum K non reperitur, sed iam notum esse debet; sic rem adgrediatur. F. VIII. T. IV. ad potentias verticales & parallelas P M, p N addat binas alias æquales & oppositas P m, p n, per quas potentia æquipollens iis potentiis datis, & effectus earundem nihil mutatur. Completis utrinque parallelogrammis diagonales P R, p S producantur ultra punctum concursus O, ut fiat O S = p S; & O r = P R, completoque novo parallelogrammo mo O T, diagonalis producatur, quæ designabit punctum K, a quo desumtæ distantiæ cum datis potentiis reciprocant; ac reliqua omnia eodem modo se habebunt, ac in demonstratione propositionis I. §. CXIX.

VIII. Auctor opusculi de viribus corporum, & genuino principio æquilibrii Varignonium impugnat, qui, ut refertur in Hist. Acad. Reg. Paris. Ann. 1709, æquilibrium corporum per vectem coniunctorum ab æquilibrio corporum per funes iunctorum explicat eo fere modo, quo id in machina funiculari §. CLVI. exposuimus. *Hoc principium*, inquit Auctor cit. opusculi §. 21. *sua firmitate non careret, nisi ipsum fundamentum aliqua ratione deficeret.* Videamus sane, ubi deficiat fundamentum, & respondeamus ad argumenta Auctoris, quoniam theoria Varignonii re ipsa nostra est. Ait 1. Si (F. XVII. T. III.) funiculus in C fixus sit ad obicem, nulla per hunc funiculum datur communicatio virium, quibus pondera P & p adversus se mutuo agant; sed tota actio uniuscuiusque abit in obicem; at in vecte pondera adversus se mutuo agunt; igitur æquilibrium in vecte hoc modo non exponitur. R. Nemo, qui machinam funicularem, atque æquilibrium potentiarum ponit, funiculos ad clavum immobilem in C alligatos sumit; igitur istuc non est ad rem. Sed, ait 2, si in C loco obicis ponitur trochlea in axe fixa, sed circa axem mobilis, pondus maius e. g. P descendit, minus attollitur teste experientia; & tamen axis fixus vim ponderum æque ac obex immobilis elidere deberet, quia per trochleam pondera in se mutuo agunt, per obicem immobilem non agunt. R. Auctor ponit hypothesin repugnantem; nam pondera sumit inæqualia: fulcrum in centro trochleæ esse vult; & ex sententia Varignonii supponit, eadem pondera esse ut latera parallelogrammi, sive reciproce ut perpendicula ex fulcro seu tertia potentia, nempe ex centro trochleæ in directiones potentiarum deducta; quis ignorat, in trochlea fixa, si fulcrum in centro ponitur, perpendicula in directiones potentiarum, sive in tangentes demissa esse radios æquales trochleæ, ac proinde ipsas potentias *æquilibrantes* inter se æquales esse; si inæquales sumit, directio tertiæ potentiæ per trochleæ centrum non transit; nihil igitur

mirum

Digitized by Google

mirum est, quod æquilibrium deficiat, cum eo casu trochlea instar alterius obstaculi vel impedimenti sit, non instar tertiæ potentiæ (vid. §. CLVI.) quare ratio, cur æquilibrium deficiat, non est communicatio potentiarum; ea enim in usu funium & hypothesi æquilibrii semper ponenda est; quia omnes vires in unum punctum concurrunt; sed ratio est, quia centrum trochleæ non est in directione tertiæ potentiæ, si eædem inæquales sunt. Rem expendenti certum est, æquilibrium Varignonii infirmarii non posse, nisi certa, atque ab omnibus adprobata, constanteque experientia, & Mathesi nixa principia Mechanicæ antea convellantur; quod fieri sane non potest. Cur vim in nexum pro caussa æquilibrii adsumi non posse existimem, his rationibus ducor: 1 quia ea theoria ut exponi solet, æquilibrium in vecte rectangulari ante iam sumit, uti supra indicavi; quapropter hæc vis in nexum corollarium est, non fundamentum statices. 2. In linea æquilibrium potentiarum concipi potest: tractio parallela, gyratio particularum circa axem concipi non potest. Antiquissimi quique Scriptores, qui de re mechanica tractarunt, machinas præsertim simplices, instar dimensionum Geometricarum conceperunt, eosque sequuti sunt Recentiores, qui recta methodo usi in simplicia resolverunt ea, quæ admodum composita occurrunt in natura. Vectes, quos patroni virium in nexum adsumunt, magis compositi iam sunt, quam ut theoriæ stabiliendæ recte adhibeantur. Æqualitatem virium in nexum communem ad fulcrum non nego, eandem etiam adcuratius, quam fieri passim solet, demonstravi §. CLXXXVIII. Eadem virium æqualitas, si cætera abessent, intelligitur ex vecte duplici rectangulari (§. CXXV. n. II.) ubi pondera m, & n, quæ vim in nexum ad fulcrum repræsentant, in casu æquilibrii æqualia esse demonstravi. Sed abrupta hac disceptatione, de potentiis, quibus in quotidiano usu ad machinas movendas, vel in æquilibrio tenendas utimur, non nulla in hoc generali Scholio adnotabo.

IX. Ad machinas potentiarum instar adhibentur primo homines, atque alia animalia. Vis hæc animalis omnium censetur debilissima; quia animalia interposita quie-

quiete, & alimentis indigent. Curandum, ut homini in usu machinae situs tribuatur a naturali quam minimum diversus; secus nimis defatigatur. Praeterea is maxime situs adpositus est, quo etiam proprio pondere uti queat. Quantae in humano corpore vires resideant, viri clarissimi de La Hire, Sauveur, Parentius teste Bellidoro Archit. Hydraul. L. I. observarunt. Ac *primo* homo sanus mediocris staturae, ac roboris, flexis omnino genibus, se ipsum solus absque fulcro in pedes potest erigere; quod cum vi solorum musculorum, qui in pedibus, & femoribus sunt, efficiat, ipsorum vis aequabit pondus totius hominis aestimatum 140 tt. *Secundo*. Cum se homo antrorsum parum inclinat, ac genua modice incurvat, una cum corpore suo pondus 150 tt elevat ad altitudinem saltem 2 vel 3 digit. igitur vis tota musculorum erit = 290 tt. *Tertio*. Si homo ad pondus elevandum duntaxat superiorem corporis partem, quae a coxis usque ad verticem pertinet, inclinat, una cum pondere superioris partis, quae 70 tt aequare censetur, elevat praeterea 100 tt; proin vis tota in eo situ erit = 170 tt. *Quarto*. Vis brachiorum, etsi optime fuerint adplicata, in trahendo, vel elevando nunquam potest censeri maior, quam 160 tt. Qui extremitatem funis per trochleam ducti, e cuius altero extremo adpensum est pondus, perpendiculariter deorsum trahit, nequit maius pondus elevare, quam 140, quale est pondus proprii corporis, quod cum pondere funi annexo in hoc casu aequilibratur. *Quinto*. Nequit homo vi brachiorum pondus a se removere, nisi se inclinet; inclinatio autem commodissima est sub angulo 60° ; ac tum vis hominis, qui directione horizontali trahit pondus, ad libras 27 se extendit; id adcurate observavit D. Sauveur, etsi hominum vires vulgo pluris aestimentur. At valet homo eiusmodi labore distentus ea velocitate progredi, ut intra horam conficiat 519 perticas Rhenanas. Equus operam praestare 7 hominum censetur, ac pondus 189 librarum horizontaliter provehere potest, ita ut intra horam 12000 pedes conficiat; ut adeo effectus maximus ab equo in machina productus dici possit = 189 × 12000 ped. Bos plus virium habet, sed minus celeritatis.

X.

Digitized by Google

X. *Aer* quoque instar potentiæ est, ut in propullandis navibus velorum ope, in circumagendis molis alatis. Sed hæc vis ob perpetuam mutationem ventorum admodum inconstans est. Aere compresso, ac subito relaxato vim pulveris pyrii imitamur in sclopeto pneumatico: solo oris flatu in vesicam facto magna pondera attollimus. *Aqua* vim potissimum exerit in molendinis, & rotis movendis. *Ignis* potentiæ loco habetur in pulvere pyrio, maximos effectus edente præsertim in cuniculis subterraneis, & lapidibus e lapicidina eiiciendis. *Pondera* vices potentiæ subire nemo non videt; denique & *elastra*, præsertim chalybea in movendis horologiis.

SECTIO IV.

De Pressione, Æquilibrio, & Resistentia Fluidorum.

CAPUT I.

De Legibus Pressionis, & Æquilibrio Fluidorum.

Quæ ad æquilibrium fluidorum pertinent, de quo Hydrostatica, seu potius Statica fluidorum agit, paucis exponi possunt; Eadem tamen maximos & admirabiles usus tum in humana vita, tum in Physicarum rerum expositione habent. Fluidum adpello corpus, cuius partes minimæ impressioni cedunt, & cedendo facillime moventur inter se; Est igitur necessaria fluidorum proprietas 1. *partium subtilitas,* 2. *separabilitas earundem inter se,* 3. *summa mobilitas. Unde porro fluiditas, sive complexio istarum notarum oriatur, alio loco indagandum est, cum in rerum naturam intimius penetrare conabimur, & de viribus elementorum agemus; nunc istas proprietates constante experientia deprehendisse in fluidis, satis est.*

Digitized by Google

§. ICC.

Definitio. *Vas uniforme* dicitur, cuius omnes sectiones fundo parallelæ figura similes, & magnitudine æquales sunt; cuiusmodi sunt vasa prismatica, ac speciatim cylindrica. Contra si sectiones fundo parallelæ crescunt, vel decrescunt, vas *difforme* est, idque *divergens*, quando sectiones a fundo versus labrum superius crescunt: *convergens*, si eædem decrescunt. F. VIII. T. IV. Vas A H B est uniforme. F. XIV. Vas A B D C est divergens. F. XVII. Vas A B D C convergens. *Tubi communicantes* sunt, qui duplici vel multiplici constant crure, ita ut fluidum unius cruris transire, vel premere in fluidum cruris alterius queat, quæcunque sit crurum forma, vel capacitas æqualis, vel inæqualis, aut situs rectus, vel obliquus. Sumuntur autem hoc loco eiusmodi tubi, quorum nullum crus capillare, id est, valde gracile, & angustum est. Nam in capillaribus tubis aliæ leges, & phœnomena multum discrepantia obtinent.

Notiones ac formulas de corporum volumine, massa, densitate ac gravitate specifica, pondere individuali exposui Sect. I. C. III.

§. CC.

Propositio I. *Fluidi cuiuscunque stagnantis, sive in permanenti statu positi superficies summa est horizonti parallela.* Ostend. Sit enim (T. IV. F. VIII.) fluidi superficies in situ obliquo C E D. Ducta horizontali A B, erit gutta quæcunque G ita disposita, ac si incumberet plano inclinato G E; eritque guttæ huius pondus absolutum P ad relativum $p = GE : GF$; & $p = \frac{P \times GF}{GE}$; cumque fluida vi naturæ facillime moveantur, ac cuivis impressioni cedant, ac nihil adsit hoc casu, quod impressionem, ac vim relativam p extinguat, ea habebit effectum suum, ac guttam versus E descendere faciet; quod est contra hypothesin fluidi stagnantis. Quare ut fluidum stagnet, recta G F evanescere debet, at tum fiet C D horizontalis, sive horizonti parallela.

§. CCI.

Digitized by Google

§. CCI.

Corollarium. Fluida semper infimum, quem possunt, locum occupant, sive eo usque descendunt, donec locus descensui non amplius detur. Sunt enim perinde, ut corpora solida, gravitate prædita, cuius directio est perpendicularis ad horizontem, & proxime ad centrum terræ dirigitur; & præterea vi naturæ facillime moventur. Quare si infimum, quem possunt, locum non tenent, ita se habent, ac si plano inclinato incumberent, in quo descensum verticalem ipsum planum sive aliæ inferiores guttæ impediunt, descensum vero obliquum eorum vis relativa necessario obtinet. Hinc dicimus: *fluida sponte se componunt ad libellam, sive ad lineam horizontalem.* Hæc linea horizontalis in minore superficie fluidi est recta: at in superficie maiore, ceu in lacu ampliore, vel in mari est sphærica; sit enim F. IX. tractus maris AB. Si superficies fluidi esset rectilinea, & congrueret cum recta AD; partes fluidi in D altiore loco consisterent, quam in A, magisque distarent a centro terræ C. Quapropter defluerent, ac tamdiu moverentur, donec superficiem convexam a b, & æqualem a centro distantiam obtinerent. Si globus terraqueus constaret partibus solidis homogeneis, & eiusdem ubique densitatis, ac dein fluido homogeneo e.g. aqua ex omni parte immergeretur, cuius directio gravitatis undique ad centrum tenderet, aut si duntaxat eiusmodi fluido homogeneo constaret, is formam exacte sphæricam indueret.

§. CCII.

Propositio. II. *Fluida homogenea, sive quæ eiusdem gravitatis specificæ, & eiusdem ubique densitatis sunt, ita premunt, ut in quavis sectione horizontali pressio sit in ratione altitudinis fluidi incumbentis, & in omnem partem æqualiter propagetur.* Prob.

I membrum. Singulæ particulæ fluidi alias sibi subiectas premunt tota vi, quam habent. Hinc siqua columna verticalis in plures sectiones horizontaliter conci-

cipi-

Digitized by Google

cipitur divisa, numerus particularum, ac proin ipsa pressio crescet pro ratione distantiæ cuiusvis sectionis a superficie, id est, pro ratione altitudinis.

II membr. *Pressio fluidorum propagatur in omnem partem, nempe sursum, deorsum, horizontaliter ad latera, & quavis obliqua directione inter verticalem, & horizontalem media.* Probatur 1. ab experientia, quæ est tutissima philosophandi via. Sit F. X. vas D F G H undique clausum, nisi ut in O communicet cum fluido in tubulo A B contento. Ubicunque foramen aperiatur, in fundo circa m n, ad latus in i, in superiore operculo D F in e, fluidum erumpit non modica celeritate teste experientia. Unde argumentum conficitur istiusmodi: fluida pressionem, sive nisum dilabendi exerunt secundum eam directionem, qua reipsa dilabuntur data via, seu aperto foramine; atqui data via, seu aperto foramine dilabuntur quavis directione, non modo verticali deorsum, sed etiam opposita verticali sursum, horizontali, & quovis obliquo situ foraminis. Igitur pressio fluidi altioris in tubulo A B contenti reipsa propagatur in omnem partem; quia actualis motus seu effectus priori nisui, pressioni, seu determinationi ad motum respondet. Ut ratio physica huius pressionis intelligatur, inprimis spectanda est natura fluiditatis, nempe subtilitas, separabilitas, summaque mobilitas particularum, ob quas affectiones eædem particulæ levissimo impulsui cedunt, factaque pressione, seu impressione eo dilabuntur, ubi minor est resistentia; posita vero resistentia dilabi saltem nituntur. Ista particularum affectio mechanica relate ad pressionem est instar *conditionis* seu *requisiti*, ut aiunt; ea enim vim, ac nisum non exerit. Caussa igitur activa pressionis in omnem partem tum est gravitas, quæ in singulis particulis inest, & vi cuius deorsum nituntur tum verticali, tum obliqua directione, qua per gravitatem singulæ possunt descendere: tum pressio, quam inferiores a superioribus sustinent, & ob quam eadem vi, qua urgentur secundum unam directionem, necessario premunt seu dilabi nituntur secundum quamvis directionem aliam, ob ipsam subtilitatem, separabilitatem, ac mobilitatem, quam habent.

Ea-

Digitized by Google

Eadem pressio in omnem partem confirmatur plurimis experimentis, quæ passim extant in Physicorum libris; uti si plures simul in fluidum mergantur tubuli, quorum labra inferiora diversas in partes flexa sunt sursum, deorsum, oblique, ad latera, ad eandem in omnibus altitudinem fluidum ascendet; ac siquis tubulus obturato labro superiore in aquam mergitur, ea parum intra tubum attolletur ob aeris resistentiam; aperto autem superius labro mox ascendet, utique ob pressionem partium lateralium fluidi incumbentium, ob quam columna fluidi inferiori labro respondens etiam sursum urgetur, ac data via reipsa movetur. Atque ex his iam binis propositionibus leges æquilibrii fluidorum dimanant.

§. CCIII.

Lex I. *Pressio fluidi in totam sectionem horizontalem, seu fundum horizontaliter situm, est in ratione composita ipsius sectionis seu fundi aut basis, & altitudinis, ac gravitatis specificæ fluidi.* Nam singulæ partes baseos eo magis premuntur, quo maior est densitas seu gravitas specifica fluidi, & altitudo coniunctim; pressio igitur in totam basin eo maior est, quo plures partes habet, quibus eiusmodi columnæ incumbunt, sive quo ipsa basis, aut eius superficies maior est. Sit altitudo fluidi A, gravitas specifica G, basis B, erit pressio in basin $= A \times B \times G$. patet ex theor. gen. §. XII.

Si bases circulares inter se comparantur, eædem sunt ut quadrata diametrorum; si autem fundus est rectangularis, (ut F. XII.) is erit ut factum ex longitudine B C in latitudinem B H. Quæri nunc potest, quomodo determinanda sit altitudo fluidi, si fundus est inclinatus ad horizontem, uti F. XI. fundus A B C D, cuius partibus columnæ inæqualis altitudinis insistunt; præterea quanta sit pressio in latera vasorum, quæ ad fundum horizontalem sunt verticalia; uti quanta sit pressio in latus A B H F vasis B G (F. XII.) cum altitudo fluidi semper crescat, ac proinde etiam pressio ad latera.

Digitized by Google

§. CCIV.

Lex II. *Si altitudo fluidi in diversis partibus fundi, vel laterum vasis inæqualis est, pressio in totum fundum vel latus vasis est in ratione composita fundi, vel lateris, ac distantiæ centri gravitatis eiusdem a suprema superficie fluidi stagnantis.* Sit F. XI. fundus obliquus A B C D; centrum gravitatis O. distantia centri gravitatis a suprema fluidi superficie K O. Dico, pro altitudine totius fluidi sumendam esse rectam K O, seu distantiam centri gravitatis a suprema superficie fluidi. Nam singulæ partes fundi premuntur pro ratione altitudinis columnæ incumbentis; hinc concipi potest, ac si æqualibus partibus fundi essent adplicata pondera, quæ pro ratione altitudinis seu distantiæ agunt. Quemadmodum igitur summa factorum ex quovis pondere in suam a plano quodam distantiam æqualis est facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem plano (§. CXXXI.) ita erit summa omnium pressionum, sive, pressio in totum fundum æqualis facto ex summa particularum omnium fundi, sive ex fundo in distantiam centri gravitatis a suprema superficie fluidi stagnantis. Similiter pressio in totum latus ad fundum verticale est ut factum ex ipso latere in distantiam centri gravitatis eiusdem a suprema superficie fluidi. Ponatur enim F. XII. sectio verticalis a b lateris ad fundum, & horizontem normalis; crescet a summa superficie fluidi ad fundum pressio, uti crescit ipsa altitudo, sive sectio verticalis, divisa per sectiones horizontales; igitur si pressio lateralis in suprema superficie est $= a$; pressio in latus ad fundum $= A$; habebitur progressio arithmetica: a. 2a. 3a. 4a. 5a. - - - A; cuius singuli termini exprimunt singulas pressiones: summa progressionis summam omnium pressionum in totam sectionem verticalem. Est autem summa progressionis arithmeticæ æqualis facto ex summa termini primi & ultimi in dimidium numerum terminorum, sive in dimidiam altitudinem; ac proin summa pressionum $= \overline{a + A} \times \frac{1}{2} A$. Et quoniam suprema particula non premit ad latus, adeoque primus terminus a relate ad ultimum A est $= 0$;

erit

erit summa pressionum in sectionem verticalem $= \frac{1}{2} A^2$. Dicatur latitudo lateris B; erit pressio in totum latus $= \frac{1}{2} A^2 B$, hoc est, uti factum ex ipso latere (quod exprimitur per altitudinem A ductam in latitudinem B) in distantiam centri gravitatis a superficie suprema fluidi, quae distantia aequat dimidiam altitudinem, seu $\frac{1}{2}$ A. Si fundus ponitur horizontalis, distantia centri gravitatis a suprema superficie fluidi aequat altitudinem cuiusvis columnae; hinc pressio erit, ut fundus ductus in altitudinem; siquidem gravitas specifica est constans, uti etiam supra posuimus; secus etiam pro ratione gravitatis specificae crescet pressio. Universe igitur *pressio sive in latera sive in fundum tam horizontalem, quam obliquum est in ratione composita gravitatis specificae, lateris seu fundi & distantiae centri gravitatis lateris, vel fundi a suprema superficie fluidi;* quam quidem distantiam deinceps per altitudinem fluidi denotabimus.

§. CCV.

Lex III. *Fluida in tubis communicantibus cuiuscunque perimetri, figurae, situs, vel magnitudinis (modo capillares non sint tubi) in aequilibrio sunt, quando gravitates specificae & altitudines reciprocant.* Sit F. XIII. Altitudo fluidi in crure m = A; gravitas specifica G. in crure n altitudo fluidi a; gravitas specifica g. Concipiatur sectio verticalis c d; cuius magnitudo sit = b. erit tota pressio fluidi in tubo m, quam in sectionem b exerit = A G b; & pressio fluidi in tubo n, quam in eandem exerit sectionem = a g b. Porro ut aequilibrium tueantur fluida, necesse est, ut pressiones in eandem sectionem b aequales sint; si enim aliqua ex parte maior vel minor esset, fluidum alterius tubi descenderet, alterius ascenderet; quare necesse est, ut sit A G b = a g b; & A G = a g; consequenter si fluida in tubis communicantibus in aequilibrio sunt, semper erit A : a = g : G; ac si in utroque crure fluidum homogeneum ponitur, in quo est g = G; erit etiam A = a. Hinc legem istam generalem passim in duas particulares dispertiunt hoc modo: 1. *Fluida homogenea in tubis communicantibus cuiuscunque perimetri, magnitudinis,* *vel situs in æquilibrio sunt, quando ad eandem libellam, vel altitudinem consistunt:* 2. *Heterogenea vero, si eorum altitudines fuerint reciproce, ut gravitates specificæ.*

§. CCVI.

Exercitatio.

I. Obiiciunt. *Pressio fluidorum non potest in omnem partem propagari; si enim fluidum in vase contentum in plures columnas verticales dividitur, pressio primæ columnæ eliditur a latere, & a secunda, pressio columnæ tertiæ a secunda, & quarta; igitur tertia columna non agit in primam; ac proinde eiusdem pressio non propagatur in omnem partem; præterea si quod ponitur vas divergens (F. XIV.) pressio columnarum lateralium m n, o p excipitur a lateribus A B, C D. ergo pressio earundem non propagatur in omnem partem.* R. n. a. Rationem additam d. pressio eliditur, id est, motus actualis impeditur posito æquilibrio c. ipse nisus ad motum propterea cessat, n. eo ipso, quia nisus ad motum in omnem partem æqualis exeritur in eadem sectione horizontali, impeditur motus, & æquilibrium oritur; quapropter spectata natura, & gravitate fluidorum quævis columna verticalis intermedia immediate in vicinas, ac mediate etiam in alias remotiores premit, ceu tertia in primam, hæc in tertiam, quarta in secundam, & ita porro, ut pressio cuiusvis in omnem partem propagetur, quia quævis omni parte difflueret, si dilabendi via daretur. Nec vero adcurate loquuntur ii, qui in vase divergente columnas laterales, quæ ad fundum non pertingunt, a lateribus ita excipi dicunt, ut in fundum non premant; si enim fluida, ut iidem statuunt, in omnem partem premunt, sane concipi potest, ac debet, columnam m n etiam premere versus D., & columnam o p versus B.

II. *Motus secundum diversas directiones eodem tempore naturaliter dari non potest, multo etiam minus versus omnem partem: igitur neque nisus ad motum.* R. Motus secundum diversas directiones, seu qui in lineis & plagis diversis fieret, replicationem posceret, quæ supra natu-

Digitized by Google

naturæ vires est: at nisum in diversas partes in eodem corpore posse concipi, ipsum æquilibrium quarumvis virium ostendit, uti siquod corpus eadem directione & vi, qua deorsum nititur, sursum urgeatur a potentia quadam. Nec vero, si posito æquilibrio motus impeditur, propterea nisus ad motum ullo tempusculo, quod concipi potest, cessat, cum actio gravitatis, & aliarum præterea virium sit continua.

III. *Ex diversis directionibus, & pressionibus oriri debet nisus ad motum per quandam diagonalem; igitur concipi non potest pressio in omnem partem.* R. d. a. Siquod corpus diversis directionibus simul impulsum reipsa motum obtinet, is per quandam diagonalem fit, c. a. ipsæ vires componentes, & diversæ impressiones seu pressiones propterea cessant impedito actuali motu n. a. Si pressio in omnem partem eiusdem sectionis horizontalis æqualis non foret, particulæ fluidorum ob ipsam subtilitatem, separabilitatem, ac mobilitatem eo diffluerent, unde minorem resistentiam sentiebant, quod est contra hypothesin æquilibrii, & stagnationis. Illud animadverto; concipi non potest, particulas fluidi in quodam vase contenti ita sibi incumbere, ut directio pressionis adcurate per centra singularum in eadem verticali sectione transeat, uti id quorundam exemplo F. XV. exhibetur; Nec vero si unus globulus binis incumbat, eosque oblique premat, ut in vase medio Q, propterea hæ directiones obliquæ in unam componendæ, & pressiones singularum particularum ad calculum revocandæ sunt; quod humanum ingenium longe superat. Sed cum incredibilis sit particularum cuiusvis fluidi subtilitas; hinc columna quædam in plures sectiones horizontales divisa concipiatur, quarum superiores in inferiores agunt eo modo, quo, si fluidum ponatur expers gravitatis, sed huius loco premi ab intruso pistillo, id in vasis latera interna, & quaquaversum ita urgetur, ut ubicunque aperiretur apertura, fluidum per illam ob pressionem pistilli prorumperet, quamvis pressio pistilli duntaxat deorsum unica directione agat. Quod pressio pistilli; idem gravitas cuiusvis sectionis horizontalis relate ad sectionem inferiorem efficit; etsi enim ex vi absoluta duntaxat deorsum agat; tamen ex hac vi pres-

Digitized by Google

fio in omnem partem oriatur necesse est ob ipsam naturam fluidi. Cæterum non est prætermittendum, fluida, perinde ut quævis alia corpora, si a descensu verticali prohibentur, directione quavis obliqua deorsum ad descensum niti.

IV. *Si pressio fluidorum quaquaversus propagatur, consequi videtur, singulas partes fundi, vel sectionis cuiusdam horizontalis maiore vi premi, quam pro ratione altitudinis columnæ incumbentis: igitur pressio in omnem partem, & pressio pro ratione altitudinis una non subsistunt. a. pr. Sola columna directe incumbens, quæ datæ parti fundi respondet, iam premit pro ratione altitudinis, etsi abessent aliæ columnæ laterales: ergo, si hæ quoque in omnem partem, ac proinde in datam partem fundi premunt, pressio fiet maior, quam in ratione altitudinis columnæ incumbentis; quando enim plures agunt caussæ, vel una maior, effectus maior sit, necesse est.* R. n. a. ad prob. d. a. Sola columna directe incumbens iam premit pro ratione altitudinis, ita, ut non modo verticaliter deorsum, sed versus omnem præterea partem, atque eam quoque, unde aliæ urgent columnæ laterales, premat, c. a. ut duntaxat premat in partem fundi sibi respondentem, n. a. & c. Ut res tota adcurate percipiatur, expendendum est principium evidens Mechanicæ: *Si duo corpora mediante tertio æqualibus viribus sibi mutuo obnituntur, corpus intermedium tantundem premitur, aut comprimitur, ac si illud ab alterutro extremorum in obicem immobilem urgeretur.* Nam quodvis extremorum respectu alterius pariter extremi se habet instar obicis immobilis, quia totam alterius vim sustinet. Concipiantur iam (F. XVI.) bini tubi communicantes, alter erectus, alter inclinatus; dico: pressio in communem eorum basin C non est maior, quam foret a fluido in solo tubo verticali contento; nam sectio infima tubi verticalis seu particulæ fundo proximæ a fluido tubi verticalis æqualiter premuntur versus omnem partem, adeoque etiam versus columnam tubi inclinati; consequenter ea sectio infima, sive particulæ fundo proximæ ita se habent, ac corpus, quod inter alia duo viribus æqualibus sibi obnitentia medium est, ut adeo eæ particulæ æqualiter premantur ac premant, sive directione obli-

obliqua opponatur latus vasis instar obicis immobilis, sive opponatur pressio columnæ inclinatæ, quæ columnæ verticali per intermediam eam sectionem infimam obnititur. Quapropter cum pressio in basin proxime oriatur a pressione sectionis infimæ, sive particularum fundo proximarum, consequens est, pressionem in communem basin tuborum communicantium non maiorem esse, quam si ea a sola columna directe incumbente proveniret, quemadmodum ea foret absente tubo inclinato. Porro quod in tubis communicantibus contingit; idem fieri debet in vase unico, ubi fluidum in plures columnas verticales & obliquas divisum concipi potest. Nam quævis pars fundi in quovis vase spectanda est ceu basis communis plurium tuborum communicantium, sive plurium columnarum, quarum una directa, reliquæ vero obliquæ sunt, quia pressio a gravitate oritur, & partes fluidi quoad gravitatem suam, ac vim eodem modo se habent, sive tubo conclusæ sint, sive aliis columnis circumfusæ. Quamobrem ut concludam denique hanc expositionem, non modo columna directe incumbens, sed omnes præterea laterales in quamvis fundi partem premunt, nec tamen pressio maior est, quam si sola columna directe incumbens reipsa premeret.

V. *In vase divergente A B C D (F. XIV.) necessario maior est pressio, quam in vase uniformi a B c D eiusdem fundi B D, & altitudinis perpendicularis a B. Ergo pressio non crescit pro ratione fundi & altitudinis.* *a. pr. In vase divergente maior fluidi quantitas continetur, quam in vase uniformi eiusdem basis, & altitudinis; igitur in illo pressio necessario maior est, quam in isto.* R. n. a. Si de pressione in fundum est sermo. Ad pr. c. a. n. c. ac suppositum, quod pressio fluidorum sit in ratione quantitatis seu massæ in vase contentæ; supra enim demonstravi, pressionem pro ratione altitudinis, non copiæ fluidi crescere. Cur autem pressio in fundum B D vasis divergentis non sit maior, quam in vase uniformi, apertissime intelligitur ex iis, quæ superiore numero de tubo erecto & inclinato dicta sunt; nam in communem eorum basin pressio non est maior, quam in ratione altitudinis perpendicularis, etsi utraque columna premat. Non dicendum igitur in eiusmodi vase,

pres-

Digitized by Google

pressionem columnarum lateralium m n, o p a lateribus A B, C D, vel a columna a B c D elidi, quia columnæ laterales revera etiam oblique versus B & D in fundum premunt; quin ea pressio impediatur, elidatur, vel cesset.

VI. *Si fluida pro ratione solius altitudinis, & basis premunt, sequitur, ut, si cylindro unum pedem alto inseratur tubulus angustior 4 pedum, fundus illius æque prematur, ac si totus cylinder 5 pedes altus fluido repleretur. Id vero a ratione, & experientia abhorrere videtur.* R. d. Sequitur, ut fundus æque prematur, ac si totus cylinder 5 ped. altus fluido repleretur, si fundus est mobilis, & cum lateribus cylindri non cohæret, c; si fundus cohæret cum lateribus, atque unum velut continuum cum iis efficit, n. Si fundus mobilis est, reipsa pressio ab inserto tubulo oritur tanta, quanta in vase uniforme eiusdem fundi, ac 5 ped. alto existeret, uti experimenta Physicorum, ac inprimis Gravesandii exhibent, ut adeo parva fluidi quantitas ad debitam altitudinem elevata æquilibrium tueri cum multo maiore copia eiusdem fluidi queat. At si fundus, & latera vasis cohæreant, non maior oritur pressio, quam quæ massæ fluidi contenti respondeat; nam vis illa, quæ a pressione pro ratione altitudinis oritur, excipitur, ac sustentatur a nexu, quo fundus cum lateribus vasis cohæret, eo fere modo, quo vis elastica aeris in pilam lusoriam intrusi a partibus vesicæ sustentatur, ut adeo pila, nisi comprimatur, non maiorem vim, aut maius pondus exerat, quam quod massæ continentis, & aeris contenti respondet.

VII. *In vase convergente A B D C (F. XVII.) multo minor est copia fluidi, quam in vase uniformi a B c D eiusdem altitudinis, & fundi B D; ergo vel pressio non est in ratione altitudinis, & fundi, vel in utroque vase æqualis est; quod paradoxum videtur.* R. Si fluidum in utroque vase est homogeneum, altitudo utrinque eadem, & fundus idem, seu æqualis, sine dubio pressio eadem est, quæ uti paullo ante dicebam, minime a copia fluidi pendet. Non nulli de eiusmodi vase convergente ita disserunt: columna media A F C E, cuius maxima est altitudo, directe premit in partem fundi sibi responden-

tem

tem F E, & indirecte etiam versus latera ubique pro ratione altitudinis, ut adeo in sectione horizontali o p premat pro altitudine C p, & quidem versus omnem partem e. g. versus m, ut adeo particula m prematur pro altitudine C p, ac dein fundus in n pro altitudine C p + m n = C p + p E = C E, id est pro altitudine fluidi. At enim, si naturam fluidi, & pressionem in omnem partem recte expendimus, dicendum, columnam mediam A F C E non modo in partem fundi F E, sed etiam versus B, D & omnes intermedias partes vel directe, vel oblique vi gravitatis premere, ita, ut quantitas pressionis semper respondeat altitudini perpendiculari fluidi. Eodem modo pressio fluidi in tubo A B contenti (F.X.) non tantum directe propagatur per O i, sed versus omnes partes, & latera vasis, versus c, m, n, f &c. quod quidem ex natura fluiditatis, nisi fallor, omnino perspicuum est. Cæterum recte Krafftius in Prælect. Acad. P. II. §. 101, si, inquit, obiiciatur, quod vas convergens non tantum ponderet, ac uniforme eiusdem basis & altitudinis; distingui debet inter actionem fluidi, & pondus.

VIII. *Si foramen aperitur in fundo vasis, columna fluidi foramini directe respondens cavitatem quandam in suprema superficie relinquit; igitur in singulas partes fundi duntaxat columna directe respondens, non item aliæ laterales premunt.* R. c. a. n. c. ratio eius cavitatis esse potest, quia columna directe respondens gravitate absoluta, ac proinde maiore celeritate erumpit, quam aliæ oblique prementes vi relativa. Verum, ut Cel. Paullus Frisius de gravit. omnium corporum in Schol. L. I. C. II. inquit, *cum ea, quæ fluidorum æquilibrium respiciunt, paucis comprehendi possint; quæ ad motum eorundem pertinent, non nisi hypothesibus perstricta, dubia & incerta sunt. Universe manifestum est, quod in motibus corporum determinandis eo sunt complicatiora problemata, quo plura sunt corpora in se agentia: & cum contiguæ fluidi particulæ motu, & pressione omnes agant in se invicem, patet, problema, quo motus particularum earundem inter se quæritur, Geometriæ, & analyseos vim superare.* Non possunt igitur ex incertis, valdeque dissimilibus de motu fluidorum phænomenis certissimæ pressionis, & æquili-

brii

Digitized by Google

brii eorundem leges impugnari. Atque ob hanc maxime caussam de natura pressionis diligentius disceptavimus, ut ea cognita difficultas explicandi motus fluidorum, ac incertitudo diversarum hypothesium citius intelligeretur.

IX. *Si in tubis communicantibus inæqualis perimetri (F. XIII.) ac primo in tubo angustiore novum fluidum affundatur, ut in eo liquor supra libellam AB primo emineat, intelligi non potest, quomodo a columna tenuiore columna maior amplioris tubi attollatur; tota enim simul elevari non potest, quia tenuior columna tantas vires non habet ad totam massam tubi amplioris commovendam. Nec vero aliqua tantum pars, quæ columnæ graciliori respondet, in ampliore tubo elevatur; si enim novum fluidum sit coloratum, ut a reliquo distinguatur, id teste experientia non directe ascendit per tubum ampliorem, sed circa communem sectionem verticalem diffunditur.* R. Per sese, si novum fluidum leniter, ac sine impetu infunditur, tota massa tubi amplioris simul elevatur, quia aucta pressio columnæ gracilioris quaquaversus diffunditur; non enim a maiore, vel minore copia fluidi, sed ab altitudine eiusdem quantitas pressionis pendet; ac levis quantitas fluidi ingentibus ponderibus elevandis par est, uti ex dictis satis perspici potest, quemadmodum ob eandem pressionis legem gracilior columna cum ampliore in æquilibrio est.

CAPUT II.

De Immersione, & motu libratorio corporum solidorum in fluidis.

Ex Legibus pressionis fluidorum haud ægre deducitur, quid corporibus fluido immersis eveniat, quanta nimirum parte merguntur, quanta vi descendant, vel ascendant intra fluidum, seu quanta ponderis eorum pars æquilibretur cum fluido; quæ quidem ante prætractanda videntur, quam usus & adplicatio Hydrostatices legum exhibeatur.

§. CCVII.

Digitized by Google

§. CCVII.

Propositio. *Siquod solidum grave fluido immergitur, tantam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus voluminis fluidi a solido extrusi.* Nam solidum grave nequit immergi fluido, nisi volumen fluidi par volumini partis mersae suo loco extrudatur; Quemadmodum ergo pondus voluminis extrusi antea sustentabatur a reliquo fluido; sic substituto in eius locum solido tantundem de eius pondere deinceps sustentabitur; hanc ergo ponderis partem quodammodo amittit solidum, ita ut per eam neque descendat infra fluidum, neque in aliud corpus, ex quo suspensum tenetur, agat, sed duntaxat in fluidum premat, & cum eo aequilibretur, uti antea premebat volumen fluidi exclusum. Hinc iactura ponderis, quam patitur solidum immersum, accrescit ponderi ipsius fluidi; id quod vel ex sola aequalitate actionis, & reactionis, nec minus ab experientia manifestum est; si enim vas aqua repletum lanci imponatur cuiusdam librae, & aquae immergatur solidum specifice gravius ope setae equinae libere a manu, aliove sustentaculo extraneo pendens, nec fundum attingens, atque ita in aequilibrium redigatur cum pondere opposito; observamus aequilibrium illud corpore extracto destrui, nec restitui, nisi tantundem affundatur aquae, quantum est volumen solidi immissi; quod indicio est, partem ponderis, quae solido decedit, accrescere aquae.

Ex hac propositione leges immersionis fluunt.

§. CCVIII.

Lex I generalis. *Solidum grave eo usque immergitur in fluido, donec volumen fluidi extrusi pondere sit aequale toti solido.* Cum enim tantam praecise ponderis partem amittat, quantum est pondus voluminis extrusi; eo usque habebit partem quandam ponderis sui residuam, per quam profundius mergatur, donec volumen fluidi extrusi pondere toti solido aequale sit.

§. CCIX.

§. CCIX.

Lex II. *Si solidum eiusdem sit gravitatis specificæ cum fluido, infra illud mergitur totum; omne pondus suum amittit, & quocunque loco infra fluidum collocatur, persistit immotum.* Nam eousque mergitur, donec pondera solidi totius, & voluminis extrusi sint æqualia; si gravitas specifica eadem est, pondera nunquam æqualia sunt, nisi & volumina sint æqualia; igitur volumen extrusum par est volumini solidi immersi; h.e. id mergitur totum; Ex quo ipso patet, totum ab eo pondus amitti; quia pondus voluminis extrusi & corporis mersi idem est in hac hyp. Et quia solidum eodem prorsus modo se habet, ac volumen fluidi, cuius locum occupat, idcirco quovis loco substitui potest pari volumini fluidi salvo æquilibrio.

§. CCX.

Lex III. *Si solidum specifice levius sit fluido, aliqua solum parte mergitur; totum vero pondus amittit.* Nam si solidum specifice levius, ac proin fluidum specifice gravius, minus volumen fluidi pondere adæquat totum solidum; cum igitur eo usque fiat immersio, donec pondera totius solidi & voluminis extrusi sint æqualia, ea æqualitas obtinetur, etsi volumen extrusum minus sit volumine totius solidi, h. e. etsi non mergatur totum; & quoniam pondus a solido amissum æquale est ponderi voluminis fluidi ab eo extrusi; perspicuum est, quod totum ab eo pondus amittatur.

§. CCXI.

Lex IV. *Si solidum specifice sit gravius fluido, illud mergitur totum, sed partem duntaxat ponderis amittit.* Hoc enim casu volumen fluidi extrusi, etsi æquale sit volumini totius solidi, semper minoris ponderis est, quam sit pondus solidi; cum igitur eo usque fiat immersio, donec pondera corporis mersi, & voluminis extrusi sint æqualia, illud perpetuo mergetur, & descendet, donec fundum attingat. Et quia pondus fluidi extrusi

in

Digitized by Google

in hac hyp. nunquam æquale est ponderi totius solidi, idcirco totum pondus ab hoc amitti non potest. Pondus, quod corpus liquido immersum servat, vocatur illius *gravitas respectiva*, quæ proinde est excessus gravitatis specificæ solidi supra gravitatem specificam fluidi.

CAPUT III.

De Adplicatione Legum pressionis, sive de Phænomenis a pressione fluidorum pendentibus.

Principia, ac leges pressionis fluidorum paucis verbis complecti, unaque omnes coniungere studui, ne expositione Phænomenorum, quorum maxima copia, & varietas est, diductionem earundem identidem interpolare cogerer. Nunc vero præpositis iis velut fundamentis de ordine, quo Phænomena recensebo, magnopere laborandum non est.

§. CXCII.

Sipho Anatomicus. F. X. Wolfius vasi D F G H e lamina confecto tubulum A B ferruminatione coniunxit. Diameter vasis erat 48 lin. tubuli 11 lin. altitudo A E 250 lin. loco operculi superioris D F vesicam arcte circumligavit; aquam dein per A infundens usque ad summitatem tubuli A deprehendit, pondus 30 libr. superficiei D F incumbens in æquilibrio cum fluido ad altitudinem A E elevato consistere, initoque calculo detexit, idem hoc pondus esse voluminis aquei, cum basis esset eadem cum vase lamineo G H, & altitudo A E. Inde instrumentum ad usus anatomicos, a quibus nomen traxit, adaptatum est; cum enim corporis animalis partes quædam ex variis pelliculis, & membranis coalescant; hinc, si eædem superne in D F circumligentur, ob pressionem fluidi fit, ut exilissimæ fibrillæ, & tenuia vasa sanguinis ac lympharum in tenerrimos divisa ramos, ac universa filaminum textura oculis distincte

Digitized by Google

subiiciatur. Hinc vero intelligitur, fluida in omnem partem, atque etiam sursum premere; ut si longitudo fundi ponatur 3 ped. latitudo 2 ped. erit fundus 6 ped. quadratorum; sit altitudo aquae incumbentis 4 pedum; erit pressio in fundum ut $6 \times 4 = 24$; h. e. totidem pedes cubici fluidi in eam basin prement; & si pes cubicus ponatur $62 \frac{1}{2}$ libr. facili multiplicatione reperitur pressio in totam basin.

§. CCXIII.

Pressio in latera. Sit vas prismaticum quadrangulare ABCDGF (F. XII.) Eius altitudo $AB = a$; lateris ABFH, eique oppositi latitudo AF, vel BH vel $CI = b$; erit ex §. CCIV. pressio in latus $= \frac{1}{2} a^2 b$, & in utrumque latus oppositum simul $= a^2 b$. Sit dein lateris ABCD longitudo $BC = c$; erit pressio in hoc latus, eique oppositum & aequale, simul $= a^2 c$; pressio denique in fundum $= a b c$. Quodsi iam istiusmodi vas ponitur cubicum, in quo $a = b = c$; erit pressio in 4 latera verticalia $= 2 a^3$, & in fundum pressio $= a^3$; consequenter pressio in fundum, & latera simul sumta ad pressionem in fundum solum, erit ut $3 a^3 : a^3 = 3 : 1$. Quare illud colligitur, quod Musschenbroeckius animadvertit: ex actione gravitatis fluidi oritur pressio triplo maior, quam ex actione sola gravitatis in corpore firmo, quod vasi cubico inclusum in solum fundum, non item in latera premit vi ponderis sui. Cera frigida & firma adimplens vas cubicum minus operatur in omnes vasis parietes, quam cum ab igne refusa est; quod item de metallis quoque firmis ac fluidis asseverari potest. De aqua, & glacie ob alias caussas aliud testatur experientia. Sit agger seu crepido aquae opposita; eius longitudo sit 20 ped. altitudo, ad quam aqua ascendit, $= 5$ ped. Quaeritur, quanta vi aqua premat in aggerem? nempe in ratione composita gravitatis specificae aquae, & totius baseos, cui aqua incumbit, quae hoc casu est 100 ped. quadratorum, ac distantiae centri gravitatis a suprema superficie fluidi; quae erit dimidia altitudo aquae seu $2 \frac{1}{2}$ ped. erit igitur ratione huius distanstantiæ pressio $= 250$. qui numerus indicat pedes cubicos aquæ in aggerem toto pondere prementes; & si pes cubicus ponatur $62\frac{1}{2}$ libr. erit vis pressionis $= 250 \times 62\frac{1}{2} = 15625$ libris. Nec vero si sola pressio aquæ stagnantis spectetur, amplitudo eiusdem spectanda est, ut perinde sit sive maiori sive minori stagno opponatur agger. Patet etiam ex dictis, amplitudinem vasis, aut copiam fluidi in eo contenti non augere pressionem, nisi altitudo crescat. Addendum hoc loco exemplum de pressione in circulum; & superficiem sphæræ. Sit radius dati circuli r; ratio diametri ad peripheriam $= d : p$; erit peripheria dati circuli $= \frac{2pr}{d}$; nam $d : p = 2r : \frac{2pr}{d}$. Ex elem. circulus sive area reperitur; si peripheria ducitur in dimidium radium; igitur area $= \frac{2pr}{d} \times \frac{1}{2} r = \frac{pr^2}{d}$. Sit iam distantia centri circuli (quod est centrum gravitatis lateris vel basis circularis) a libella; vel suprema superficie fluidi $= a$; erit pressio fluidi in circulum $= \frac{apr^2}{d}$; & quoniam superficies sphæræ est quadrupla circuli maximi; erit positis iisdem ut antea; pressio fluidi in sphæram radii $r = \frac{4apr^2}{d}$. Si enim sphæra fluido immergitur; latus pressum est tota superficies sphærica: centrum autem gravitatis est ipsius sphæræ centrum. Haud igitur recte computatur a non nullis pressio in sphæras e. g. in hemisphæria Magdeburgica per altitudinem fluidi in simplicem circulum maximum; quando nec fluidum, nec sphæra moveri ponitur.

Digitized by Google

§. CCXIV.

Pressio in tubos inclinatos. Ex iis, quæ de natura fluidorum, ac legibus pressionis supra disputata sunt, satis, ni fallor, colligitur, pressionem in ratione altitudinis crescere, quoscunque situs, aut flexus habeant vasa; idcirco etiam in tubis inclinatis pro altitudine perpendiculari crescit pressio. Et quoniam particulæ fluidorum subtilissimæ sunt, sibique maximo numero præsertim in tubo non capillari incumbunt; hinc non potest fluidum tubo inclinato contentum instar corporis solidi spectari; cuius gravitas absoluta est ad relativam, ut longitudo plani inclinati ad altitudinem; sed columna inclinata (F. XV.) in plures sectiones horizontales animo & cogitatione dividenda est, ita, ut pressio in prima sectione sit ut altitudo o r in 2 ut o r + m n & in ultima ut altitudo tota D E, quiscunque sit numerus particularum. Hinc intelliguntur scaturigines multorum fontium, & derivationes aquarum; nam aqua ex loco edito decurrens intra tubos, ad æqualem prope ei, ex qua delapsa est, altitudinem attollitur; ac fieri potest, ut ea tuborum coniunctorum ope ex loco sublimi ad humiliorem derivetur per anfractus quoque collium, & vallium interiectarum, modo vertices collium ad eam altitudinem non assurgant, quam fons ipse obtinet. Cum vero pressio pro ratione altitudinis semper crescat, tubos inferiores vi pressionis, nisi admodum solidi sint & firmi, sæpe disrumpi videmus. Spectata enim vi pressiva in planum inclinatum aliter de fluidis corporibus, aliter de solidis differendum est; in his enim directio vis rementis ex centro gravitatis in planum normalis est, neque alia præterea datur vis in planum premens; at fluida secundum omnes directiones premunt, & urgentur æqualiter; hinc pressio in latera canalis inclinati æquatur vi, qua fluidum in data quavis sectione horizontali a particulis superioribus urgetur, estque hæc in ratione altitudinis. Ratio disparitatis ex ipsa solidorum, ac fluidorum natura dispari petenda est; corpora enim solida ob ipsam *partium connexionem* coniunctim premunt, atque ita, ac si tota

mas-

massa in centro gravitatis esset collecta; fluida autem, cum eorum partes facile separabiles sint, & cuivis impressioni cedant, mox in omnem partem conantur dilabi, id est, premunt.

§. CCXV.

Pressio fluidorum heterogeneorum. Si fluida heterogenea in se agunt, lex generalis æquilibrii poscit gravitatum, & altitudinum rationem reciprocam. Ita capto tentamine deprehendit Wolfius, altitudinem Mercurii esse ad aquæ altitudinem, ut $36 : 492$ seu ut $3 : 41 = 1 : 13\frac{2}{3}$. Ex quo inversa ratio gravitatis specificæ colligitur, scilicet aquæ ad Mercurium ut $1 : 14$ circiter, id quod aliorum experimentis vulgo compertum est. Sicut autem corpora solida specifice leviora in fluidum gravius mersa supernatant; specifice graviora descendunt; sic fluidum specifice levius leniter affusum graviori supernatabit, velut oleum terebinthinæ aquis, aqua mercurio. Hinc originem habet vitrum *elementare* dictum, quod est cylindrus tenuis repletus quadam parte limatura ferri, aut contuso vitro, cui affusum est oleum tartari per deliquium, spiritus vini coloratus sale tartari, & petroleum. Hæc enim fluida, quorum alterum altero levius est, vitro inverso permixta, separantur dein, & quodvis suum locum recuperat restituta quiete. Hoc experimento explicare conantur quidam, qua ratione chaos confusum ex quatuor elementis potuerit separari, & ad quemdam ordinem pervenire, ut singula distincta adparerent. Verum hæ leges fluidorum heterogeneorum non paucas anomalias habent. Nam fluida quædam, si gravitate non multum differant, facile inter se permiscentur, uti aqua, & vinum, aut spiritus vini. Hæc commixtio præpeditur, si ima tubi pars impleatur fluido graviore, quod aliorum binorum gravitatem superet, & cum neutro commisceatur; cuiusmodi est mercurius; eique dein ex utraque parte fluidum heterogeneum affundatur. Quædam fluida, si commiscentur, effervescunt; quædam minus voluminis post commixtionem exhibent, quam summæ utriusque debeatur, uti fit in spiritu vini, & aqua mixtis inter se;

observata enim est voluminis diminutio = $\frac{1}{20}$ voluminis spiritus vini, si huius capiatur pars una, illius duae. Caussa phoenomeni est, quod alterum fluidum in vacua interstitia alterius recipiatur, & quodam modo absorbeatur. Cur particulae corporum graviorum ceu salis, cupri, argenti &c. in fluido specifice leviori non mergantur, attractioni adscribemus suo tempore. Illud tamen ex pressione fluidorum videtur consequi, eiusmodi particulas, si a fluido teneantur attractae, ac suspensae, per omnes fluidi columnas, totamque massam aequabiliter distribui debere. Ad fluida heterogenea pertinent, quae comprimi possunt, ac in diversa altitudine diversam habent densitatem; quale est solus aer inter fluida, quae constringi aliquo vase possunt, & experimentum admittunt. Maior igitur est aeris compressio ac densitas in locis humilioribus, minor in altioribus; nec ex inversa ratione gravitatis specificae, & altitudinis ipsa altitudo tum determinari potest. Reliqua fluida nulla vi sensibiliter comprimi, & in angustius spatium redigi possunt, quod experimento Florentinorum compertum est. Aqua enim intra sphaeram cavam pressa per vim externam adeo comprimi non potuit, ut per poros auri maxime densi potius penetrarit, & instar roris in superficie externa adhaeserit. Animadverte hoc loco 1. Ex isto experimento mira, & incredibilis subtilitas particularum aquae colligi potest, quae per tenuissima interstitia metallorum transit. 2. Id ipsum experimentum non nisi adhibita sphaera capi potuit, cum sphaera prae quovis alio aequali volumine plurimum materiae in se complecti possit; hinc facta compressione, vel contusione spatium internum, in quo fluidum continebatur, minui debuit, augeri non potuit, uti ex Elem. constat.

§. CCXVI.

Pressio virium extranearum in fluida. Si fluidum, quod comprimi & condensari nequit, vasi firmo inclusum vi externa premitur, atque urgetur, omnes illius partes undique premuntur aequaliter, nec ulla earum ab hac pressione motum recipit; motus enim in hac hy-

po-

pothesi concipi non potest, nisi particula una vel plures comprimantur, & condensentur; ponuntur autem particulæ, quæ comprimi, & condensari nequeant; & quia pressio fluidorum in omnem partem propagatur; hinc omnes fluidi partes a vi externa *æqualiter* ex omni parte afficientur. Si frustum ceræ mollis (inquit Gravesandus in Elem. Physices L. II. C. III.) figuræ irregularis, cum ovo vesicæ aquis repletæ includitur, & vesica exacte clausa pyxidi æneæ inseritur, atque hæc operculo obtegitur, ita, ut a vesica sustineatur; pondus 70, aut 80 librarum impositum, neque ovum franget, neque ceræ figuram ullatenus immutabit; propterea quia pressio ex omni parte æqualis est, ita ut illius vis in punctum aliquod corporis directa aliam æqualem, & oppositam habeat ex altera parte. Uti vero omnes partes fluidi æqualiter afficiuntur vi externa, ita eidem æque omnes resistunt. Ob hanc caussam fit, ut aquam stagnantem non nisi insigni dolore vola manus percutiamus: asserem aquæ innatantem eadem facilitate securi findamus, ac si fulcro duro incumberet. Hinc globi plumbei oblique in aquam emissi e bombarda, plani efficiuntur ab ictu, & lapides ita iniecti resiliunt, ceu ab obice immobili; hinc etiam modica aquæ portio, tubo vitreo, aere maximam partem vacuo inclusa, instar plumbi ad fundum allidi sentitur, unde ei *mallei aquatici* nomen inditum est; hinc denique phiala vitrea, aquis plena intruso per vim extraneam subere diffringitur. Quod pisces, aut homines navi onerariæ maximi ponderis subnatantes, magnopere non premantur, mirum non est; non enim navis, vel quodcunque corpus supernatans fluido, maiore vi in subiectam columnam premit, quam volumen fluidi exclusum antea premebat. Ex æquali hac fluidorum pressione intelligi aiunt, cur homo pondus aeris sibi incumbens, quod teste Krafftio non minus, quam 43240 librarum est, sine incommodo ferat. At nempe aer in ipsis partibus mollibus, ac spongiosis corporis animalis contentus eadem vi, qua externus premit, undique resistit. Aucta præter modum pressione externa sane incommodum sentiri urinatores testantur, de quibus infra disseremus; ipso Krafftio teste in Præl. Acad. P. I. §. 307. machina excogitata est, cuius ope in aqua vehementer compressa pisces eidem innatantes moriuntur; cuius ratio sequente §. illustrabitur.

§. CCXVII.

Pressio fluidorum in solida immersa. Omne solidum fluido immersum ab eodem premitur ex omni parte, ac quidem pro ratione altitudinis, seu profunditatis, qua mergitur; & quoniam pressio in superiorem partem solidi a pressione in inferiorem vix differt (cum modica sit altitudinum fluidi differentia) hinc corpora immersa ab omni parte quasi æqualiter premuntur. Si extremitati tubi vitrei alligatur vesica, aut saccus coriaceus, isque immergatur aquæ, ut altera tubi extremitas supra eam emineat, mercurius ob vesicam a fluido compressam intra tubum ascendit, eoque altius, quo profundius mergitur. Unde perspicitur, corpora solida intra fluidum vi pressionis etiam comprimi, si cedant pressioni, & comprimi possint. Imo secundum comment. Acad. Paris. 1737. cum lagena ad 60 orgyas, quarum quælibet 6 pedes continet, fuisset demissa infra aquam, suber ad fundum lagenæ detrusum fuit, linteum pice obturatum intro pressum, & vas fere totum aqua repletum salsa adhuc. KRAFFTIUS P. II. Præl. Acad. §. 138. ait: „ Mihi in mari Baltico naviganti anno 1744. M. „ Augusto, lagena vitrea quadrangula, baseos 4 pollicum quadrat. altitudinis 6 pollic. Londinensium bolidi nauticæ annexa, & demissa, in aliquot orgyarum profunditate fuit confracta. Alias fortiores & „ rotundas ad 46 org. demissas, ibidemque per aliquot „ horas relictas, intactas semper, & omni aquæ gutta „ vacuas iterum extraxi. „ Nempe vasa superius sphærica, quorum latera quoque rotunda & cylindrica sunt, maiorem vim pressionis sustinent; fornicis enim figuram referunt, cuius crassities ex meris quasi cuneis composita est, qui a pressione introrsum cedere nequeunt. Etsi vero corpora immersa pro ratione altitudinis premantur a fluido ambiente; idem tamen pondus semper amittunt, quamdiu idem volumen retinent, nempe id, quod ponderi voluminis extrusi æquale est. Solida specifice graviora in fluido leviore per gravitatem respe-

cti-

Digitized by Google

ctivam descendunt; at, si pressio liquidi ei corpori supra incumbentis impeditur, ac tollitur, solidum gravius a liquido inferiore, & laterali sustentabitur, ut decidere haud possit, uti si cylindro ab utraque parte aperto adplicetur ab inferiore parte lamina plumbea, quae exacte cum margine inferiore cylindri congruit, ut aquam excludat, & lamina filo in eius centro affixo sustineatur, donec ad profunditatem aliquot pollicum immersa sit, ea a pressione aquae sustinebitur, uti relicto filo patet; ad maiorem profunditatem magis arcte cylindro adhaerebit; ad exiguam cadet. Si cum lamina aurea experimentum institueretur, profundius esset immergendus tubus, ut pressio aquae gravitatem respectivam auri superet. Uti vero corpus fluido gravius sustineri potest sublata pressione fluidi incumbentis; sic corpus fluido levius, quod per sese sursum pellitur a fluido, in fundo retinebitur, si pressio aquae inferioris tollitur; si enim fundo vasis cylindrici apprimitur discus ligneus paullo minoris diametri, ut aqua dein infusa infra discum subrepere nequeat, ob planitiem disci, & fundi laevigatam, discus fundo manebit affixus etiam cessante pressione externa; cuius rationem esse volunt, quia omnis fluidi pressio hoc casu deorsum dirigitur, nec quidquam aquae adest, quod pressionem sursum exercere possit; sed nisi fallor, columnae laterales, disci latera ambientes eundem etiam sursum urgent, vi quidem exigua, quae est ut differentia altitudinum columnae incumbentis, & columnarum lateralium ultra superiorem disci superficiem pertingentes; haec igitur vis modica ab adhaesione planorum laevigatorum, de qua alio differemus loco, facile superari potest. Experimentum disci fundo adhaerentis primo protulit Helmontius; unde eiusmodi vas *situlae, vel hydriae Helmontianae* nomen accepit. Henricus Marus in eius basi foramen aperuit, & sequentia observavit phaenomena. 1. Si nihil aquae discum subintrat, is disco adhaeret, nihilque e foramine effluit. 2. Si aqua intercedit inter discum, & fundum, ac foramen paullo capacius sit, abripitur discus a fluido, & aliquantum fundo apprimitur, quoniam aqua affluens nequit sursum premere: si autem foramen parvum est, discus modo ascendit, modo foramini adprimimitur, quia modo decursus aquæ, modo pressio sursum tendens prævalet. 3. Si parum omnino aquæ discum subit, is semper fundo apprimitur ob pressionem sursum debilitatam; 4. Quamprimum foramen obturatur, sive parvum, sive magnum fuerit, discus ascendit; aqua enim redit ad æquilibrium, ac pressionem sursum more suo exerit.

§. CCXVIII.

Campana urinatoria. Cum observatum esset, aerem pressioni aquæ resistere, campanæ urinatoriæ constructæ sunt, quibus urinatores contecti in mare demittuntur ad colligendas margaritas, aut res naufragio perditas recuperandas: referunt illæ figuram campanæ, & ex quavis materia, quam aer non permeat, ceu metallo, vel ligno pice obducto conficiuntur. Urinator insistit scabello, ad orificium, quod deorsum spectat, affixo. Comparata sic machina dum perpendiculariter mergitur, aer ab aqua in summitatem campanæ cogitur; quo fit, ut hominis insistentis caput semper extra aquam emineat, neque aer ad respirationem unquam desit. Quoniam vero eo magis comprimitur aer, quo profundius campana mergitur; hinc urinator magnis incommodis sæpe afficitur, ut sanguis interdum exprimatur oculis, auribus; imo mors consequi possit in profunditate nimia, ob aerem in corpore contentum non æque compressum. In mediocri profunditate demersus urinator egreditur campana, atque pro libitu se eo iterum recipit, ac per integram etiam horam infra aquas commorari potest, donec dato signo a sociis extrahitur. Plura vid. in STURMII Coll. cur. Tent. I. De dæmunculis Cartesianis, cum passim extent in Museis, dicere nihil attinet; ex compressione enim aeris, & ingressu aquæ per subtile foramen eorum motus, ac situs pendet.

§. CCXIX.

Libellæ Hydrostaticæ situi horizontali determinando serviunt. Est autem eiusmodi libella tubus vitreus utrinque clausus, & aqua, vel potius spiritu vini rectificato ferme repletus, ut modica spatii pars bullæ ae-

reæ

Digitized by Google

reæ duos, tresve aut plures pollices longæ relinquatur. Quodsi iam eiusmodi tubus horizontaliter collocetur, bulla aeris supernatans quiescit: si vero inclinetur, ita, ut alterum extremum depressius, alterum vero altius sit, bulla urgebitur versus partem elatiorem, quia secundum Hydrostatices leges fluida specifice leviora ab alio graviore sursum premuntur. Hinc si loco tubi assumitur sphæra vitrea, bulla non nisi in summitate hæret: si vero latera tubi instar lineæ rectæ, aut instar plani sint, tunc sub horizontali tubi positione bulla ubivis quiescet, nec præcise medium locum occupare cogitur, ut adeo sola quies, non item situs bullæ lineam horizontalem indicet; cum in modica tubi longitudine superficies suprema fluidi pro plana sit habenda. Sed raro contingit, ut tubi vitrei præsertim paullo longiores, prorsus recti sint, ac fere curvaturam quandam internam, & sphæroidis valde oblongæ, & compressæ formam habent. Si iam axis minor sphæroidis sit in medio, & axis maior ponitur situ horizontali, bulla hærebit in summitate axis minoris, nempe loco maxime elevato: inclinato axe maiore bulla progredietur versus partem altiorem. Si vero axis minor non fuerit in medio, uti citra singularem industriam raro contingit, bulla extra medium constituta situm horizontalem indicabit, ac tum circa axem minorem conversa priorem situm tuebitur. Illud præterea observandum, bullam calida tempestate esse breviorem, quia spiritus vini se expandens in arctius spatium eandem cogit: contra frigida tempestate, qua is contrahitur, bulla erit longior.

§. CCXX.

Ascensus & Descensus solidorum in fluidis. Solida corpora specifice graviora in fluidis descendunt per gravitatem respectivam, quam habent: contra leviora per gravitatem fluidi respectivam ascendere coguntur: utrinque motus acceleratur, etsi is crescente paullum celeritate facile transire possit in æquabilem, quando resistentia fluidi effectui gravitatis respectivæ æqualis fit. Si corpora immersa volumen mutent relate ad quantitatem materiæ, quam habent; fieri potest, ut in eodem flui-

do

Digitized by Google

do nunc aſcendant, nunc deſcendant. Hinc aiunt, cadavera, quæ primo merguntur in aqua, quodam elapſo tempore iterum emergere, ac poſtea rurſus præcipitari; cum enim primo graviora ſint æquali aquæ volumine, quod excludunt; ſubinde laxatis per aquam fibris, atque aere ſe expandente maius volumen acquirunt maſſa non aucta: poſtea vero elapſo aere, aliisque partibus levioribus diffugientibus, cum ſolidæ partes conſtringuntur, corpus exanime fit compactius, ac ſubſidit. Diximus ſupra, pondus ammiſſum a ſolido immerſo accreſcere fluido; gravitas reſpectiva, ſiquam ſolidum habet, ad deſcenſum impenditur, niſi aliunde ſuſtentetur. Si iam una cum vaſe fluidi pleno e bilance ope fili pendeat corpus ſpecifice gravius fluido immerſum, ita ut eius quoque gravitas reſpectiva ad æquilibrium conferat: tum abſciſſo vel combuſto filo, quo corpus ſuſtinebatur, tolletur æquilibrium, ſurſum elevato vaſe; nec reſtituetur, donec ad fundum vaſis pertigerit corpus. Quamdiu enim deſcendit, gravitas reſpectiva in deſcenſum impenditur tota, neque in bilancem, ut antea, agit, niſi cum ad fundum pervenerit. Hoc experimento, cuius inventor eſt Robert. Hocke, Leibnitius uſus eſt ad explicandam rationem, cur decidente pluvia aer aliquando levior ſit, quam cum ſudum eſt cælum, vel nebuloſum, uti obſervationes borometricæ oſtendunt. Ante imbrem enim totum vaporum pondus admoſphæræ addebatur; imbre vero delabente duntaxat pars ponderis eorundem in atmoſphæram premit. Sed enim ob alias cauſſas non eſt phœnomenon conſtans, ut barometron tempore ſereno altius, pluvio depreſſius ſit.

§. CCXXI.

Gravitas ſpecifica vel denſitas fluidorum. Si idem corpus ſpecifice gravius immergitur diverſis fluidis, pondera ab hoc amiſſa, quæ ope bilancis explorari poſſunt, ſunt ut gravitates ſpecificæ fluidorum. Nam pondus amiſſum ſemper æquale eſt ponderi voluminis fluidi excluſi: idem autem corpus gravius immerſum ſemper idem volumen fluidi excludit: conſequenter pondera fluidorum ſub eodem volumine, id eſt, gravitates ſpecifi-

cifi-

Digitized by Google

cificæ aut densitates eorundem erunt ut pondera amissa a solido. Est hæc methodus omnium optima gravitati specificæ fluidorum determinandæ. Si idem corpus specifice levius diversis fluidis imponitur, ad varias altitudines in iis subsidet, eo maiores, quo fluidum est levius: eo minores, quo fluidum est gravius. Et quoniam hoc casu pondus immersum est constans, eidemque pondus voluminis exclusi semper æquale est; erunt gravitates specificæ fluidorum reciproce ut volumina vel partes immersæ solidi. Huic fundamento innititur *hydrometrum vulgare* (F. XVIII.) id enim impositum e. g. cerevisiæ, mergetur usque ad A; in aqua, quæ levior est, usque ad a; in vino generoso ad b: in spiritu vini ad e. quæ quidem methodus in praxi rudiore sufficit.

§. CCXXII.

Hydrostatica comparatio gravitatis specificæ solidorum. Si in aquam immergantur diversa corpora solida specifice graviora, quæ extrudant volumen aquæ suo volumini æquale, erunt gravitates specificæ eorum corporum solidorum uti pondera absoluta, quæ habent, divisa per pondus in aqua amissum. Sit eiusmodi corpus solidum A; eius pondus absolutum in aere, in quo nihil censetur amittere, quod in praxi communi æstimari queat, sit $= P$; pondus in aqua amissum, sit $= Q$. Gravitas specifica aquæ, ad quam ceu communem mensuram gravitates solidorum referuntur, sit $= 1$. erit $Q : P = 1 : \frac{P}{Q}$. Nam pondus amissum Q est æquale ponderi aquæ sub volumine eodem, quod habet solidum; si autem volumina sunt æqualia, pondera sunt ut gravitates specificæ secundum formulam §. XX. $P = GV$; & si $V = 1$; $P = G$. Igitur quartus terminus $\frac{P}{Q}$ exprimit gravitatem specificam solidi A relate ad aquam. Hæc gravitas specifica sit $G = \frac{P}{Q}$. Sit aliud

soli-

Digitized by Google

solidum B; eius pondus absolutum $=$ p; pondus in aqua amissum $=$ q; erit ex eadem ratione, q : p $= 1 : \frac{p}{q}$; dicatur quartus terminus, qui gravitatem specificam solidi B relate ad aquam exprimit, g. erit igitur G $= \frac{P}{Q}$, & g $= \frac{p}{q}$; ac proin G : g $= \frac{P}{Q} : \frac{p}{q}$. Si volumina corporum immersorum, quæ aqua graviora posui, sint æqualia, gravitates eorum specificæ erunt, uti ipsa pondera absoluta, quæ habent. Sit autem moles stanni, ponderis 300 gran. in aqua amittat pondus 40, 5. divide proinde pondus 300 per 40, 5. quotus erit proxime 7, 4; quæ est gravitas specifica stanni. Si vero corpora specifice leviora merguntur in aquam, eorum gravitates specificæ sunt ut partes immersæ divisæ per totum volumen, quod habent; ac si volumina æqualia sint, directe ut partes immersæ. Sint eiusmodi corpora A & B, volumina a & b; gravitates specificæ G, & g; partes immersæ M, & m; gravitas specifica aquæ $=$ 1. Quia hoc casu pondus corporis immersi & voluminis exclusi æquale est, erit gravitas specifica solidi ad gravitatem specificam ut volumen fluidi æquiponderans, sive ut pars immersa ad volumen totius solidi; igitur erit

$$1.\ G : 1 = M : a;$$

$$2.\ g : 1 = m : b$$

adeoque $G : g = \frac{M}{a} : \frac{m}{b}$; & si $a = b$; erit $G : g = M : m$.

Ex his deducta est sequens tabula gravitatum specificarum, quam ex MUSCHENBROECKIO desumptam propriis experimentis non nihil auxit KRAFFTIUS.

TA-

TABULA

CONTINENS NON NULLORUM CORPORUM GRAVITATES SPECIFICAS.

Æs Iaponicum.	9,000.
Suecicum.	8,784.
Calcinatum.	5,453.
Aurichalcum fusum.	8,000.
Tusum.	8,349.
Argentum purum.	11,091.
Aurum purissimum.	19,640.
Aurea Guinea.	18,888.
Aureus Ludovicus	18,166.
Ducatus	18,261.
Chalybs mollis.	7,738.
Durissimus.	7,704.
Elasticissimus.	7,809.
Ferrum.	7,645.
Mercurius Germanicus.	14,000.
Brittanicus.	13,593.
511 Vicibus destillatus.	14,110.
Mercurius sublimatus corrosivus.	8,000.
Plumbum Brittanicum.	11,325.
Germanicum.	11,310.
Stannum purum.	7,320.
Brittanicum.	7,471.
Zincum.	7,350.
Achates.	2,631.
Agathus.	2,512.
Adamas.	3,517.
Carneolus.	3,290.
Calcedonius.	2,559.
Creta alba.	2,252.
Chrystallus Islandica.	2,720.
Vulgaris.	2,650.
Granatus Bohemicus.	4,360.
Suecicus.	3,978.
Hyacinthus.	2,361.
Iaspis.	2,666.

La-

Lazuli.	3,054.
Lithantrax.	1,240.
Magnes Penſylvaniæ.	4,585.
Marmor.	2,707.
Onyx.	2,510.
Opalus.	2,016.
Silex vulgaris.	2,542.
Terra hortorum.	1,630.
Terra Lemnia.	2,000.
Vitrum puriſſimum album.	3,150.
Viride.	2,620.
Succinum.	1,065.
Lateres duriſſimi.	2,006.
Sulphur vulgare.	1,800.
Alumen.	1,714.
Nitrum.	1,900.
Sal Ammoniacum.	1,453.
Calculus veſicæ humanæ.	1,700.
Corallia rubra.	2,689.
Alba.	2,500.
Cornu bovicum.	1,689.
Cervi.	1,875.
Ebur.	1,325.
Oculi cancri veri.	1,890.
Spurii.	2,480.
Oſſa bovis recentia.	2,222.
Abies.	0,550.
Acer.	0,755.
Buxus.	1,031.
Cedrus.	0,613.
Ebenum.	1,177.
Fagus.	0,854.
Iuniperus.	0,556.
Quercus.	0,929.
Suber.	0,240.
Cera flava.	0,955.
Pix.	1,150.
Aqua pluvia.	1,000.
Deſtillata.	0,993.
Marina.	1,030.
Putealis.	0,999.

For-

Fortis. - - - -	1,300.
Regia. - - - -	1,234.
Aer. - - - - - -	$0,001\frac{1}{4}$.
Acetum vini. - - -	1,011.
Lac bubulum. - - - -	1,030.
Caprinum. - - - -	1,009.
Asininum. - - -	1,021.
Urina humana. - - - -	1,016.
Oleum amygdalarum dulce. - - -	0,928.
Lini. - - - -	0,932.
Olivarum. - - - -	0,913.
Terebinthinæ. - - -	0,792.
Oleum tartari per deliquium. - -	1,550.
Vitrioli. - - - - -	1,700.
Sanguis humanus. - - -	1,040.
Spiritus nitri. - - - - -	1,315.
Vini rectificatus. - - -	0,866.
Vitrioli. - - -	1,203.
Vinum Burgundicum. - -	0,953.
Campanense. - - - -	0,962.
Rubrum ex capite bonæ spei. - -	1,018.
Mosellanum. - - -	0,916.
Canariense. - - - -	1,033.
Cuprum Iaponiæ. - - -	8,830.
Aurichalcum Sinense - - -	8,431.
Magnes. - - -	4,655.
Alius. - - -	4,806.
Alius. - - -	4,778.
Iaspis Russiæ. - - -	2,623.
Porcellana purior. - - -	2,363.
Impurior. - - - -	2,346.
glacies aquæ purissima. - -	0,916.
Spiritus vini gallicus. - - - -	0,933.
Moneta æenea Cæsaris Claudii. - -	8,313.

§. CCXXIII.

Usus Tabulæ. Hæc tabula ita constructa est, ut numeri singulis speciebus adscripti, ceu integri, non ut decimales capi queant; ac tum *pes cubicus* aquæ pluviæ tenebit 1000 uncias, qui numerus ipſi adſcriptus eſt, quam proxime, computando 16 uncias pro libra Amſtelodamenſi; ubi porro uncia tenet 8 drachmas, drachma 60 grana; unde pondus pedis cubici aquei ita prodit $62\frac{1}{2}$ tt. Genus huius ponderis vocari ſolet *averdupois.* Hoc igitur poſito reliqui numeri omnes exhibent pondus pedis cubici ex ſua materia; ſic pondus pedis cubici ex auro puriſſimo erit 19640 unc. vel $1227\frac{1}{2}$ libr. ex marmore 2707 unc. vel $169\frac{3}{16}$. lib. Intelligendus autem eſt pes Rhenanus duodecim pollicum, unde iſtiusmodi pes cubicus tenet 1728 pollices cubicos. Hinc in tabula exhibetur, vel eius ope inveniri poteſt

I. *Ratio gravitatum ſpecificarum*, ſive ponderum ſub eodem volumine unius pedis cubici.

II. *Volumen corporis dato eius pondere.* Detur enim terræ hortorum cumulus, qui ponderet 10 libras. Quæritur, quodnam huius ſit volumen. Invenio huic terræ adſcriptum numerum 1630. Hinc fiat analogia: terræ huius unciæ 1630 efficiunt 1 pedem cubicum ſive 1728 pollices cubicos, quidnam igitur horum efficient 10 libræ, ſive unciæ 160? ac invenitur, hunc terræ cumulum efficere pollices cubicos $169\frac{101}{163}$ in volumine. Eodem modo ſi habeantur fragmenta coralliorum rubrorum, ponderis 7 unc. Quoniam gravitas ſpecifica coralliorum reperitur = 2689; fiat: unciæ 2689 efficiunt unum pedem cubicum, ſive 1728 pollices cubicos; 7 unciæ quid efficiunt? ac reperitur $4\frac{1340}{2689}$ numerus pollicum cubicorum pro volumine.

III. *Dato volumine corporis in pedibus cubicis invenitur eius pondus abſolutum*; eoquod (ex §. XX.) $P = G\,V$. Sit quædam ſuperficies 30000 pedum obtegenda plumbo, ut laminæ plumbeæ craſſities ſit = $\frac{1}{100}$ ped. Erit volumen plumbi $= 30000 \times \frac{1}{100} = 300$. Porro gravitas ſpecifica plumbi Brittanici = 11325. Hinc pondus abſolutum erit 3397500 unciarum; quod ad libras facile reducitur.

IV. *Dato pondere abſoluto corporis, & pondere in aqua amiſſo, reperitur genuina gravitas reſpectiva, & pu-*

puritas dati corporis. Sit examinanda moneta argentea, quæ ponderet in aere $72\frac{1}{4}$ gr. in aqua $65\frac{1}{2}$ gr. Unde pondus amissum æquatur $6\frac{3}{4}$ gr. Dividatur igitur (§. CCXXII.) pondus in aere, quod pro absoluto assumitur, per pondus amissum, ut obtineatur dati corporis gravitas specifica relate ad aquam positam $=1{,}000$. & obtinebitur proxime in hoc casu numerus decimalis 10,704. Sed argenti puri gravitas ex tabula est $=11{,}091$. Ergo oblata moneta non est ex argento puro confecta. Sit dein ducatus aureus ponderis 60 gr. in aere: pondus amissum in aqua sit 3,285 gr. Erit igitur (CCXXII.)

$$Q : P = 1 : \frac{P}{Q} = \frac{60000}{3285} = 18{,}261$$

quæ est gravitas specifica ducati in tabula expressa; quare concludi potest, nummum esse genuinum aurum. Ad hunc igitur locum pertinet celebre inventum ARCHIMEDIS, quo regi HIERONI detexit, coronam auream votivam ab aurifabro elaboratam non constare auro puro, uti rex voluerat, sed argento esse mixtam, uti VITRUVIUS narrat de Arch. L. IX. C. 3. Cum igitur HIERO, indicio facto, hoc est, uti non nulli interpretantur, super lapide lydio fraudem subodoratus esset, paravit sibi ARCHIMEDES massam unam ex auro puro, alteram ex puro argento, utramque eiusdem ponderis cum corona. Hæc tria pondera singillatim vasi aquis perfecte repleto imposuit, ut videret, quantum aquæ volumen quodvis excluderet; observavitque coronam auream eiicere plus aquæ, quam aurum purum, minus autem, quam argentum; hinc legitime conclusit, coronam ex utroque metallo esse mixtam. Si enim corona aurea plus aquæ eiicit, quam massa auri eiusdem ponderis, illa pura & homogenea non est; cum enim ex hyp. pondera utrinque sint æqualia; si gravitas specifica utrinque pariter eadem esset, volumina quoque & coronæ & massæ fuissent æqualia: volumina autem fuisse inæqualia, ex inæquali volumine aquæ eiectæ manifesto colligebatur. Unde ex voluminibus aquæ eiectis quantitas mixtionis determinari potuit. Sit pondus auri puri, argenti, & coronæ $=p$. Ex hyp. enim pon-

Digitized by Google

dera erant æqualia. Pondus seu volumen ab auro puro eiectum $= a$; ab argento $= b$; a corona $= c$. Pondus verum auri in corona $= x$; erit pondus argenti in eadem $= p - x$. Si in eodem fluido res peragatur. erunt pondera corporum homogeneorum, uti volumina, quæ habent: volumina autem horum corporum, uti volumina aquæ eiectæ; hinc erit 1. Pondus p auri puri ad pondus auri x in corona; uti volumen aquæ ab auro puro eiectum ad volumen aquæ a pondere auri x in corona eiectum seu $p : x = a : \frac{ax}{p}$. 2. Similiter de argento erit $p : p - x = b : \frac{bp - bx}{p}$; quartus terminus indicat volumen seu partem aquæ a pondere argenti in corona eiectam; nam pars aquæ eiectæ a corona debetur auro, pars argento inter se mixtis; utraque pars efficit totum volumen aquæ eiectæ a corona; hinc erit $\frac{ax}{p} + \frac{bp - bx}{p} = c$; & $ax - bx + bp = cp$; seu $bp - cp = bx - ax$; denique $x = \frac{\overline{b - c} \times p}{b - a}$.

Ponatur $p = 18$. $a = 1$. $b = 1\frac{1}{2}$. $c = 1\frac{1}{3}$; erit $x = 6$; ac proin $p - x = 12$. Unde in hac hypothesi auro admixtæ fuissent 12 argenti libræ. Sed fuere, qui hanc methodum Archimedis in dubium vocarunt; certe minus eadem exacta est ob insuperabilem difficultatem colligendi aquæ eiectæ copiam, eiusque verum pondus cognoscendi.

C A-

Digitized by Google

CAPUT IV.

De Fluidis Prosilientibus e Lumine Vasorum.

Vix quidquam in hac re certi habetur, quod ultra hypothesin pertingat. Quapropter quæ ad fluidorum motum e lumine vasorum prosilientium pertinet, potius attingenda a nobis, ac delibanda sunt pro instituto operis nostri, quam multis verbis explicanda.

§. CCXXIV.

Definitio. *Lumen* vocatur apertura canalis, ex qua fluidum prosilit. Ipsa vero fluidi columna e lumine prosiliens *iactus* dicitur. Cum vero lumina ponantur finitæ magnitudinis, altitudo fluidi erumpentis æstimatur ex distantia centri gravitatis luminis a libella, sive suprema superficie fluidi.

§. CCXXV.

Propositio. *Fluida ex luminibus vasorum prosilientia ad eandem vasis libellam, sive altitudinem ferri debent; celeritas vero particularum effluentium est in ratione subduplicata altitudinis.* Hæc sunt bina præcipua theoremata ad Hydraulicam, seu motum fluidorum pertinentia, & a Torricellio proposita ad calcem libri secundi de motu gravium, atque a pluribus Auctoribus primo comprobata, ac experimentis stabilita ratione quadam propinqua. Eadem ut demonstraret Newtonus, lamellas aquæ prosilientis, quæ ab incumbente fluido pro ratione altitudinis premuntur, ita consideravit, ac si vi gravitatis descendissent ab ea altitudine, quam supra lumen, vel orificium habent; quantam enim celeritatem vi gravitatis acquisiisset eo descensu; tantam ab incumbente fluido, ac pro ratione altitudinis premente videntur acquirere; quemadmodum igitur celeritas eo descensu acquisita, foret talis, ut ad eandem altitudinem ascendendo pertingerent (§. XC. n. 5.) eaque esset in ratione subduplicata altitudinis, seu spatii percursi (§. LXXXVII.) sic idem in lamellis fluidi e lumine vasis prosilientis debet contingere.

Digitized by Google

Quoniam in fontibus salientibus altitudo iactus aliquantum deficit ab altitudine supremæ superficiei, seu libella aquæ; is defectus adscribi solet primo *impedimento aeris, quo etiam in plures guttulas iactus dividitur*; secundo *particulis e supremo fastigio relabentibus, ac guttulas subsequentes retardantibus; certe aperto orificio guttulæ primo erumpentes altius videntur ferri, & ope Antliæ pneumaticæ subducto aere guttularum dispersio desinit, & maior altitudo iactus obtinetur: si denique columna fluidi prosilientis est inclinata, ut alia via redeant guttulæ, quam ascenderunt, pariter iactus altior observatur*: tertio *frictioni, quam lamellæ aquæ ex luminis asperitate patiuntur, & per quam altitudo in maioribus iactibus magis minuitur, minus in minoribus; ut, cum altitudo aquæ supra orificium est 5 pedum, iactus non nisi $\frac{1}{60}$ ab illa altitudine deficiat; cum vero est 33 vel 44 ped. defectus ad $\frac{1}{11}$ pertingat. Altera propositionis pars cum priore connexa ob leges gravium, ob quas celeritas initialis in ratione subduplicata altitudinis, vel subduplicatæ quam proxima statuitur, multis experimentis sat confirmata est; sed enim cum pressio fluidorum per quamvis sectionem horizontalem æqualiter propagetur, idcirco particulæ ex lumine prosilientes non eæ duntaxat sunt, quæ lumini directe respondent, eive perpendiculariter incumbunt, sed obliquis motibus undique e lateribus confluunt, & in alias incurrunt, ac convergunt ita, ut vena aquæ exilientis paulo infra foramen contracta adpareat, ac Newtonus quidem diametrum venæ contractæ dimidio fere ultra foramen digito ad foraminis diametrum se habere deprehendit ut* 21 : 35. *Unde perspicuum est, ob plurimorum motuum compositionem nec celeritatem, nec altitudinem fluidi prosilientis satis revocari ad calculum posse.* (*§. CCVI. n. VIII.*)

§. CCXXVI.

Corollarium I. Spectatis generalibus principiis fluida eadem celeritate, qua ex luminibus determinatæ magnitudinis prosiliunt, per canales æquales derivari deberent. Verum cum fluidum in longo canali fertur (inquit MUSSCHENBROECKIUS in Elem. Phys. C. XXII.) a pa-a parietibus patitur perpetuo attritum, quo retardatur, & quidem plus minusve pro varia canalis politura, vel asperitate. Cum multis quoque anfractibus inflectuntur canales, resistentiam experiuntur fluidi particulæ, lateribus impactæ resiliunt, ac fluidum à tergo adfluens retardant. Quibus caussis multo minor fluidi quantitas per canales fertur, quam computationes præciperent; imo teste experientia (Hist. Acad. Regiæ An. 1732) si in curvaturis tuborum hæret aer, aqua tantopere retardatur, ut undevigesies minor quantitas, quam par est, transfluat. Idcirco experti artifices super omnes fistularum curvaturas ponunt cucurbitas, recipiendo aeri destinatas. Ideo, inquit laud. Auctor, mirandum non est,' aerem venis animalis infusum, instar præsentis veneni occidere, cum sanguini circulum obeunti, veluti firmissimus obex resistat.

§. CCXXVII.

Corollarium II. Si quod vas depletur, columna fluidi foramini incumbens identidem fit brevior, ac minus premitur, proindeque minore celeritate prosilit; & si celeritates, queis lamellæ egrediuntur, sint in ratione subduplicata altitudinum, eædem similem habebunt motum, ac gravia sursum proiecta; quemadmodum igitur in motu gravium spatia paribus temporibus percursa, sunt uti numeri impares, seu incipiendo ab ultimo tempore ut 1. 3. 5. 7. &c. (§. XC.) ita eodem modo se habebit quantitas fluidi e vase descendentis incipiendo ab ultimo tempore. Hinc derivatur methodus construendi clepsydras ope fluidi, quibus olim veteres utebantur; quæ quidem methodus hoc problemate continetur: *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes, quarum singulæ datis temporibus depleantur, dato tempore, quo depletur totum.* Effluat e. g. omnis in cylindro contenta aqua per datum in eius fundo foramen spatio 12 horarum; sitque idcirco in 12 partes dividendus cylindrus, ut earum singulæ singulis horis depleantur. Fiat quadratum numeri 12, nempe 144. Tum vasis altitudo, qua fluidum pertingit, dividatur in hunc æqualium partium numerum 144. Dico: harum ultima, quæ est prope vasis fundum, ultima, seu duodecima hora depletur; tres proxime superiores hora penultima, seu undecima, quinque ulteriores decima hora; & ita porro sumendo semper superiorum reliquarum partium numeros impares 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ac demum 23 ad vasis extimam superficiem terminatas, quæ hora prima exhaurientur. Ratio intelligitur ex dictis.

Cæterum de motu fluidorum e vasorum lumine profilientium quasdam observationes, ac regulas collegit Mariottus; ut 1. Quo canalis fluidum vehens est amplior respectu luminis, eo fit iactus altior. Sunt tamen limites quidam, ultra quos experientia teste amplitudo canalis nil confert ad augendum iactum. 2. Quo lumina sunt ampliora, eo iactus fit altior; quia tenuis iactus ab aere citius in guttas dispergitur; verum & luminum amplitudo videtur habere limites. 3. Lumina in plana lamella metallica valde tenui, tubo directe imposita, iactum maxime regularem, minimoque cum attritu transmittunt; si vero canalibus imponuntur tubi conici, vel cylindrici altitudo iactus minuitur ob attritum maiorem parietum. De cursu fluminum alio loco differemus.

CAPUT V.

De Resistentia Fluidorum, per quæ alia Corpora moventur.

Qui Newtoni, Euleri, Bernoullii de resistentia medii commentationes spectat, facile intelligit, hanc tractationem æque, ac prior erat, incertam esse, & complicatam, atque in Mechanica omnium fortassis longe difficillimam. Ac resistentiam quidem absolutam a priori determinari haud posse, abunde ostendit Lecchius in Hydrostatica, nec vero experientiæ adhuc collectæ rem decidunt. Quapropter de ratione & proportione resistentiæ maxime differendum est.

§. CCXXVIII.

Hypothesis. *Moveatur sphæra per fluidum continuum, ac homogeneum seu eiusdem ubique densitatis, quodque com-*

Digitized by Google

comprimi, ac condensari nequit. Quoniam motus sphæræ intra eiusmodi fluidum fieri nequit, nisi partes fluidi eodem tempore dimoveantur loco suo, atque ad motum concitentur; hinc sphæra patitur resistentiam, quæ est instar vis motum *continuo* retardantis; cuius effectus (uti in omni vi acceleratrice, vel retardatrice) tempore infinite parvo pariter infinite parvus est; si enim eiusmodi tempore ea motum finitum sphæræ extingueret, tempore finito utcunque parvo omnis extingueretur motus. Porro effectus huius resistentiæ est diminutio quantitatis motus, quam sphæra habet; & si massa ponitur eadem, effectus erit diminutio celeritatis, sive retardatio motus. Ut igitur intelligatur, qua ratione motus quantitas, sive etiam celeritas diminuatur, sequentia sunt spectanda.

I. *Resistentia medii seu fluidi, per quod sphæra transit, est directe ut diminutio quantitatis motus, ac reciproce ut tempus, quo ea durat.* Dicatur resistentia, ceu vis contraria R; tempusculum, quo agit, t; diminutio quantitatis motus in sphæra sit $-q$, posito eius motu positivo seu $Q = MC$, (§. XXVIII.) erit $Rt = -q$; quivis enim effectus eo maior est, quo maior est caussa, & quo longiore tempore agit. Consequenter erit $R = \frac{-q}{t}$.

II. *Resistentia crescit directe, ut densitas fluidi;* nam quo densius est fluidum, eo maior massa eodem tempore impellenda, atque e loco suo dimovenda est.

III. *Resistentia crescit ut quadratum diametri sphæræ;* concipiantur enim binæ sphæræ inæquales, sed eiusdem massæ per idem fluidum, eademque celeritate motæ. Erit numerus partium fluidi ab utraque sphæra dimovendarum, uti est superficies, vel potius dimidia superficies utriusque sphæræ, dum enim hæc per liquidum incedit, ad partes anticas superficiei eiusdem liquidum attollitur, ad posticas deprimitur. Cum igitur superficies sint ut quadrata diametrorum; in eadem ratione erunt resistentiæ.

IV. *Resistentia crescit ut quadratum celeritatis, qua* *ſphæra in fluido progreditur.* Moveantur binæ ſphæræ magnitudine, ſuperficie, denſitate æquales, ſed inæquali celeritate in eodem fluido, ſphæra A celeritate $=1$; B celeritate $=2$; igitur hæc eodem tempore duplam maſſam fluidi, eandemque dupla celeritate impellere, ac dimovere debet; igitur reſiſtentiam ſentiet quadruplam, altera ſphæra A ſimplam. Nam poſitis reliquis paribus, reſiſtentia, quæ ex ſola reactione medii ſecundum leges vis inertiæ oritur, eſt ut quantitas motus communicati. (§. XXX.) Hæc autem quantitas motus eſt ut maſſa, ſeu quantitas fluidi dato tempore dimovenda (quæ quidem maſſa cæteris paribus eſt velocitati proportionalis) & ut velocitas, qua eadem dimovetur, coniunctim.

V. *Si in eodem fluido pari celeritate moventur ſphæræ æquales, ſed inæqualis denſitatis, vel maſſæ, effectus reſiſtentiæ in maſſa maiore ſeu ſphæra denſiore eſt minor.* Quia denſitas fluidi, celeritas, ac magnitudo utriusque ſphæræ eadem eſt, fluidum eodem modo agit in utramque; effectus tamen, ſeu retardatio motus in maſſa maiore eſt minor; cum ea ob maiorem quantitatem motus ac vim, quam habet, facilius reſiſtentiam vincat.

VI. *Ad reſiſtentiam medii etiam affrictus partium mobilis ad partes fluidi, & tenacitas ſeu viſcoſitas fluidi pertinet.* Motus enim in fluido ſine omni frictione concipi nequit: quævis autem frictio, cum ſit inſtar vis contrariæ, motum minuit. Tenacitas autem, ſeu viſcoſitas partium fluidi quæ ex mutua partium earundem attractione oritur, vim quandam a mobili adhibendam requirit, qua ea particularum cohæſio ſuperetur. Hæc reſiſtentia, quæ ex partium tenacitate oritur, ſi ea tenacitas eſt uniformis, rationem velocitatis ſequitur; quia eo ſæpius eadem a mobili adhibenda vis eſt, quo maiore velocitate incedit. Atque idcirco reſiſtentia fluidi ſpectata inertia proportionalis eſt quadrato celeritatis (n. IV.) ſpectata tenacitate celeritati ſimplici. Hanc autem tenacitatis reſiſtentiam experimenta non niſi in fluidis glutinoſis, & in motibus tardiſſimis faciunt ſenſibilem.

SCHO-

Scholion Generale.

Ex his colligi quadam ratione potest, quomodo resistentia ex omnibus caussis coniunctis crescat. Quae de sphaeris diximus, ad alia corpora similia, ac similiter mota adplicari possunt; patet vero eo maiorem esse resistentiam, quo magis obtusa seu compressa sunt corpora. Hinc nautae, ut aquae resistentia instar hypomochlii uti possint, non acie remi eandem findunt, sed latiorem palmulam obvertunt. Si glans plumbea in plures globulos minores dividitur, crescit resistentia, quia superficies augentur medio expositae. Etsi vi gravitatis plumula & plumbum ex eadem altitudine eodem tempore deciderent (§. XCI. n. III.) Tamen magis retardatur plumulae levioris motus ex n. V. huius §. Quae praeterea theoremata demonstrari solent hoc loco, aut incerta sunt, aut difficilem adplicationem habent. Quapropter iisdem supersedere me posse censui. Universae autem Hydrostatices praeclara commoda atque usus varii in omni prope scientiarum naturalium genere, atque adeo in communi vita ex Boylii de medicina hydrostatica praestante opere possunt colligi. Certe de nativa indole plurimorum corporum ex specifica eorundem gravitate maxime iudicium ferri potest, uti cum lapides vulgares ad aquam spectata gravitate specifica sint, ut $2\frac{1}{2}$, ad 1 & stannum ad eandem ut 7 ad 1 proxime; hinc si lapides effossi maiorem gravitatis rationem habent, coniectura fit primo, eas minerales esse, uti magnes habetur passim. De corolliis dubitarunt non nulli, ad plantarum, an lapidum genus sint referenda; at cum eorum gravitas ad aquam sit ut 2, 68 ad 1, lapidibus iisque haud vulgaribus ea adnumeranda videntur. Cum vesicae humanae calculus ad aquam sit ut 1,7 ad 1, nequit is vulgari generi lapidum proprie accenseri. Mercurii gravitas ad aquam diversa deprehenditur, aliquando ut $13\frac{1}{2}$ ad 1, aliquando ut 14 ad 1; hinc ex solo diverso pondere mercurii barometra dissentire possunt. Ex Hydrostaticis legibus plurimae hypotheses, quas ad explicandum lapsum gravium confinxere Veteres; ceu falsae, & naturae repugnantes abiiciendae sunt. De viribus particularibus fluidorum, ob

Digitized by Google

ob quas ea ſeſe mutuo attrahunt, vel ad latera vaſorum elevantur, aut deprimuntur, alio loco diſſerendum eſt. non poſſunt enim particulares leges virium recte exponi, confirmarique, niſi generales Mechanices leges antea recte explicatæ, ac ſtabilitæ ſint, ut ego quidem opinor.

SECTIO V.

De Motu Corporum Curvilineo.

CAPUT I.

De Quantitatibus infinite parvis, vel magnis, earumque Uſu.

Quoniam naturæ operationes motu peraguntur, eiusque ope ad Geometriam revocari poſſunt; præmittendas cenſui hoc loco quasdam notiones, ac lemmata geometrica de quantitatibus infinite parvis, & infinite magnis, cum earum ampliſſimus uſus ſit in genuina Phyſica, neque expoſitio plus difficultatis habeat, quam Veterum de continuo, & infinito diſceptationes, queis adeo teneræ iuventutis ingenia imbuebantur.

§. CCXXIX.

Definitio I. Quando actio virium adpellatur *continua*, ſtricta continuitas temporis intelligenda eſt, vi cuius, ut fluxus temporis nunquam ſiſtitur, ceſſat, vel interrumpitur, ita actio virium toto, quo durat, tempore nullis abrupta morulis, nusquam hiulca, ſed vere continua, ac ſine ulla intermiſſione continuata debet concipi. Hinc poſita vi continuo agente intra datum tempus nullum tempuſculum poni vel concipi poteſt, intra quod ea vis non agat.

Non eſt hic de vi inertiæ nobis ſermo, ob quam ſi quod corpus ad motum eſt determinatum, is motus, quamdiu

diu vi contraria non extinguitur, vere continuatur, sive continuus est. Exolevit enim fere opinatio quorundam Philosophorum celeritatem, ac tarditatem motus per interpositas morulas explicantium. Sed cum de viribus continuo agentibus loquimur, eas intelligimus vires, per quas corpus vi inertiæ præditum continuo sollicitatur ad motum, ut, cum corpus sollicitatione quadam impulsum vel quodam modo animatum vi inertiæ motum conservet, is ob novas sollicitationes continuo crescere, vel si alteri impressæ vi oppositus sit, continuo decrescere debeat. Hinc vires continuo agentes acceleratrices, vel retardatrices sunt (§. LXXXII.) *ceu gravitas, elasticitas, quamdiu corpus elasticum tensum vel compressum est.*

§. CCXXX.

Definitio II. Idea virium (uti ea in mente nostra est in hoc mortali statu) ideam celeritatis continet; idea celeritatis autem spatii ac temporis ideas complectitur. Celeritatem, spatium ac tempus ultra omnes limites determinate adsignabiles crescere, seu augeri posse; in Philosophia Prima §. XVIII. demonstravimus ex ipsa earum rerum, & cuiusvis quantitatis abstracta idea, mentisque nostræ facultate, ideam datæ quantitatis ultra omnes limites iterandi, atque ampliandi. Nunc eum maturior ista res videtur, præterea demonstrandum est, eas quantitates, nempe celeritatem, spatium ac tempus ultra omnes limites determinate adsignabiles imminui posse, atque infinite parvas poni.

§. CCXXXI.

Propositio I. *Spatium ac tempus abstracte spectatum indefinite, id est, ultra omnes limites determinate adsignabiles imminui potest.* Dem. F. XIX. T. IV. Recta A C fixa in C, convertatur circa hoc punctum C motu æquabili, ut acquirat situm a C; utque bini radii A C, a C instar binarum regularum spectari queant. Perspicuum est, quod, si eæ rectæ distent in punctis extremis A, & a, semper ac necessario etiam distent circa puncta intermedia M, & m; minus tamen, quam in A & a, Hinc

Digitized by Google

Hinc si minor intermediorum punctorum distantia transferri concipiatur in puncta A, & a, semper habebitur quædam punctorum istorum distantia, eaque indefinite imminui debebit, ut nullus huius imminutionis limes adsignari, vel intelligi queat, ut in Phil. Prim. §. LIX. n. III. ostendi de binis regulis. 2. Dum recta C A convertitur circa C, progrediente puncto A, quodvis intermedium punctum M eodem tempore progreditur, ut arcus maior A a, & arcus minor M m eodem tempore describatur; neque concipi potest tempusculum, quo punctum A movetur, punctum M non movetur; secus recta C A non maneret recta, sed inflecteretur contra hyp. Hinc *numerus progressuum* utrinque æqualis est, ipsa autem *magnitudo progressuum* sive arcus utrinque descriptus est inæqualis, nempe in ratione radiorum C A, & C M; quoniam motus æquabilis est ex hyp. & tempora motus in punctis A & M constantia, erit celeritas inæqualis nempe in ratione spatii, seu arcus descripti; neque ista celeritatum inæqualitas per interiectas morulas intelligi potest; quia puncto A progrediente nequit ullum intermedium punctum M quiescere salva rectitudine rectæ C A; deberet autem punctum M tardius incedens aliquando quiescere, & plures habere morulas, vel longiores, si celeritatum inæqualitas ex interiectis morulis oriretur. His positis, quæ omni carent obscuritate, si minor celeritas puncti M transferri concipiatur in punctum A; erit dein istius velocitas minor, quam antea, & minor etiam quam antea erit velocitas intermedii puncti M; erit tamen istius aliqua semper velocitas, quamdiu movetur punctum A. Quodsi hæc minoris velocitatis puncti M in punctum A translatio iterum iterumque, ac sine fine concipiatur repeti, semper erit aliqua puncti utriusque velocitas, sed ea sine ullo limite imminui intelligetur.

Celeritatem motus indefinite imminui posse ex ipsa spatii divisibilitate in infinitum consequitur. Nam linea fluxu puncti gignitur; si ergo indefinite linea minuitur, is fluxus, seu motus ac tempus necessario in plures, ac plures partes, sed easdem minores dividi intelligitur. Abundat tota Geometria, omnesque RR. Geometrarum, atque etiam Physicorum libri istiusmodi exemplis, ac demon-

stra-

Digitized by Google

strationibus. Unicam præterea adnectam sane perfacilem. Sint F. XX. parallelæ A B, C D, quas in infinitum posse produci, in Phil. Prim. §. XVIII. positive demonstravi. Earum distantia sit quævis perpendicularis F G; assumto pro arbitrio puncto E ducatur quæcunque recta obliqua E H secans rectam F G in K, & agatur I H parallela ad F G. Dico rectam F G indefinite dividi posse. Sit enim constans F G = a, & E F = b; variabilis autem, & utcunque crescens E I = x; erit ex Elem. E I : I H (F G (= E F : F K seu x : a = b : F K = $\frac{ab}{x}$. Fieri igitur non potest, ut F K fiat = 0; deberet enim aut a, aut b esse nullum, ac evanescere. Eo minor autem fiet F K, quo maior est divisor, seu quantitas variabilis x; quæ cum in infinitum augeri possit, necessario recta F K in infinitum minuetur. Si motus, qui in natura fiunt, expendimus, cito deprehendimus, numerum partium, in quas quodvis spatium, ac tempus dividi debet, omnem nostram imaginandi vim excedere. Certe spectata divisibilitate materiæ, de qua §. XXII, & in Schol. gen. §. XXXII. n. III. nonnulla adnotavimus, parum dicitur, si in longitudine unius lineæ statuuntur particulæ 1000000, quas successive percurrere debet corpus, quod movetur; hinc cum pes contineat 144 lineas, in longitudine unius pedis ponendæ sunt particulæ 144000000; & quoniam globus tormentarius iusta pulveris quantitate excussus secundum Mersenni calculum intra 1'' conficit 600 pedes, idem successive percurret particulas 86400000000; totidem ergo minora tempuscula concipienda sunt intra unum minutum secundum, sive intra tempus illud, quo homini sano, ac mediæ ætatis arteria semel pulsat; motus enim fit successive, ut singulæ particulæ spatii intra totidem particulas temporis percurrantur. Sed maior adhuc numerus invenitur ex velocissimo astrorum motu. Mercurius, qui ex planetis soli proximus est, intra 1'' circiter 24000 pedes emetitur, proinde particulas spatii 3456000000000; & quoniam cometa An. 1680, dum valde propinquus soli erat, celeritate sua ipsam Mercurii velocitatem octies superavit, intra 1'' universe percurrit particulas spatii 27648 000 000 000. In tot igitur mi-

minora tempuscula unicum minutum secundum reipsa divisum fuisse intelligitur; & quoniam celeritas motus ultra omnes limites determinate adsignabiles augeri potest, eo ipso tempus indefinite posse dividi perspicuum est.

§. CCXXXII.

Definitio III. Infinite magnum, & infinite parvum in Geometria adpellamus, quod augeri, & minui posse ita concipimus, ut simul intelligamus, nullum incrementi, vel decrementi necessarium limitem posse adsignari, donec quantitas aucta, vel imminuta datam quandam rationem obtineat.

Hæc notio exemplis illustranda est. 1. *Quando latera polygoni circulo inscripti, vel circumscripti dicimus infinite parva, denotamus, eorum numerum ita augeri, & magnitudinem ita imminui posse, ut nullus augmenti, & decrementi limes queat adsignari, donec id polygonum rationem æqualitatis cum circulo habeat; cumque quodvis latus polygoni circulo circumscripti sit tangens circuli, latus vero polygoni inscripti chorda; idcirco pro arcu minimo sumimus tangentem, chordam, vel etiam sinum rectum infinite parvum; quia hæc ita imminui posse intelligimus, ut ad æqualitatem cum arcu minimo accedant.*

2. *Summam progressionis arithmeticæ e. g.* c, $2c$, $3c$, $4c$ - - C; *cuius numerus terminorum ponitur* T, *dicimus æquari facto ex termino ultimo* C *in dimidium terminorum numerum; si primus terminus* c *est infinite parvus, hoc est, si nullus imminutionis limes adsignari possit, donec fiat* $\overline{c+C} \times \frac{1}{2} T = \frac{CT}{2}$. *Si ergo terminus primus* c *denotet celeritatem infinite parvam, hoc est, talem, quæ semper imminui potest ultra omnes limites, erit summa progressionis revera æqualis* $\frac{CT}{2}$.

Sit enim inter summas $\overline{c+C} \times \frac{1}{2} T$, & $C \times \frac{1}{2} T$

ali-

aliqua differentia e. g. D; *igitur quantitas c non intelligitur ultra omnes limites determinate adſignabiles imminuta*, *neque eſt infinite parva*, *ſive talis*, *quæ eousque imminui poſſe intelligitur*, *donec data ratio æqualitatis obtineatur. Ex his iam habetur vera demonſtratio geometrica de ſpatiis motu uniformiter accelerato confectis* (§. *LXXXIV.*) *ſed hoc ipſum continetur ſequenti lemmate.*

§. CCXXXIII.

Lemma I. *Omnes quantitates variabiles*, *quæ creſcendo*, *vel decreſcendo ad æqualitatem accedunt propius*, *quam pro data qualibet differentia*, *fiunt ultimo inter ſe æquales.* Dem. Nam ſi ultimo eſſent inæquales, earum differentia quædam foret determinata e. g. D; Non poſſent igitur ad æqualitatem accedere propius, quam pro eadem differentia D; quod eſt contra hyp. ponuntur enim ad æqualitatem accedere propius, quam pro quavis data, id eſt, determinate adſignabili differentia.

§. CCXXXIV.

Lemma II. *Quantitates*, *quæ creſcendo*, *vel decreſcendo ſemper eandem inter ſe rationem ſervant*, *etiam primo*, *dum naſcuntur*, *vel ultimo*, *dum evaneſcunt*, *eandem rationem ſervabunt.* Si enim primo, dum naſcuntur, vel ultimo, dum evaneſcunt, eandem rationem non ſervarent; ſequeretur, eas *non ſemper* eandem rationem ſervare; quod pariter eſt contra hypotheſin.

Demonſtrata ſpatii ac temporis diviſibilitate, *poſitaque notione infinite magni*, *&* *infinite parvi*; *ac explicato hoc gemino lemmate*, *quorum utrumque axiomatis vim habet*, *de quantitatibus infinite parvis ac magnis*, *earumque uſu diſſerendum eſt pro inſtituto noſtro.*

§. CCXXXV.

Definitio IV. Incrementa, vel decrementa quantitatum variabilium tempuſculis infiniteſimis, ſeu infinite parvis debita, adpellantur quantitatum earundem *diffe-*

rentiæ, *elementa*, *quantitates nascentes*, *vel evanescentes*, *aut fluxiones.* Quævis quantitas variabilis, seu fluens, id est, quæ continuo motu seu continua actione gignitur, vel extinguitur, concipi potest ac debet perducta ad eum statum, in quo est, per eiusmodi elementa, seu continua incrementa, vel decrementa infinita, sed infinite parva, id est, omni quantitate adsignabili minora. Nam continuus motus, vel continua actio non fit, nisi intra tempus continuum; quemadmodum ergo quodvis datum tempus est divisibile in infinitum, sive in tempuscula infinitesima; ita singulis tempusculis, cum ex hyp. motus & actio sint continuæ, singula incrementa, vel decrementa respondere intelliguntur, eaque numero infinita, id est, plura, quam numero determinato adsignari, vel exprimi queant, quemadmodum tempus datum in plura tempuscula, quam determinate adsignari, vel exprimi queant, dividi potest.

Sit eiusmodi quantitas variabilis ea celeritas, quæ vi acceleratrice gignitur, sitque illa determinata, sive talis, ut per eam successive genitam spatium 15 *ped. intra* 1'' *conficiatur. Hæc celeritas, cum intra tempus continuum unius minuti secundi sit genita, concipi debet collecta ex infinitis incrementis infinite parvis, uti unum minutum secundum ex infinitis tempusculis infinite parvis, quorum cuivis ob continuam actionem vis acceleratricis aliquod incrementum celeritatis respondet, coalescit; id quod ex notione motus vel actionis continuæ, & ex infinita divisibilitate temporis omnino perspicuum est. Ob hanc caussam, cum omnis data quantitas, quæ continuo motu, vel continua actione gignitur, ex eius elementis, vel differentiis infinitesimalibus coalescat, calculus, quo eiusmodi differentialia adhibentur, infinitesimalis nuncupatur; cuius est duplex methodus:* 1. directa, *quando cognita finitarum quantitatum ratione, & relatione ad se invicem invenitur relatio differentialium: quibus dein proportionales ostenduntur aliæ quantitates finitæ, quarum proin ratio hoc modo definitur.* 2. inversa, *si immediate habetur ratio, ac relatio differentialium, ex ea ratio finitarum quantitatum deducitur, quæ sunt differentialium summæ. Priori methodo continetur calculus* differentialis: *altera* integralis.

Quan-

Quantitates variabiles, id est, quæ continuo crescunt, vel decrescunt, extremis alphabeti literis x, y, z designari solent; quantitates constantes, id est, quæ aliis mutatis eædem manent, primis literis a, b &c. differentialibus simplicis alicuius quantitatis litera præfixa d indicatur; ut d x est infinitesima quantitatis variabilis x. Summa e contrario omnium differentiarum finito tempore collectarum exprimitur litera ſ. Sic ſ x d x denotat summam ex omnibus productis x in suas differentias d x. Signum quantitatis infinitæ est ∞; *& proinde infinite parva quantitas generatim exprimitur per fractionem* $\frac{1}{\infty}$; *Eo minor enim fit fractio manente numeratore, quo maior fit denominator; hoc crescente in infinitum, ea decrescit pariter in infinitum. Ut iam propositæ notiones quodam schemate illustrentur, sit*

§. CCXXXVI.

Hypothesis. F. XXI. T. IV sit curvæ A C F abscissa A B, ordinata B C; in C tangens C T. Agatur alia ordinata b c T, quæ sibi parallela, motuque uniformi feratur ad ordinatam B C, ut punctum c partim ascendendo ad ordinatam B C, partim accedendo ad abscissam A B curvæ arcum C c designet, & punctum T partem tangentis T C, donec tota b c T congruat cum ordinata B C. Perspicuum est 1, abscissas A B, A b, ordinatas B C, b c, areas A B C, A b c, quæ abscissis, ordinatis, & arcubus curvæ comprehenduntur, esse quantitates variabiles; 2. Si curvam A F continuo, & regulari fluxu puncti generari concipitur, duplicem esse eiusdem velocitatem; nam alia est velocitas E C in puncto c parallela abscissæ, sive secundum directionem abscissæ parallelam; alia est velocitas E T parallela ordinatæ, sive secundum directionem ordinatæ parallelam; Dico: si punctum c eo, quem posuimus motu, curvæ arcum designet, erit velocitas E C abscissæ parallela, *fluxio* vel *differentiale abscissæ*: velocitas E T ordinatæ parallela est *fluxio* vel *differentiale ordinatæ*: rectangulum B C b E. est *fluxio* vel *differentiale areæ*: denique differentiale & incrementum nascens curvæ est recta C T.

Digitized by Google

De fluxione abſciſſæ res manifeſta eſt; dum enim recta bcT accedit ad BC, donec cum ea congruat, utrumque punctum c & T velocitate abſciſſæ parallela eodem tempore conficit idem ſpatium ſeu intervallum expreſſum per rectam EC; hæc igitur erit velocitas abſciſſæ parallelæ, quam adpello fluxionem, vel differentiale abſciſſæ. Altera velocitas parallela ad ordinatam BC in puncto T videtur exprimi per ET, in puncto c per Ec; eſtque reipſa maior in T, quam in c, antequam utrumque punctum adpellit ad C; verum quo propius puncta c & T ad C accedunt, eo minor fit utriusque velocitatis differentia, ſicut ipſa puncta c & T continuo ſibi propiora fiunt, ac demum in C utriusque puncti velocitates tum ad abſciſſam, tum ad ordinatam parallelæ fiunt omnino æquales, quia in eo limite C utrumque punctum æquidiſtat a recta AB, nempe intervallo BC, quod quidem intervallum velocitatem ordinatis parallelam, quæ in C datur, exprimit; & quamvis eodem tempore, quo puncta c & T veniunt in C, eodem adpellat etiam punctum E, non tamen huius, & illorum velocitates abſolutæ in C æquales fiunt; quia puncta c & T non ſola directione ad abſciſſam parallela, quemadmodum punctum E, ſed etiam directione parallela ad ordinatam habent motum; quapropter puncta c & T non ideo præciſe in limite C velocitatem obtinent, quia arcus Cc & recta TC evaneſcunt; nam & recta EC ibidem evaneſcit, ſed quia ea puncta parem ſecundum utramque directionem tam abſciſſæ, quam ordinatæ parallelam, velocitatem in eo limite habent. Hinc ea velocitas reſpectu utriusque puncti c & T eodem modo in utroque puncto exprimenda; & quoniam velocitas ordinatæ parallela in puncto T exprimitur per ET, debebit eadem etiam ſpectando punctum c per ET exprimi, ſemper indicando velocitatem punctorum, qualis eſt in limite C, ut adeo ratio velocitatum, ſive ratio, quam habet fluxio abſciſſæ ad fluxionem ordinatæ ſit $=$ EC: ET. Denique ſi recta BC ſibi parallela fluere concipitur verſus P, fluxio vel differentiale areæ erit rectangulum BCbE ſpectata ea velocitate quam punctum c habet in limite C; cumque velocitas tam abſciſſæ quam ordinatæ parallerallela punctorum c & T in limite eadem fit, recta CT tum tangentem tum arcum nascentem designabit, quia arcus curvæ non nisi bina illa velocitate designari concipitur.

Fortassis in hunc modum contra dicta obiicies; si a punctis c & T ventum est in C, non potest in hoc curvæ seu spatii puncto C concipi illorum punctorum velocitas quædam; quoniam omnis velocitas vi notionis suæ continuum tempusculum & continuum spatiolum requirit, ut proinde in unico puncto nulla velocitas, nulla velocitatis idea habeat locum. Respondeo: Nulla in unico puncto concipi potest velocitas, quæ dicitur actualis, *sive ut Scholastici aiunt, velocitas in actu secundo; hæc enim continuum tempus, & continuum spatium involvit. At concipi potest in unico spatii & temporis puncto velocitas, ut aiunt, potentialis, sive determinatio, quæ puncto fluenti & curvam generanti inest ad certam velocitatem actualem, sive ad certum spatiolum certo tempusculo conficiendum. Igitur puncta fluentia c & T in ipso curvæ puncto C, atque eo ipso momento, quo ibi existunt, determinata sunt ad habendam certam velocitatem secundum directionem tam abscissæ, quam ordinatæ parallelam. Ea determinatio cuivis spatii ac temporis limiti indivisibili respondet, etsi velocitas, seu motus actualis continuum tempus ac spatium requirat. Si quæras, quæ sit idea huius determinationis, seu velocitatis potentialis, sive quomodo eam nobis repræsentemus? R. Eam & concipimus & metimur ex spatiolo, quod certo tempusculo vi eiusdem determinationis non mutatæ, aut variatæ confici posset, ac deberet. Hinc ii, qui quantitates fluentes ac variabiles, ac fluxiones adcuratius explicant, per fluxiones non intelligunt quantitates, quæ fluendo generantur tempusculo infinitesimo celeritate continuo variata ob continuam actionem virium, sed intelligunt velocitatem ipsius fluxus, quam metitur quantitas generata per velocitatem constantem, hoc est, intelligunt velocitatem potentialem, quæ cuivis spatii, ac temporis puncto respondet, & quam nobis repræsentamus ex spatio intra datum tempus confecto. Rem hanc evidenti, ni fallor, exemplo ponam ob oculos, ut omnis tollatur obscuritas, simulque veritas huius methodi ac notionum propositarum clarissime sese menti ingerat.*

Corpora gravia nostræ telluris, quando libere decidunt, intra 1'' *conficiunt* 181 *digitos. Ponatur id esse spatium, quod eo tempore præcise, adcurateque conficitur; nihil enim interest hoc loco, si defectus, qualis qualis sit, penitus negligatur. Porro hac celeritate lapsu libero intra minutum secundum acquisita, si deinceps uniformiter seu motu æquabili cessante nova actione gravitatis pergerent, intra proximum minutum secundum percurreretur spatium duplum prioris* = 362 *dig.* (§. *LXXXIV.*) *Concipiatur iam quodvis corpus vel punctum A quacunque directione hac moveri velocitate uniformi, ac constante, ut intra quodvis minutum secundum conficiat* 362 *digitos; sitque aliud punctum B, quod incipiat vi gravitatis, quæ prope telluris superficiem obtinet, libere descendere, motumque uniformiter accelerare. His positis manifestum est.* 1. *Hoc punctum B, antequam omnes particulæ primi minuti secundi effluant, habebit minorem velocitatem, quam punctum A: posteaquam vero iam penitus præterlapsum est primum minutum secundum, habebit B celeritatem maiorem, quam A.* 2. *Quoniam puncto decidente B celeritas continuo crescit, nullo determinato tempusculo eius motus erit æquabilis, nec durante primo minuto secundo æquabilis illi, qui datur in puncto A; cum tamen punctum B a minore celeritate ad maiorem transit per omnes gradus intermedios, inter quos est velocitas puncti A, concipi potest, ac debet limes temporis, & spatii, in quo punctum B continua gravitatis actione ad eiusmodi velocitatem determinatum est, ut si inde ab eo limite celeritate acquisita & motu uniformi per vim inertiæ progrederetur, idem spatium eodem tempore conficeret, quod confici ponitur a puncto A. Ex his, quæ plane manifesta nemini non esse debent, pari perspicuitate intelligitur* 3: *velocitates punctorum A, & B ad æqualitatem accedunt ita, ut differentia fiat minor quavis adsignabili.* 4. *Datur limes quidam spatii, per quod fit descensus puncti B, & temporis, quo fit is descensus, in quo limite omnis velocitatum differentia denique evanescere, & velocitas utrinque æqualis fieri debeat, etsi hæc æqualitas nec ante illum limitem, nec postea, si liber descensus puncti B vi gravitatis continuetur, dari queat.* 5. *Æqualis illa puncti utriusque velocitas, unico & indivisibili temporis, ac spatii puncto respondet, proindeque duntaxat*

po-

potentialis celeritas est , seu determinatio puncti B idem spatium , quod punctum A intra minutum secundum conficit , eodem tempore conficiendi vi huius determinationis sive celeritate invariata. Hæc enim idea est eius determinationis , sive celeritatis potentialis , ut celeritate constante certo tempore certum spatium confici debere concipiamus , etsi nec motus actualis intra punctum spatii ac temporis dari possit, nec, si motus puncti B vi gravitatis continuetur, is reipsa æquabilis sit. Puto iam , nihil ad genuinam & Physicam rei totius explicationem deesse. Salvus igitur ac integer manet in usu infinitesimalium rigor geometricus demonstrandi , neque unquam pro æqualibus sumuntur ea , quibus aliqua differentia utut minima reipsa competit ; sed dum quædam quantitates ad æqualitatem ita accedunt , ut in quodam limite omnis differentia evanescat , hanc limitis æqualitatem iis quantitatibus adsignamus ; quamquam sive in usu infinitesimorum dicamus , ea contemni , & negligi , sive veram æqualitatem indicemus , error nullus est ; siquis enim reipsa esset , is in se foret determinatus & finitus ; & cum infinitesima decrescant ultra quosvis limites , etiam is error decresceret ultra quosvis limites , proinde etiam infra limites erroris vere existentis ; quod absurdum esse nemo non videt ; esset enim error ipsi simul æqualis , simul minor. Hinc pro generali regula sumi potest : Quantitates finitæ , & in se determinatæ eam habent rationem inter se adcurate , quæ in iis invenitur contemtis quibuscunque quantitatibus , quæ respectu earum sunt infinitesimæ cuiuscunque ordinis.

§. CCXXXVII.

Definitio V. *Quantitas infinitesima primi ordinis* est quævis quantitas ad arbitrium assumta , quæ concipitur imminuta ultra quoscunque limites ; quantitas vero *infinitesima secundi ordinis* est , quæ ad infinitesimam primi ordinis se habet , sicut infinitesima primi ordinis ad quantitatem finitam. Sit quantitas finita 1 , infinitesima primi ordinis $\frac{1}{\infty}$; habebitur infinitesima secundi ordinis, si fiat : $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$. Eodem modo quantitas infinitesima tertii ordinis est, quæ se habet ad infinitesimam ordinis secundi, sicut hæc ad infinitesimam ordinis primi; fiat igitur $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^2} : \frac{\infty}{\infty^4} = \frac{1}{\infty^3}$. Binæ quantitates infinitesimæ, quæ eam ad se rationem habent, quam quævis finita quantitas habet ad aliam pariter finitam, sunt eiusdem ordinis, rationemque finitam habere dicuntur. Quapropter cum diversi sint infinitorum, & infinitesimorum ordines, si plures quantitates variabiles connexæ sint, adcurate dispiciendum est, cuius ordinis sint singulæ.

Diversi eiusmodi ordines tum ex ipsa natura proportionum, tum ex Lemmate II. (§. CCXXXIV.) haud ægre percipiuntur. Sit enim F. XIX. T. IV. arcus circuli B D infinitesimus primi ordinis, erit eiusdem arcus chorda B D, sinus rectus D E, tangens B T eiusdem arcus pariter infinitesimæ primi ordinis, rationemque inter se finitam habebunt; cumque diameter sit quantitas finita, arcus B D infinitesimus, erit E B respectu diametri quantitas evanescens, & pro A E sumi potest A B; cum igitur ex Elem. sit A E (A B) : D E = D E : E B; hoc est, sinus versus E B ad infinite parvam D E, uti hæc ad finitam A B, erit sinus versus arcus infinitesimi B D infinitesimus ordinis secundi; cumque sit C B : C T (C D) = E B : D T; erit excessus D T secantis arcum infinite parvum supra radium pariter infinitesimus ordinis secundi, atque ita porro de aliis.

§. CCXXXVIII.

Corollaria. I. Factum ex quantitate finita in infinitesimam primi ordinis, est infinitesimum ordinis eiusdem; nam in omni facto productum est ad multiplicandum, ut multiplicator ad unitatem; hinc si quantitas finita ponitur $= a$; infinitesima dx; erit $1 : a = dx : a\,dx$; quemadmodum igitur prima ratio est finita, ita & secunda, h. e. dx & $a\,dx$ sunt eiusdem ordi-

di-

Digitized by Google

dinis. Est autem ex hyp. dx ordinis primi; igitur & $a\,dx$ ordinis primi.

II. Factum ex infinitesima primi ordinis in infinitesimam ordinis eiusdem, est infinitesimum secundi ordinis. Nam ex natura multiplicationis est $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$.

III. Universe factum ex infinitesimis quantitatibus quotcunque cuiuscunque ordinis est infinitesimum ordinis illius, qui resultat ex summa ordinum omnium quantitatum in se ductarum; si enim primo binas quasvis in se ducas, factum erit infinitesimum eius ordinis, qui resultat ex summa ordinum binarum quantitatum; tum si hoc factum ducas in tertiam, factum erit infinitesimum eius ordinis, qui resultat ex summa ordinum facti primi, & quantitatis tertiae; atque ita porro.

Cum in posterum adplicationes quasdam notionum, & lemmatum hactenus expositorum subiiciemus, per tempusculum, spatiolum, & universe per quantitatem infinite parvam denotamus infinitesima primi ordinis, nisi exprimatur alius ordo inferior. Quodvis autem spatiolum, vel tempusculum a puncto spatii vel temporis, quod momentum adpellant, utique distinguendum est. Punctum enim spatii vel temporis est limes earum indivisibilis: spatiolum autem quodvis, ac tempusculum ultra omnes limites dividi posse demonstravimus.

§. CCXXXIX.

Adplicatio Lemmatum.

I. *Spatium celeritate finita & constante confectum intra tempusculum infinitesimum est infinitesimum primi ordinis.* Nam cum sit $S = CT$, erit hoc casu spatium uti factum ex quantitate finita C in infinitesimam T. §. praec. n. I. Idem patet ex eo, quod spatia celeritate constante confecta sint ut tempora; quemadmodum ergo tempori finito spatium finitum; sic tempusculo infinitesimo primi ordinis spatium eiusdem ordinis respondet.

II. *Celeritas per vim acceleratricem quamlibet quodam tempusculo genita, est infinitesima primi ordinis.* Si enim vis acceleratrix celeritatem finitam gigneret intra tempusculum, tempore finito, quod infinitis constat tempusculis; infinita gigneret incrementa celeritatis finitæ, id est, celeritas evaderet omnino infinita; quia vis acceleratrix continuo agit, & corpus vi inertiæ acquisitam celeritatem semper conservat; igitur corpus tempore finito infinitos gradus celeritatis finitæ, id est, celeritatem plane infinitam acquireret; nulla igitur vis acceleratrix tempore infinite parvo celeritatem finitam acquirit; si autem vis acceleratrix non nisi infinitesimam secundi ordinis celeritatem gigneret quodam tempusculo, hæc celeritas tempore finito non nisi infinitesima primi ordinis, hoc est, nulla evaderet; nam infinite parvum respectu finiti evanescit.

III. *Spatium celeritate infinite parva intra tempusculum infinitesimum percursum, est infinite parvum, seu infinitesimum secundi ordinis.* Nam celeritate *finita* intra tempusculum iufinitesimum percurritur spatiolum infinite parvum primi ordinis (Ex n. I.) igitur celeritate infinities minore spatium infinities minus eodem tempore conficitur, nempe infinitesimum ordinis secundi. Id non obstat, quo minus spatium vi acceleratrice confectum tempore finito pariter finitum evadat; nam intra tempus finitum infinita spatiola secundi ordinis per singulos celeritatis gradus confecta, & simul infinita incrementa graduum celeritatis in unum coalescunt; hinc spatium tempore finito confectum per binos ordines ex infinita parvitate ascendit, h. e. finitum evadit.

IV. *Quæcunque ponatur vis acceleratrix vel retardatrix uniformis, sive variabilis in quacunque ratione, motus intra tempusculum infinitesimum habendus est pro æquabili, aut poni potest, celeritatem intra id tempusculum genitam eius tempusculi initio totam fuisse productam.* Dicatur enim celeritas ante tempusculum d t acquisita C, quæ sit finitæ magnitudinis: celeritas intra tempusculum d t sit c iufinitesima primi ordinis; erit spatium expressum per C d t infinitesimum primi ordinis, spatium vero confectum celeritate c infinite parva quantumcun-

que

que variabili confectum intra idem tempusculum d t, erit infinitesimum ordinis secundi , hoc est , nullum; proinde motus tempore infinitesimo habendus est pro æquabili. Si autem tempusculo infinite parvo solum ratio habetur celeritatis de novo productæ, ea etsi sit infinite parva; tamen, quoniam id tempusculum in infinitas particulas est divisibile, pariter ex infinitis particulis, quas *sollicitationes* adpellant, coalescit; hinc si ratio celeritatis intra id tempusculum genitæ petitur, revera petitur celeritas finalis sive in fine eius tempusculi acquisita; cumque sit $S = \frac{C\,T}{2}$ (§. LXXXIV.) & tempusculum ponatur constans, erit C seu celeritas finalis $= 2\,S$; hoc est, æqualibus tempusculis infinite parvis celeritas, ac proin ipsa etiam vis acceleratrix, cuius ea mensura est, eandem rationem habet, ac duplum spatiolum infinite parvum secundi ordinis, quod mobile ob celeritatem tunc productam percurrit. Ac si vis acceleratrix ea variari ponitur in ratione quadam distantiarum, tamen ea pro constante, & uniformi habenda est, quia intra tempusculum infinitesimum spatium confectum, seu variatio distantiæ non nisi infinitesima secundi ordinis est; quod quidem plenissime intelligetur, si in memoriam revocentur ea, quæ in Schol. §. CCXXXVI. de celeritate invariata supra diximus.

Spectata divisibilitate temporis ac spatii, ac notione continui manifestum est, lineam non constare ex adgregato punctorum, sed ex aliis lineis minoribus, ac generari fluxu continuo puncti: nec superficiem ex lineis constare iuxta se positis, sed motu lineæ produci; denique nec solidum ex superficiebus sed ex aliis solidis minoribus componi, quæ continuo fluxu superficiei generantur. Hæc cum parum expenderent Veteres Physici, ac Metaphysici, in maximas tenebras, atque innumerabilia sophismata inciderent, quæ passim in scriptis Veterum Philosophorum, cum de continuo disputant, reperire est; illud ego miror, hæc principia ac lemmata geometriæ infinitorum superiora captu discentium a non nullis existimari, cum omni retro tempore adolescentibus plurimæ difficultates ad continuum

per-

pertinentes fuerint proposita; at cur tandem non illa sophismata, solas autem sophismatum solutiones, quae ex notionibus ac principiis hic indicatis petuntur, discentium captum excedere iudicemus?

CAPUT II.

De motu Penduli simplicis & compositi.

Ope quantitatum infinitesimarum a legibus descensus corporum per plana composita ad descensum eorundem per canales curvilineos, atque ad motum pendulorum pervenimus. Quapropter, quae hic explicanda sunt, citra alias generales leges motus curvilinei percipi possunt. Eas proin sequenti capiti reservamus.

§. CCXL.

Propositio I. *Siquod corpus descendit per planum compositum, & in flexibus planorum partialium nihil celeritatis amittit, eam in fine habet celeritatem, ac si ex unico plano eiusdem altitudinis perpendicularis descendisset.* Sit F. XXII. T. IV. planum compositum ex planis AB, BC, CD. Dico, si per hæc plana coniuncta descendat, & in flexu B, & C nihil celeritatis amittat; eandem in fine D habebit celeritatem, ac si per unicum planum ED eiusdem altitudinis perpendicularis descendisset. Producatur & planum CB in G, ac demittatur perpendiculum GK. Quoniam celeritas in fine descensus per planum acquisita eadem est, ac si corpus per eius altitudinem descendisset (§. CIX. n. III.) eadem erit corporis ad B pervenientis celeritas, sive ex G, sive ex A pervenerit in B; si igitur in flexu B nullam celeritatem amittat, pari celeritate pergit in C, quæ nempe est in ratione subduplicata altitudinis perpendicularis GK, vel EI. ac si in C nihil celeritatis amittit, eam denique in D habebit velocitatem, ac si descendisset per ED.

Si plana AB & BC, & similiter BC & CD sub angulo finito ABG, BCE ad se inclinantur, sine dubio

bio flexus B, & C corporis celeritati obsunt, eique detrahunt. Demittatur enim ex A in planum C B productum perpendiculum A n; dico : Si corpus ex plano A B transit in alterum B C, erit velocitas per planum A B acquisita ad velocitatem, qua per B C moveri perget, uti A B ad B n; nam velocitas per A B acquisita, cum eius directio ad B C obliqua sit, resolvitur in perpendicularem A n, quae occursu, & reactione plani extinguitur, & alteram, quae directioni, & situi plani B C respondet, & post impactum in planum B C residua est. Quare si velocitas per planum A B acquisita exprimitur per rectam A B, ea erit ad velocitatem post impactum in novum planum, ut A B : B n, sive ut sinus totus ad consinum anguli inclinationis binorum planorum. (§. *LXXVIII.*)

§. CCXLI.

Corollarium. Corpus descendens per curvam quamcunque O P F. XXII. eam in fine habet celeritatem, ac si ex altitudine perpendiculari O Q decidisset. Nam curva quaecunque est instar polygoni infinitorum laterum infinite parvorum, sive instar plani compositi ex planis infinitis infinite parvis; quod perspicuum est; si enim numerus planorum ultra omnnes limites augetur, & magnitudo eorundem minuitur, eiusmodi planum compositum abit in curvam, ita ut angulus flexus A B C infinite parum differat a duobus rectis, sive angulus inclinationis A B n fiat infinite parvus. Sit iam velocitas mobilis expressa per A B finita. Ex radio B n describatur arcus n m, erit ob B n = B m, lineola A m quantitas celeritatis amissae per mutationem directionis, sive flexum in B. Quoniam elementum arcus n m comprehendens angulum infinite parvum m B n non differt a tangente, sive a recta ex angulo recto n trianguli A B n in hypothenusam A B normali; hinc erit A B : A n = A n : A m; nam ex Elem. quodvis latus A n trianguli rectanguli A B n est media proportionalis inter hypothenusam A B, & segmentum adiacens A m. Quemadmodum igitur posito angulo A B n infinite parvo, recta A n est infinitesima respectu A B; sic erit A m infinitesima respectu A n (§. CCXXXVII) hoc est A m, seu

cele-

celeritas in flexu laterum curvæ amiſſa, eſt infiniteſima ſecundi ordinis ; & ſi mobile infinita eiusmodi latera, id eſt, curvam finitam percurrat, non niſi infiniteſimam celeritatem primi ordinis amittet , quæ nulla eſt relate ad celeritatem finitam.

§. CCXLII.

Definitio I. *Pendulum* eſt quodvis corpus , vel punctum grave ex puncto fixo ſuſpenſum, & circa illud agitabile. Si eiusmodi grave inſtar puncti conſideretur, ſuſpenſi ex filo, aut virga gravitatis experte , pendulum vocatur *ſimplex ;* quale modo conſiderabimus , de compoſito acturi poſtea. Sit F. XXIII. funependulum C A ; in A collecta tota vis gravitatis. erit recta C D verticalis, quæ a puncto fixo C ad horizontem eſt perpendicularis , eritque D punctum infimum, quod a gravi ex filo C A ſuſpenſo attingi poteſt ; reliqua omnia puncta arcus G A. , quem pendulum deſcribit , ſunt altiora.

§. CCXLIII.

Propoſitio II. *Pendulum a linea verticali ad aliquam altitudinem elevatum ex ea deſcendit per gravitatem relativam, quæ in quovis puncto arcus , quem deſcribit , eſt ad abſolutam, ut ſinus anguli elevationis p , quam recta C A iungens punctum grave A cum puncto ſuſpenſionis C efficit cum linea verticali C D.* Elevetur pendulum ex D in A , fiatque ad C A radium perpendicularis H E, quæ eſt tangens arcus A D in A. Vis abſoluta gravitatis expreſſa per A B reſolvatur in vim A E ſecundum tangentem , & vim A F , quæ contraria actione fili ex A verſus C extinguitur ; Erit igitur vis relativa, qua pendulum ſecundum directionem tangentis, uti in planis inclinatis, deſcendere nititur ad abſolutam, uti A E : A B, ſive ut ſinus anguli O = ang. n = ang. m = angulo elevationis p ad ſinum totum.

Digitized by Google

§. CCXLIV.

Corollaria I. Si vis relativa in quovis dato puncto dicitur u, angulus elevationis p; vis absoluta V, sinus totus 1; erit in quovis puncto u : p = V : 1. & si ratio posterior ponitur constans, erunt vires relativae in diversis punctis arcus, quem pendulum describit, uti sinus angulorum elevationis, vel uti sinus anguli inclinationis, quem directio gravitatis relativae secundum tangentem AE efficit cum linea horizontali; nam demissa ex E horizontali En patet, angulum s aequari angulo O, sive angulo elevationis p. II. Quemadmodum angulus elevationis p vel angulus inclinationis s, dum pendulum identidem magis accedit ad verticalem CD, continuo variatur, & decrescit; sic neque vis relativa in diversis punctis arcus a pendulo descripti manet constans; unde motus penduli descendentis ex quadam altitudine non potest accelerari uniformiter. III. Pendulum descendens per arcum AD sequitur leges corporis descendentis per canalem curvilineum AD, similem arcui descripto, & similiter positum; utrinque enim vis absoluta gravitatis eodem modo resolveretur in vim relativam AE secundum tangentem, & vim perpendicularem AF, quae a resistentia canalis non minus, quam a filo extingueretur. Ac si filum CA funependuli semper rectilineum manet, arcus AD ab eo descriptus, erit arcus circuli centro C radio CA descripti, uti ex Genesi circuli perspicuum est; ac tum descensus penduli per arcum CA eodem modo se habet, ac descensus per canalem circularem similem, ac similiter positum eiusdem radii cum longitudine fili. IV. Corpus per plana descendens vel per canales curvilineos, ubi nihil celeritatis in flexibus amittit, eam in puncto infimo habet vim secundum directionem horizontalem, per quam si reageretur secundum priorem directionem, qua descendit, idem spatium, vel eundem arcum eodemque tempore ascendendo relegeret, quem descendendo confecit, donec tota celeritas acquisita extingueretur. Quare cum directio penduli ad lineam verticalem pervenientis sit in latus alterum, nec illud a filo retentum aliter moveri

iam

Digitized by Google

iam possit, quam cæptum circuli arcum continuando illud ex D versus G ad æqualem altitudinem eodem tempore per sese elevari deberet ac motus perpetuo continuari; quod quidem, cur reipsa non contingat, rigiditas fili circa punctum suspensionis, aut frictio, vel resistentia medii in caussa est. Alterni itus penduli, vel reditus, qui descensum ex A ad punctum verticale D, & simul ascensum ex D versus G continent, adpellantur *oscillationes, aut vibrationes* penduli; solus vero descensus ex quadam altitudine ad lineam verticalem, vel solus ascensus a linea verticali ad altitudinem quandam vocatur *semioscillatio, aut semivibratio. Motus* igitur *oscillatorius* est motus corporis reciprocus, quo alternatim accedit, & recedit a quodam puncto, vel quadam linea. Punctum suspensionis C, circa quod pendulum oscillat, *centrum motus* dicitur. Oscillationes *isochronæ*, vel æquidiuturnæ sunt, quando descensus ad lineam verticalem, & ascensus versus alteram partem coniunctim semper intra æquale tempus peragitur; unde *pendula isochrona* ab oscillationibus isochronis nomen habent. V. Uti in motu per plana, per canales curvilineos, imo in lapsu quoque verticali, si præcise ratio celeritatum, spatiorum, ac temporum quæritur, non massa mobilis, & quantitas materiæ, sed sola vis acceleratrix spectatur; sic idem in motu fit penduli simplicis, ubi sola vis acceleratrix gravitatis consideratur ad determinandas durationes oscillationum. Maior massa non durationes ipsas mutat, sed id duntaxat efficit, ne oscillationes ita celeriter sistantur; cuius rei exemplum infra adferemus ex globo ligneo & metallico in eadem a centro motus distantia oscillantibus.

Ut theoria huius motus adcuratius explicari, atque adplicari ad usum queat, lemmata quædam sunt præmittenda.

§. CCXLV.

Lemma I. *Si vires, quibus corpus per datam rectam, vel curvam A H C versus datum punctum C movetur, semper sint ut spatia ad illud punctum percurrenda, ratio celeritatum; ac temporum ita determinatur:* I. Fiat

Fiat (F. XXVII.) recta A C æqualis datæ curvæ A C. Ducatur ad eam normalis D A, quæ exprimat vim, qua corpus in A ad descensum urgetur; ducta D C, exprimeni ordinatæ trianguli T H, t h vires respondentes distantiis H C, h C; est enim ubique $TH : th = HC : hC$, seu vires ex hyp. sunt distantiis a puncto C, vel spatiis percurrendis proportionales. Cum autem secundum formulam $C^2 = SV$ (XCV.) quadrata celeritatum sint in ratione composita vis & spatioli percursi, quævis areola T H t h exprimet quadratum celeritatis per spatiolum H h acquisitæ, & proin area finita D A T H indicabit quadratum celeritatis per A H acquisitæ; erit igitur quadratum celeritatis per A H acquisitæ ad quadratum celeritatis acquisitæ per A C, $= DAHT : DAC = AC^2 - HC^2 : AC^2$; sunt enim triangula similia in ratione duplicata laterum homologorum. Porro describatur radio A C quadrans A M B; ducta ordinata H M, erit $HM^2 = MC^2 - HC^2 = AC^2 - HC^2$; proin inventa superius ratio quadratorum celeritatis per A H, & A C acquisitæ exprimentur per $HM^2 : CB^2$ ($= AC^2$:) ipsæque adeo celeritates per H M, C B, seu *velocitates in descensu acquisitæ erunt ut ordinatæ circuli.* II. Tempusculum, quo spatiolum H h describitur, est ut illud ipsum spatium divisum per celeritatem, adeoque $= \frac{Hh}{HM}$, seu ducta M N ad A C parallela, $= \frac{MN}{HM}$. Sed ob similitudinem triangulorum M H C, M N m, est $MN : HM = Mm : CM$, adeoque $\frac{MN}{HM} = \frac{Mm}{CM}$; atque idcirco ob C M quantitatem constantem $= CB$, erit tempus per totum spatium $AC = \frac{AMB}{CB}$, seu ut quadrans divisus per radium; quæ cum sit quantitas constans, patet, *in hac virium hypothesi corpus ex quovis spatio A C, H C* *eodem tempore descendere.* III. Si corpus in singulis punctis H eandem velocitatem C B haberet, quam in fine acquirit, tempusculum in spatio H h impensum foret ut spatium per celeritatem divisum, seu ut $\frac{H\,h}{C\,B}$, & tempus totum per A C $= \frac{A\,C}{C\,B}$; idcirco erit *tempus, quod impenditur in descensu ad infimum punctum C ex quavis distantia per vim ipsi distantiæ proportionalem, ad tempus, quod ad percurrendum idem spatium motu æquabili & celeritate finali impenditur*, ut $\frac{A\,M\,B}{C\,B} : \frac{A\,C}{C\,B} =$ A M B : A C, seu *ut quadrans ad radium, aut ut semiperipheria ad diametrum.*

§. CCXLVI.

Definitio II. *Cyclois*, vel *trochois vulgaris* adpellatur curva, quam punctum quodvis peripheriæ circuli super rectam revoluti describit eo tempore, quo tota peripheria semel circumagitur. F. XXIV. Circulus MKLQ rectam AB contingat in L; tum super eadem recta AB circumvolvatur, donec longitudine A B suæ circumferentiæ æquali emensa punctum contactus L in sublime prius latum, dein circuitu facto veniat in B, ibique eandem rectam A B iterum contingat. Curva A D B eiusmodi motu a puncto L descripta, *Cyclois* dicitur. Recta A B tangens circuli revoluti, & terminata binis adpulsibus puncti L in A, & B est *basis cycloidis*. Recta D E basin secans bifariam, & perpendiculariter in E, est *altitudo*, vel *axis* cycloidis: punctum D *vertex*; circulus M K L Q, vel E D R, qui est idem in diverso situ, ex cuius scilicet motu cyclois oritur, est *circulus generator*, eiusque punctum L, quod curvam ipsam designat, *punctum lineans*. Denique recta P O ad basin parallela est semiordinata curvæ. Proprietates cycloidis ad hunc locum maxime pertinentes sunt 1. Quivis arcus cycloidis interceptus inter ordinatam, ac verticem est

Digitized by Google

est duplus respondentis chordæ ad verticem ductæ; & dimidia perimeter dupla diametri circuli generatoris: arcus D T = 2 D F; & (F. XXV.) B A = 2 A E. 2. Tangens cycloidis T S (F. XXIV.) est parallela chordæ respondenti D F; & (F. XXV.) tangens F T parallela chordæ A M. 3. Siquod pendulum longitudinis L describit exiguos arcus circuli, curvatura eiusmodi exiguorum arcuum circuli proxime coincidit cum curvatura cycloidis descriptæ per eum circulum generatorem, cuius radius est dimidia longitudo dicti penduli seu $\frac{1}{2}$ L. Sit (F. XXV.) longitudo penduli circularis = A C = 2 E A; idemque excurrat in exiguos arcus circulares: congruent hi quidem proxime cum arcu cycloidis descriptæ per circulum radii E A.

§. CCXLVII.

Lemma II. *Vis respectiva corporis cycloidem describentis, vel in canali cycloidali descendentis est ut arcus ad punctum infimum percurrendus.* (F. XXV.) Ea enim est vis respectiva urgens corpus ad descensum obliquum in quovis cycloidis puncto F, quæ esset in plano tangente F T, sive in plano chordæ M A ipsi tangenti parallelo (Ex proprietate 2. cycloidis) si igitur gravitas absoluta corporis descendentis exprimatur per E A, ac resolvatur in duas E M, M A, erit vis cycloidem normaliter premens ut E M ob angulum E M A in semicirculo rectum: vis autem respectiva ut chorda M A, seu eius duplum, nempe ut arcus F A (ex 1. propr. cycloid.) itaque erit ubique vis respectiva ut arcus percurrendus.

§. CCXLVIII.

Corollarium I. Locum igitur in motu per cycloidem omnia habent, quæ Lemm. I. §. CCXLV. de vi in ratione spatiorum percurrendorum agente ostendimus; ac *Primo* celeritates acquisitæ sunt, ut ordinatæ circuli. *Secundo* tempus descensus per quemvis cycloidis arcum usque ad punctum infimum A semper est idem; proin cyclois est curva isochrona, seu tautochrona, id est, descensus æquidiuturni. *Tertio* tempus,

Digitized by Google

quod impenditur percurrendo cuivis arcui cycloidis F A vi proportionali ipsi arcui, est ad tempus, quod ad percurrendum arcum eundem motu æquabili ac celeritate finali impenditur, ut semiperipheria circuli ad diametrum. Unde sequitur *Quarto*: tempus descensus per quemvis cycloidis arcum usque ad infimum punctum ad tempus lapsus liberi perpendicularis per diametrum circuli generatoris in eadem est ratione, nempe ut semiperipheria ad diametrum; nam in descensu per arcum B A, & diametrum E A, cum eadem utrinque sit altitudo perpendicularis, eadem acquiritur velocitas (§. CCXLI.) Jam tempus, quo celeritate in A acquisita motu æquabili percurritur arcus B A = 2 E A, æquale est illi, quo motu accelerato conficitur spatium prioris subduplum, nempe E A; igitur si hoc tempus substituitur in n. 3. erit tempus descensus per quemvis arcum cycloidis usque ad punctum infimum ad tempus lapsus liberi perpendicularis per diametrum circuli generatoris, ut semiperipheria ad diametrum; & quoniam tempus ascensus versus alteram partem, qui una cum descensu integram oscillationem in cycloide efficit, est æquale tempori descensus, hinc erit tempus, vel duratio unius oscillationis in cycloide ad tempus liberi descensus per diametrum circuli generatoris, ut peripheria ad diametrum.

Sunt aliæ quoque miræ proprietates tum cycloidis, tum motus in eadem, uti quod corpus per arcum cycloidis B F A ex B in A breviore tempore descendat, quam per quamcunque lineam iisdem punctis terminatam; hinc curva brachystochrona, seu brevissimi descensus dicitur.

§. CCXLIX.

Propositio III. *Tempora seu durationes oscillationum per exiguos arcus circuli sunt in ratione composita ex directa subduplicata longitudinum pendulorum, & reciproca subduplicata gravitatis acceleratricis.* Sint bina pendula circularia A & B; sintque durationes oscillationum D & d, longitudines L & l; tempora descensus per dimidiam utrinque longitudinem T & t, gravitates acce-

ce-

celeratrices G, & g; dico esse: $D : d = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$.

Dem.

1. Ex proprietate cycloidis tertio loco indicata (§. CCXLVL) si quod pendulum longitudinis L describit exiguos arcus circulares, curvatura eiusmodi exiguorum arcuum circuli proxime coincidit cum curvatura cycloidis descriptæ per circulum generatorem, cuius radius æquat $\frac{1}{2}$ L. Hinc durationes oscillationum per exiguos arcus circuli eædem sunt, ac tempora motuum in cycloide, cuius axis est dimidia longitudo penduli in circulo oscillantis; & sicut in cycloide tempora motuum, ita & durationes oscillationum per exiguos arcus circuli sunt ad tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli, ut peripheria ad diametrum; erit igitur

$$D : T = \pi : \delta$$

$$\& \quad d : t = \pi : \delta$$

$$\text{proinde} \quad D : d = T : t,$$

2. Ex theoria motus uniformiter accelerati tempora liberi descensus perpendicularis sunt in ratione composita ex directa subduplicata spatiorum, & reciproca subduplicata virium acceleratricium; nam §. XCV. n. I. $V = \frac{S}{T^2}$; proin $T^2 = \frac{S}{V}$ & $T = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{V}}$. Hinc erunt tempora descensus per dimidias $\pm$ longitudines pendulorum in ratione subduplicata earundem directe, & subduplicata gravitatis acceleratricis reciproce, seu

$$T : t = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{\frac{1}{2} l}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$$

3. Comparatis igitur rationibus utriusque numeri præc. erit

$$D : d = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}.$$

§. CCL.

Corollarium I. *Duratio unius oſcillationis per exiguum arcum circuli eſt ad tempus liberi deſcenſus per duplam longitudinem penduli, ſive per diametrum circuli, cuius exiguum arcum pendulum deſcribit, ut ſemiperipheria ad diametrum.* Nam ſi tempus deſcenſus per dimidiam longitudinem penduli dicatur T, erit tempus deſcenſus per duplam longitudinem, ſive per ſpatium quadruplo maius $= 2\,T$ nempe in ratione ſubduplicata §. LXXXVII. Unde cum ſit ex numero 1. demonſtrationis $D : T = \pi : \delta$; erit $D : 2\,T = \pi : 2\,\delta = \frac{1}{2}\,\pi : \delta$. Et quia duratio ſemioſcillationis, ſive tempus deſcenſus per exiguum arcum circuli usque ad lineam verticalem eſt dimidium durationis integræ oſcillationis, habebit duratio ſemioſcillationis ſeu $\frac{1}{2}$ D ad tempus deſcenſus per duplam penduli longitudinem $= 2\,T$, rationem prioris ſubduplam, ſeu $\frac{1}{2}\,D : 2\,T = \frac{1}{4}\,\pi : \delta$ h. e. *Duratio ſemioſcillationis, ſive tempus deſcenſus per exiguum arcum circuli usque ad lineam verticalem ſe habet ad tempus liberi deſcenſus per diametum eiusdem circuli, ut quadrans peripheriæ ad diametrum*; & quia corpus eodem tempore per quamvis chordam, vel ſubtenſam deſcendit, quo per diametrum circuli (§. CXIV.) erit tempus deſcenſus per arcum ad tempus deſcenſus per ſubtenſam eiusdem arcus, ut quadrans peripheriæ ad diametrum hoc eſt, ut $\frac{355}{4} : 133 = 355 : 532$ poſita ratione peripheriæ ad diametrum $= 355 : 133$. Ex his palam fit paralogiſmus, in quem viri haud ſane ignobiles in re literaria inciderunt, putantes, arcum circuli exiguum, & chordam eodem tempore percurri, propterea quod magnitudine haud multum inter ſe diſcrepent. At enim, etſi chorda cum exiguo arcu prope congruat, alia tamen eſt chordæ, alia arcus ſeu tangentis inclinatio; quapropter vires reſpectivæ, quæ ſunt uti ſinus angulorum inclinationis (§. CCXLIV.) minime æquales ſunt.

§.

Digitized by Google

§. CCLI.

Corollarium II. Ex analogia n. 3. demonſtrationis inventa enaſcitur formula: $D = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}}$; Hinc vero deducitur *Primo*: Si manente eadem vi acceleratrice mutatur longitudo penduli, erunt durationes oſcillationum per exiguos arcus circuli in ratione directa ſubduplicata longitudinum, ſeu $D = \sqrt{L}$. Sit longitudo penduli $A = 1$; longitudo penduli $B = 4$; erit $D : d = 1 : 2$; ſive quævis duratio oſcillationis in pendulo B duplo longiore tempore durabit, quam in A. *Secundo* viciſſim in eadem hypotheſi conſtantis gravitatis acceleratricis, erunt longitudines pendulorum in ratione duplicata durationum ſeu $L = D^2$. *Tertio*. Si durationes oſcillationum in binis pendulis ſunt æquales, ſive ſi in proportione ponitur $D = d$; erit $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$ & $\sqrt{L} : \sqrt{l} = \sqrt{G} : \sqrt{g}$; ac $L : l = G : g$ hoc eſt longitudines pendulorum iſochronorum ſunt ut gravitates acceleratrices. *Quarto*, Si longitudo binorum pendulorum eſt eadem, erit $D = \frac{1}{\sqrt{G}}$, & $D^2 = \frac{1}{G}$, h. e. Vires acceleratrices ſunt reciproce ut quadrata durationum, & viciſſim.

§. CCLII.

Corollarium III. Si ſingulæ oſcillationes in unoquoque pendulo ſint inter ſe iſochronæ, ſequitur, ut numerus oſcillationum a binis pendulis eodem tempore e. g. intra 24 horas confectarum ſit reciproce ut duratio ſingularum oſcillationum; nam totum tempus externum e. g. 24 hor. intra quod pendulum ſuas oſcillationes continuat, erit ut factum ex duratione unius oſcillationis in numerum omnium; ſi igitur durationes oſcillationum in binis pendulis ſint D, & d; numeri earundem N, & n; erit tempus, intra quod pendulum

Digitized by Google

A oscillationes suas peragit, $= DN$; & tempus, intra quod oscillat pendulum B $= dn$; ac si tempus assumitur æquale, erit $DN = dn$; proinde $D : d = n : N = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} = \sqrt{L} \times \sqrt{g} : \sqrt{l} \times \sqrt{G}$

Hoc est *numeri oscillationum æquali tempore confectarum sunt reciproce ut durationes earundem, vel in ratione subduplicata gravitatis acceleratricis directe, & subduplicata longitudinis reciproce*; Hinc vero sequitur *Primo*: $n^2 : N^2 = \frac{g}{l} : \frac{G}{L}$, quadrata numerorum oscillationum intra idem tempus confectarum sunt directe ut gravitates acceleratrices, & reciproce ut longitudines. *Secundo* Si numeri oscillationum eodem tempore confectarum a binis pendulis sint æquales, gravitates acceleratrices erunt directe ut longitudines; si enim $n = N$, erit $n^2 = N^2$; consequenter $\frac{l}{g} = \frac{L}{G}$, ac $l : L = g : G$. *Tertio*. Si gravitas acceleratrix est constans, erit $n^2 : N^2 = \frac{1}{l} : \frac{1}{L}$ hoc est, in hypothesi gravitatis constantis longitudines pendulorum sunt reciproce ut quadrata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum.

Hæc vere theoria est motus penduli simplicis; quæ eidem opponi possunt, ex dictis resolvuntur; ac in primis intelligitur, eum motum a gravitate oriri, quæ impedita verticali directione oblique deorsum tendit, uti in planis inclinatis. Ob vim autem diversam in diversis arcus descripti punctis nequit is motus uniformiter accelerari; ascensus versus alterum latus oritur ex celeritate in descensu acquisita, donec ea celeritas contraria actione gravitatis relativæ extinguatur. Porro quoniam pendulum compositum ope centri oscillationis ad simplex revocandum est, uti paullo post explicabimus, usum & adplicationem theoriæ hoc loco subiungemus.

§.

§. CCLIII.

ADPLICATIO THEORIÆ.

I. *Ope pendulorum gravitas corporum terrestrium in diversis terræ locis examinari potest*; Nam si idem pendulum, sive pendula *eiusdem longitudinis* non eundem numerum oscillationum eodem tempore ubique absolvant; necesse est, ut gravitas corporum in diversis terræ locis sit diversa; nam ex corollario præc. si longitudo pendulorum est constans, numeri oscillationum eodem tempore peractarum sunt directe ut radices quadratæ gravitatis acceleratricis, sive gravitates directe ut quadrata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum. Pariter si pendula isochrona sunt inæqualis longitudinis, erunt etiam gravitates inæquales ex §. CCLI. n. 3. Hoc modo deprehensum reipsa est, corporum terrestrium gravitatem maiorem esse versus polos, quam prope æquatorem; maiorem itidem in locis terræ humilioribus, minorem in altioribus; id quod sequentes observationes ostendunt. *Primo* RICHERIUS, cum anno 1672 fixarum transitum per meridianum in Cayennæ insula latitudinis borealis $4^{\circ}, 5'5$ observaret, agnovit, pendulum, quod singulis minutis secundis unam oscillationem absolverat Parisiis, tardius moveri, unaque linea cum $\frac{1}{4}$ lin. corripi debere, ut ibi pariter singulis minutis secundis oscillationem unam absolveret; HALLEIUS postea, aliique complures retardationem penduli prope æquatorem, & consequenter gravitatis imminutionem repetitis experimentis confirmarunt. *Secundo* BOUGUERIUS adhibitis omnibus correctionibus caloris, ac repetitis observationibus determinavit longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in diversis ab æquatore, vel a centro terræ distantiis. Parisiis eam longitudinem statuit 440, 67 lin. sub æquatore vero, & in ipsa maris libella lin. 439, 21. Quinti, quæ urbs 1466 hexapedis supra libellam maris attollitur, lin. 438, 88. In vertice montis Pichincha, qui 2434 hexapedis supra eandem libellam eminet, lin. 438, 69. Ad Portobello in America lin. 439, 30. In insula S. Dominici ad Petit goave lin. 439, 47. *Tertio.* CAILLIUS in Affrica ad promontorium bonæ spei, eadem Bouguerii methodo usus longitudinem penduli isochroni invenit 440, 14 & latitudinem promontorii 33°, 18′: Grischowius longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis Petropoli statuit 441, 23. Londini ex observationibus a Maupertuisio institutis longitudo eiusmodi penduli est 440, 75. Pelli in Laponia 441, 27. Romae demum Newtoni interpretes Le Seur, & Jacquier longitudinem penduli definierunt 39, 0974 dig. Londinens. sive 440, 38 lin. Ex his patet, longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis, sive *pedem horarium*, ut vocant, minime constantem esse in omnibus terrae locis, sed maiorem versus polos & in locis humilioribus, minorem versus aequatorem, & in locis sublimioribus; unde etiam vis acceleratrix gravitatis in illis locis est maior, in his minor ex n. 3. §. CCL. Duratio unius oscillationis definitur, dum singulae oscillationes, quae intra unam fixarum revolutionem fiunt, numerantur; invento hoc numero etiam duratio unius oscillationis determinatur comparando eundem cum numero minutorum secundorum, qui uni revolutioni fixarum respondet; est autem revolutio fixarum $23^h, 56'. 4''$. Praeterea ex datis numero oscillationum intra revolutionem fixae peractarum, ac longitudine penduli invenitur longitudo pedis horarii ex n. 3. §. CCLII. Vel quia datum tempus e. g. unius horae $= 3600''$ exprimitur per factum ex duratione unius oscillationis in numerum omnium intra id tempus confectarum, ut sit $3600'' = D N$; erit duratio unius oscillationis $= \frac{3600}{N}$. Porro quoniam posita gravitate constante, uti in eodem loco, durationes oscillationum sunt directe ut radices quadratae longitudinum (§. CCL. numero primo) hinc si pendulum L intra horam seu $3600''$ habeat numerum oscillationum N; haud aegre invenitur longitudo penduli l singulis minutis secundis

oscil-

oscillantis; fiat enim $\frac{3600}{N} : 1 = \sqrt{L} : \sqrt{l}$; eritque

$$l = \frac{L N^2}{12960000}.$$

Fuere, qui inæqualitatem oscillationum eiusdem penduli aliis externis caussis adscribere conati sunt; ac primo quidem diverso calori aut frigori diversarum regionum; sic enim aiunt: per calorem Zonæ torridæ pendulum extendi, & ob auctam longitudinem tardius oscillare debet; contra polari frigore constrictum, & diminutum celerius. R. Aliqua oscillationum inæqualitas aliquando refundi potest in calorem & frigus; id vero concedo; at omnem, ac tantam quidem, quantam observationes exhibent, refundi posse in calorem, ac frigus; id nego. Newtonus L. 3. Prop. 20. sextam lineæ partem, qua pendulum prope æquatorem corripi debuit, caloris vi virgam producenti adscribit. Quodsi etiam paullo maiorem extensionem calore effici concedamus, certe tanta non est; quæ omnem inæqualitatem oscillationum induceret. Nec vero eiusmodi anomaliæ, quæ calori aut frigori adscribendæ sunt, neglectæ fuerunt ab observatoribus astronomis. Maupertuisius cum sociis versus polos observantibus sollerter curavit, ut circa pendulum ea per 4 dies conservaretur aeris temperies, quam themometron Parisiis signare consuevit; nec tamen consensum inter vibrationes Parisinas, & polares obtinuit. Caillius in Act. Acad. Berolinensis An. 1753 censet, experimenta sub æquatore, Parisiis, & Pelli ultra polarem circulum instituta eo adcurationis perducta esse, ut intra octavam lineæ unius partem exhibuerint veram penduli longitudinem; nec in aliis experimentis ad promontorium bonæ spei a se habitis latiores errorum limites agnoscit. Denique cum in edito monte Pichincha regio aeris frigidior, quam in subiecta valle esse debuit, oscillationes in monte factæ ob contractionem virgæ celeriores esse debebant, contra ac observationes ostenderunt. Aiunt 2: inæqualitas oscillationum a diversa aeris densitate, raritate, humiditate, vel siccitate oriri potuit. R. n. Quia oscillationes a gravitate proveniunt, durationes earundem, quamdiu constans est longitudo ac gravitas acce-

Digitized by Google

leratrix, necessario eædem sunt. Si bina corpora eiusdem voluminis sed diversæ gravitatis specificæ e. g. globus ligneus, & metallicus in eodem medio oscillant, ita, ut longitudo penduli utriusque sit eadem, durationes oscillationum per breves arcus circuli, quamdiu durant, semper æquales sunt, ita ut post trecentas oscillationes nullum discrimen quoad tempus observetur, quam quod arcus corporis levioris, nempe globi lignei, continuo breviores evadant, donec motus eiusdem penitus sistatur, dum interea globus metallicus suas oscillationes triplo longiore tempore continuat; Ergo, si idem corpus in diversis mediis oscillat, durationes oscillationum, quamdiu gravitas acceleratrix, & longitudo penduli non mutantur, mutari haud possunt. Aiunt: inæqualitas oscillationum a motu vertiginis terræ oriri potuit, ob quem corpora sub æquatore magis recedere a centro terræ conantur, adeoque minus gravitant. R. Hoc quidem modo inæqualitas oscillationum non aliunde proficiscitur, nisi a diversa gravitate. Cur porro ea gravitas varia sit in locis variis, non est hoc loco investigandum. Illud dico in præsenti, subductis calculis inæqualitatem oscillationum maiorem esse repertam, quam quæ soli motui vertiginis adscribi queat.

§. CCLIV.

II. *Data longitudine penduli, quod intra minutum secundum semel oscillat, adcurate inveniri potest spatium, quod a gravi intra idem tempus eodemque loco per lapsum verticalem conficitur; id quod per observationem corporis ipsius decidentis non nisi propinqua ratione quadam determinatur.* Ex primo numero demonstrationis (§. CCXLIX.) invenitur tempus T, quo lapsu libero percurritur dimidia longitudo penduli; reliqui enim proportionis termini noti sunt. Dein quia in motu uniformiter accelerato spatia sunt, ut quadrata temporum, fiat: ut quadratum temporis inventi per dimidiam longitudinem penduli ad quadratum unius minuti secundi, sive ad quadratum de $60'''$; ita dimidia longitudo penduli ad spatium intra $60'''$ conficiendum. Sit longitudo penduli, quam Mairanus magna adhibita diligentia reperit $= 440, 57$ lin. erit dimidia longitudo $= 220, 285$.

Sit

Sit ratio peripheriæ ad diametrum = 355 : 113. Igitur erit primo : ut 355 ad 113 ; ita duratio unius oſcillationis ſive 60''' , ad quartum terminum = $19\frac{35}{355}$; quod eſt tempus T lapſus liberi per dimidiam longitudinem penduli ; tum fiat : ut quadratum huius temporis ad dimidiam longitudinem penduli ; ita quadratum de 60 ad ſpatium intra minutum ſecundum lapſu libero percurrendum ; ſive

$$\left(19\tfrac{35}{355}\right)^2 : 220,285 = 3600 : x.$$

$$\tfrac{45968400}{126025} : 220,285 = 3600 : \tfrac{99941121650000}{45968400}$$

$$= 2174,128 \text{ lin.}$$

quartus terminus indicat ſpatium primo minuto ſecundo percurrendum a corpore gravi libere decidente ; quod ad pedes reductum conficit 15 ped. 1 pollic. 2 lin. cum modico exceſſu.

§. CCLV.

III. *Gravibus ſuſpenſis inſtar penduli deſideratus gradus velocitatis in machina percuſſoria communicari poteſt.* De machina percuſſoria egi in Scholio generali §. CXV. n. IV. Nunc eius fundamentum indicandum eſt ; In uſu eius machinæ, atque in experimentis de corporum conflictu neceſſe eſt , ut corpori incurrenti determinatus gradus celeritatis communicari poſſit. Dico : ſi corpus grave ſuſpendatur inſtar penduli , ut deſcribat arcus circuli , & ſi ex infimo puncto F (F. XIX.) circulo adcommodentur ſubtenſæ ut 1 , 2 , 3 &c. abſciſſis arcubus F 1 , F 2 , F 3 &c. pendulum ex his arcubus demiſſum habebit in infimo puncto F velocitates ut 1, 2, 3 &c. nam velocitates in infimo puncto ſunt ut ipſæ chordæ, quarum arcus a pendulo percurruntur ; quod ſic oſtenditur : velocitas ex N in F eſt ad velocitatem ex O in in F ut $\sqrt{LF} : \sqrt{PF}$ (§. CCXL.) quoniam vero quævis chorda eſt media proportionalis inter ſegmentum adiacens, & diametrum circuli , erit chorda ad diametrum in ratione ſubduplicata ſegmenti ad diametrum ; ſive cum ſit $LF : NF = NF : GF$, erit $LF : GF = NF^2 : GF^2$ & $\sqrt{LF} : \sqrt{GF} = NF : GF$; ſimiliter $\sqrt{PF} : \sqrt{GF}$

=

$=$ O F : G F ; unde ex æquo ordinate, vel ob similitudinem rationum erit $\sqrt{LF} : \sqrt{PF} = NF : OF$; consequenter cum velocitas ex N in F sit ad velocitatem ex O in F ut $\sqrt{LF} : \sqrt{PF}$, eadem erit ut N F : O F hoc est, uti chordæ.

Sunt alii pendulorum usus multiplices & insignes in omni prope scientiarum naturalium genere; Eadem horologiis automatis corrigendis primus adhibuit Hugenius, ita ut cycloidis arcum describerent; animadvertit enim horologia pendulis circularibus instructa non adcuratissime oscillationes isochronas habere; si enim arcus circulares a pendulo descripti inæquales sunt, maiores minoribus aliquanto tardius absolvuntur, ut, etsi differentiæ singulæ perexiguæ sint, tamen eædem post multas oscillationes in differentiam satis magnam coalescant. Arcuum vero circularium inæqualitas in horologio facile induci potest; si enim lentore quodam adficiantur rotæ, ut in frigida fit tempestate, pendulum minore vi impulsum per minorem arcum excurret, atque incitatius, quam par est, festinabunt oscillationes, & citius, quam oportet, tempus ab horologio indicatum effluet. Lentius vero idem effluet tempus, si nimia lubricitate præditæ rotæ pendulum per maiorem arcum excurrere cogant. Innotuerat autem Hugenio, tempora descensuum per quoscunque eiusdem cycloidis arcus esse æqualia, & siquod ex filo flexili suspensum inter binas æquales & similes semicycloides oscillet, ita, ut filum utraque ex parte semicycloidi circumplicetur in una oscillatione, ab eodem cycloidem describi; quapropter primus adhibuit pendula cycloidalia, sive inter binas laminas, semicycloidis curvatura donatas suspensa. Verum hoc artificium Hugenianum omittunt hodie artifices; idque duntaxat curant, ut pendula graviore pondere onusta in arcus valde parvos excurrant. Separata ab automatis pendula ad observationes astronomicas primus admovit Ricciolus, ut testatur Krafftius. Ad medicos usus ea adhibuit Sanctorius in Medicina Statica; quale instrumentum vocavit Sphygmicum, quo pulsuum arteriæ celeritas deprehendi potest; quod & Schottus describit Mag. Nat. P. III. p. 338. Galilæus ex consideratione circularium oscillationum viam sibi aperuit ad omnem theoriam gravium detegen-

gen-

gendam; cum enim Medicinæ operam daret, ut testatur Boscovichius in Notis ad L. II. v. 1617. Phil. Stai. cogitaretque de methodo aliqua, qua certo inæqualitatem pulsuum arteriæ in febribus cognosceret, forte lychni pendentis in templo oscillationes animadvertit æque diuturnas (ad sensum) sive multo maiores essent, ut initio solent, sive breviores multo, ut in fine, amplitudine itineris compensata per celeritatem ortam ex maiore altitudine, & minore sub initium oscillationis inclinatione ad horizontem. Ad musicos usus eadem transferre conatus est Galilæus, ut consonantias oculis repræsentaret pendulis nempe tribus, quorum, eodem tempore, facit oscillationes primum quatuor, secundum tres, tertium duas; deinde alii ad dirigendas mensuras musicas, quas tactus vocant, adplicuerunt. Geometricum pendulorum usum iterum animadvertit Galilæus; hinc, ait, chordæ longissimæ, cuius adspectus superior absconditus est, longitudinem metiri licet, si adpenso pondere in oscillationes cieatur, atque hæ cum pendulo datæ longitudinis comparentur. Sed iam de centro oscillationis agendum superest.

§. CCLVI.

Definitio III. *Pendulum compositum* dicitur, in quo plura pondera vel puncta gravia eodem filo inflexibili, quod gravitatis & inertiæ expers concipitur, sunt affixa in diversa a centro suspensionis distantia. Sint enim (F. XXVI.) pondera B & D suspensa e puncto A ad diversas distantias; si singula seorsim oscillare debeant, oscillatio propioris B citius absolvetur, remotioris D serius in ratione subduplicata AB, AD. Si vero connexa sint virga rigida, quæ concipiatur inflexilis, ac omni vi inertiæ, & gravitate destituta, debebunt oscillationes simul peragere, adeoque debebit alterius motus alteri obsequi ita, ut tempus sit medium inter utrumque, quod neque tam breve sit, uti tempus solius B propioris, neque tam longum, ut tempus solius D remotioris; erit igitur punctum quoddam C, in quo si esset utrumque corpus B, & D collectum, oscillationes eodem tempore peragerentur, dum alterum est in B in distantia AB, alterum in D in distantia AD a centro

Digitized by Google

motus, vel puncto suspensionis A. Id punctum C dicitur centrum *oscillationis*, eritque A C longitudo penduli simplicis, quod isochronum est pendulo composito. Similiter concipi potest planum A B in A suspensum, aut etiam corpus prismaticum, vel aliud quodcunque oscillare circa punctum fixum A; eritque semper aliquod punctum C, in quo si omnia pondera tam supra, quam infra C posita essent collecta, oscillationes eodem modo, eodemque tempore peragerentur, quo peraguntur a pendulo composito. Recta, quae ex puncto suspensionis ad commune datorum pondertum centrum gravitatis ducta concipitur, vocatur *axis penduli compositi*: recta vero F A G, quae per idem punctum suspensionis A ad axem perpendicularis ducitur, *axis oscillationis* adpellatur.

Pro centro oscillationis inveniendo ac demonstrando alii alias atque alias vias inierunt. Nulla satis plana mihi quidem videtur; quapropter aliam iuvat methodum arripere forte novam, nec inelegantem, certe facilem, & expeditam.

§. CCLVII.

Lemma. *Momentum, quod pondera ex alto delapsa in vectem, tempore percussionis exerunt in fulcrum, sunt ut quantitates motuum eorundem ductae in distantias, quas habent a fulcro.* Sit (F. XXVIII.) vectis A D fixus in A, in eumque ex quavis altitudine decidat pondus B in B, & pondus D in D. Manifestum est, quod posita distantia eadem A B pondus B eo maiorem vim exerat in A, quo maiore motus quantitate in B alliditur; ac similiter pondus D posita eadem distantia A D eo maiorem vim exeret in A, quo maiore quantitate motus in D incurrit. Posita vero eadem motus quantitate in B decidente momentum, quod versus A exerit, eo maius est, quo magis ab A distat, ac similiter pondus D servata priore celeritate, si magis removetur a fulcro A, eo maius momentum versus A exeret. Quapropter momentum ponderum in A crescit ut quantitas motus eorum ducta in distantiam a fulcro.

Hoc

Digitized by Google

Hoc quidem Lemma multiplici observatione, vel experimento comprobari potest; uti si in crus longius staterae Romanae demittantur corpora vel in maiore a fulcro distantia, vel ex maiore altitudine, semper maior effectus habebitur, magisque elevabitur pondus oppositum. Hinc praelis ad monetas signandas destinatis adcommodatur vectis longior, isque in extremitate utrinque instruitur globis aeneis, ac mediantibus loris ad motum concitatur; crescit enim vis tum pro quantitate motus globorum, tum pro distantia eorundem a fulcro. Trabs vel columna marmorea, quae enormia pondera utrinque adpensa ferret, si ex alto delapsa circa medium alliditur fulcro immobili, instar arundinis dissilit. Si enim loco partium utrinque circa fulcrum positarum concipiantur massae iis aequipollentes, vis ad fulcrum erit in ratione composita quantitatis motus ductae in distantiam ab eodem.

§. CCLVIII.

Propositio IV. *Si singula pondera filo inflexili suspensa multiplicantur per quadrata suarum distantiarum a centro suspensionis, & summa factorum dividitur per summam factorum ex quovis pondere in suam a centro suspensionis distantiam, quotus divisionis exhibet distantiam centri oscillationis a centro suspensionis.* Dem. Motus fili inflexilis ponderibus B & D onerati, cum sit instar vectis, cuius fulcrum est in A, pendet a *momento virium*, quod ea pondera versus A exerunt, dum circa A tanquam centrum motus agitantur. Id momentum est quantitas motus ponderum ducta in distantiam, uti ex Lemm. praec. intelligitur. Porro ex natura motus circularis *velocitates* ponderum sunt ut arcus descripti sive ut radii; igitur *quantitas motus* ut factum ex massa in radium, sive in distantiam a centro suspensionis; haec quantitas motus ducta in distantiam ab eodem centro suspensionis exhibet *momentum virium*, quo pondera B & D versus A agunt, sive filum circa A rotare conantur. Si iam quaeritur punctum C, in quod, si pondera B & D unita agant, idem circa A motus, eademque in filo flexili impressio consequatur, necesse est, ut inter quantitatem motus ponderis B, & D centrum gravitatis quæratur, idemque erit centrum oſcillationis. Cum ergo generatim diſtantia centri gravitatis a puncto A reperiatur, ſi ſumma factorum ex quovis pondere in ſuam a fulcro diſtantiam dividitur per ſummam ponderum (§. CXXXI.) in præſente caſu reperietur centrum oſcillationis, ſi momenta ponderum dividantur per quantitates motuum eorundem, hoc eſt, ſi quodvis pondus in quadratum ſuæ diſtantiæ ducatur, & ſumma eorum factorum dividatur per factum ex quovis pondere in ſuam a fulcro diſtantiam. Sint maſſæ B & D, diſtantiæ AB, AD; erunt quantitates motus ſeu facta ex maſſa in velocitatem circularem, ut $B \times AB$ ad $D \times AD$: momenta autem virium rotationis circa A, ut quantitates motuum ductæ in diſtantias ſive ut $B \times AB^2$ ad $D \times AD^2$. Hæc momenta diviſa per quantitates motuum exhibent centrum gravitatis in rotatione, ſive centrum oſcillationis, cuius diſtantia a centro ſuſpenſionis erit $= \frac{B \times AB^2 + D \times AD^2}{B \times AB + D \times AD}$.

Fortaſſis clarior non nemini videbitur demonſtratio eadem hoc modo adornata. Ex præmiſſo lemmate, & ratione vectis perſpicuum eſt, quantitatem motus ponderis B eſſe $= B \times AB$; & quantitatem motus ponderis D $= D \times AD$. Quæritur punctum intermedium, in quo ſi una convenirent hæ quantitates motuum, filum circa A eodem modo impelleretur, ſive quæritur potentia æquipollens, quæ eundem circa A motum in virga produceret, aut quæ contraria directione adplicata vim ponderum B & D ſiſteret. Perſpicuum eſt, diſtantiam huius puncti intermedii a B & D eſſe reciproce, ut quantitates motuum, quæ ſunt in B & D, haud ſecus, ac ſi in vectem deciderent pondera quavis motus quantitate, potentia æquipollens eſſet in puncto, a quo deſumtæ diſtantiæ non cum ſolis maſſis, ſed cum motuum quantitatibus reciprocarent. His poſitis ponatur id punctum C (*F. XXVI.*) *ac reliqua facili calculo expediuntur. Nam ex dictis erit* $D \times AD : B \times AB = BC : DC$; *& componendo* $D \times AD + B \times AB : B \times AB = BD : DC = AD - AB : DC$;

DC; adeoque $DC = \frac{(AD - AB)\, B \times AB}{D \times AD + B \times AB}$

Est autem distantia quæsiti puncti C a centro suspensionis

$$= AD - DC = AD - \frac{(AD - AB)\, B \times AB}{D \times AD + B \times AB},$$

seu facta reductione

$$\frac{D \times AD^2 + B \times AB \times AD - B \times AB \times AD + B \times AB^2}{D \times AD + B \times AB}$$

$$= \frac{D \times AD^2 + B \times AB^2}{D \times AD + B \times AB} = AC.$$

Quoniam vero divisor, sive summa factorum ex quovis pondere in suam a centro suspensionis distantiam æqualis est facto ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis ab eodem centro suspensionis, vel axe oscillationis; hinc statuitur generalis regula pro inveniendo centro oscillationis: Singula penduli compositi pondera multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per factum ex summa ponderum in distantiam centri gravitatis eorundem ab axe oscillationis; quotus præbet longitudinem penduli simplicis composito isochroni.

§. CCLIX.

Corollarium I. Si pondera suspensa B, D &c. sint inter se æqualia, ac ponatur quodvis $= 1$, erit distantia centri oscillationis ab axe eiusdem $= \frac{AB^2 + AD^2}{AB + AD}$.

Si iam istiusmodi pondera sint infinita, distantia centri oscillationis ab axe eiusdem exhibebitur per seriem infinitam quadratorum numerorum naturalium, divisam per seriem infinitam eorundem numerorum. Est autem ex Elem. ea summa quadratorum æqualis tertiæ parti facti ex quadrato termini ultimi in numerum terminorum seu $= \frac{1}{3}\infty^3$; & summa infinitorum numerorum natura-

Digitized by Google

lium æqualis facto ex termino ultimo in dimidium numerum terminorum seu $= \frac{1}{2}\ \infty^2$; facta igitur divisione erit $AC = \frac{2}{3}\ \infty$. Quare si A D sit virga gravis, inflexilis, materia homogenea constans, & figuræ ubique æquabilis, altero extremo A suspensa, habentur istiusmodi series, quarum ultimus terminus $\infty = AD$; & distantia centri oscillationis a puncto suspensionis fiet $= \frac{2}{3}$ A D, h. e. *centrum oscillationis a puncto suspensionis distat duabus tertiis partibus longitudinis totius virgæ.*

§. CCLX.

Corollarium II. Præter gravitatis & oscillationis centra in corpore moto, & in aliud corpus incurrente etiam spectatur *centrum percussionis*; idque est corporis moti punctum, in quo totum eius momentum seu vis collecta concipitur; indeque fit, ut, si corpus eo centro occurrat alicui obstaculo, maiore vi id percutiat, quam si alio quovis puncto in idem impegisset; quando corpora coniuncta progrediuntur celeritate æquali, eorum percussionis centrum a centro gravitatis, vel æquilibrii non differt. At si motu oscillatorio, & celeritate inæquali convertantur circa aliquod punctum, tum eius percussionis centrum cum centro oscillationis coincidet.

CAPUT III.

De Motu curvilineo circa centrum attrahens, ac de viribus eum motum componentibus.

Paucis verbis primo expediam ea, quæ ad curvilineum motum generatim pertinent; tum de motu circa centrum agam, quod adpello attrahens eo duntaxat sensu, quatenus mobile versus aliquod punctum continuo trahitur, sollicitatur, vel quacunque vi animatum, seu impulsum tendit, uti corpora terrestria tendunt versus centrum terræ, terra, ac reliqui Planetæ versus solem, aut quomodo lapis funda circumactus perpetuo versus manum trahitur,

ut

Digitized by Google

ut in sua orbita conservetur. ' *Nihil igitur de caussa attractionis, vel nisus versus centrum hoc loco disceptandum est ; quod sane intempestivum foret, nondum explicatis legibus eius attractionis, neque naturæ phænomenis ex eiusmodi motu provenientibus adhuc perspectis.*

§. CCLXI.

Propositio I. *Siquod corpus certa directione, & velocitate proiicitur, idemque per intervalla post æqualia quævis tempora finita novo semper & unico impulsu sollicitatur alia vi secundum aliam directionem a proiectione diversam agente, id describet polygonum finitis lateribus constans.* Dem. Proiiciatur corpus (F. I. T. V.) directione AV, & velocitate, qua intra quoddam tempus percurreret rectam AB; initio eiusdem temporis sollicitetur unico impulsu, vi, qua possit eodem tempore percurrere AD; abibit secundum leges motus compositi per AE diagonalem parallelogrammi ABED. Sequenti tempore abiret vi inertiæ per EG; sed si in E vis altera post intervallum novo & unico iterum impulsu agens directione quavis EF ipsum determinet ad motum per EF, percurret diagonalem EH parallelogrammi EFGH; & ita porro, quia in H continuaret motum per HK, in L per LN, in O per OQ; si in H fit impulsus per HI, in L impulsus per LM, in O impulsus per OP, describentur novæ diagonales HL, LO, OR novorum parallelogrammorum, in quibus alterum latus exprimit lineam percurrendam motu præcedente, alterum vero lineam respondentem vi detorquenti a priore directione; quapropter hoc modo describetur polygonum AEHLOR, idque finitis constabit lateribus, quia vis detorquens AD, EF, HI, LM &c. post finita temporis intervalla ponitur agere, & motus continuus est.

§. CCLXII.

Corollarium I. Quotcunque ponantur vires activæ in idem mobile concurrentes cum directionibus quibuscunque semper orietur motus ex omnibus compositus secundum theoriam §. LII. & LVI explanatam. Porro ex binis quibusvis rectis, quæ magnitudinem, & directionem virium componentium repræsentant, semper construi potest parallelogrammum, cuius diagonalis in eodem plano iacet; hinc & directio motus compositi, quam diagonalis exhibet, in eodem iacebit plano; at si alia accedat vis unica, vel plures, quæ in plano reliquarum sitæ non sunt, directio motus compositi erit in plano, quod per diagonalem binarum quarumvis & per directionem tertiæ ductum concipitur.

§. CCLXIII.

Corollarium II. Siquod corpus certa directione, & velocitate proiectum sollicitatur secundum aliam directionem per vim *continuo agentem* sive acceleratricem, describet curvam continuam. Sint eiusmodi vires mobile a directione proiectionis A V detorquentes per A D, E F, H I, L M, O P expressæ; Si eædem continuo agant, nullum erit adsignabile tempusculum, intra quod non agant, adeoque nullum etiam erit adsignabile tempusculum, quo mobile a priore directione non detorquetur. Igitur numerus laterum polygoni finito tempore descripti crescet in infinitum, anguli vero, quos continet quodvis latus præcedens productum cum consequente minuentur in infinitum, h. e. polygonum laterum infinitorum & infinite parvorum, seu curva describetur, de qua generatim nonnulla sunt adnotanda:

I. *Ad curvam describendam opus est pluribus viribus*, quarum una saltem agit continuo; nam corpus proiectum vel impulsum per vim inertiæ semper tendit ad motum rectilineum, qui tamen, si accedat vis continuo agens, nusquam obtinetur, cum mobile perpetuo detorqueatur a priore directione.

II. *Directio proiectionis fit tangens curvæ, & in quovis curvæ puncto, si soli vi inertiæ relinqueretur mobile, per tangentem curvæ abiret.* Nam producto utrinque quovis latere H L in S & T, dum concipitur polygonum finitorum laterum describi, uti supra posuimus, si mobili in L nulla vis nova advenisset, illud abiisset vi inertiæ per L T; dum vero evanescit latus H L, & polygonum in curvam continuam abit, punctis H & L coe-

Digitized by Google

coeuntibus recta S T evadit tangens curvæ in puncto L (F. II.) & mobile per latus H L infinitesimum finite productum abiret, hoc est, per tangentem, quæ aliud non est, nisi productio finita lateris infinitesimi; ut adeo tota curva vel ex lateribus polygoni vel meris tangentibus infinite parvis composita debeat concipi. Eodem pacto productis lateribus A B in V, & A E in U, dum coeunt puncta A & E, evanescit latus A E, & A U abit in directionem proiectionis A V, & simul evadit tangens curvæ continuæ A L R (Fig. II.)

III. *Angulus inter bina quævis latera infinitesima curvæ interceptus infinite parum distat a duobus rectis.* Sint latera A E, E H infinitesima: dico, angulum A E H infinite parum differre a binis rectis. Nam G H exprimit spatium vi acceleratrice tempusculo infinitesimo confectum, adeoque est infinitesimum secundi ordinis (§. CCXXXIX. n. III.) E G vero, seu spatium celeritate finita tempusculo infinitesimo confectum, est infinitesimum primi ordinis; Hinc augulus G E H, qui est complementum anguli A E H ad duos rectos, est infinite parvus; consequenter angulus A E H inter bina infinitesima latera curvæ interceptus infinite parum distat a duobus rectis.

Hæc quidem ad motum curvilineum circa centrum, vel punctum attrahens facile transferuntur; ut tamen id corollarium, quod maximi momenti est ad naturæ investigationem magis incurrat in oculos, id instar propositionis fundamentalis exhibebimus.

§. CCLXIV.

Propositio II. *Corpus, quod circa centrum quoddam in curva revolvitur, vim duplicem habet, unam, qua ad centrum perpetuo trahitur, alteram, qua a centro conatur identidem recedere secundum tangentem; & vicissim, si corpus vi duplici, centripeta, & tangentiali simul agatur, circa centrum virium revolvetur in curva.* Propositio directa fluit ex generali lege motus (§. XXIV.) quam Philosophi, & Mathematici omnes instar axiomatis adoptarunt: *corpora per vim inertiæ pergunt unifor-*

Digitized by Google

miter in directum; quodsi ergo corpus quoddam moveatur in curva, & a priore directione identidem declinet, præter vim impressam necessario requiritur vis alia, quæ illud a lineis rectis, ad quas secundum directiones tangentium per vim inertiæ nititur, continuo detorqueat. Altera inversa propositio ex propositione I. §. CCLXI. manifesto deducitur. Sit enim (F. III.) directio, & celeritas proiectionis AB: centrum virium C, in quod tenditur vi AD; describetur diagonalis AE. Altero tempusculo mobile celeritate, & directione AE abiret per EG ob vim inertiæ; sed si illo quoque tempusculo versus centrum trahitur vi & celeritate EF, in fine illius erit in H, & ita porro; aucto dein in infinitum numero tempusculorum, & magnitudine eorundem, & proinde etiam laterum magnitudine imminuta ultra omnes limites determinate assignabiles, polygonum finitorum laterum abire in curvam continuam intelligitur ex ipsa indefinita temporis divisibilitate, & notione virium continuo agentium.

§. CCLXV.

Corollarium I. Cavitas descriptæ curvæ, eam partem respicit, in quam vis acceleratrix tendit; hinc si cæteris manentibus vis puncti C attractiva abiret in repulsivam, etiam tum describeretur curva, sed centro convexitatem obvertens.

§. CCLXVI.

Corollarium II. Hæ igitur binæ vires, quarum altera, quæ continuo agit, versus centrum quoddam, *centripeta,* vel *attractiva,* altera *proiectilis,* vel *tangentialis* dicitur, communi nomine vocantur *centrales,* quamquam hac voce sola vis centripeta sæpe denotetur. Curva descripta dicitur *traiectoria*, vel si in orbem redeat, *orbita:* centrum virium C etiam *focus*, vel *umbilicus*, nuncupatur. Lineæ AC, EC ex centro in punctum revolutum ductæ, quæque istius a centro distantias metiuntur, sunt *radii vectores*, qui una cum mobili transferri concipiuntur, vel potius ipsum mobile transvehunt

con-

Digitized by Google

conceptu nostro, fere uti funda cum lapide circumvehitur. Pro varia autem mobilis a centro distantia radii vectores crescere, vel decrescere concipiuntur, ac tum spectamus non modo arcus curvæ a mobili descriptos dato tempore, sed etiam areas curvæ perimetro, & radiis vectoribus conclusas. Illud præterea addendum; quia mobile tempusculo infinitesimo a tangente non nisi quantitate infinite parva secundi ordinis detorquetur (qui est effectus vis centripetæ §. CCLXIII.) hinc pro arcu infinitesimo tangens, & pro celeritate per arcum infinitesimum celeritas & vis per tangentem sumi potest, eademque est vis proiectionis, & tangentialis, & celeritas motus per arcus minimos.

§. CCLXVII.

Corollarium III. *Radius vector describit areas temporibus proportionales*, h. e. æqualibus temporibus æquales, duplis, vel triplis duplas vel triplas; quod manifestum erit, si ostendatur, areas triangulorum ACE, ECH, HCL &c. eodem tempore descriptorum æquales esse. Ducta recta CG, erunt triangula ACE, ECG æqualia; cum sint super æquales bases AE, & EG, & ex eodem vertice C; est autem triangulum ECG æquale triangulo ECH, cum ambo insistant eidem basi CE, & sint inter easdem parallelas EC, HG; idem vero obtinet, si areæ triangulorum fiant infinite parvæ, & polygonum in curvam continuam abit: utcunque enim minuantur latera, eadem constans manet ratio. Ex his vero haud ægre intelligitur propositio inversa huius corollarii: *Siquod corpus circa datum punctum describit areas temporibus proportionales, versus illud habet vim centripetam.* Sint enim areæ ACE, ECH æquales. Producta AE tantundem in G, erit triangulum ECG æquale triangulo ACE, & proinde triangulo ECH. Cum igitur triangula ECG, ECH basin habeant communem, erunt inter easdem parallelas GH, & EC. Quapropter ducta HF parallela ad EG motus per EH componetur ex binis motibus per EG, & EF; quorum primus cum oriatur a vi inertiæ motum præcedentem per AE continuante in directum, posterior

Digitized by Google

rior orietur a vi tendente in C; mobile proinde vim habet centripetam versus C.

Demonstratio hæc supponit, curvam descriptam iacere in eodem plano. Cæterum areæ descriptæ æquantur dimidio facto ex arcu tanquam basi, & perpendiculo in tangentem demisso; hinc si sint arcus descripti A, & a temporibus T, & t; perpendicula arcuum P & p; erit T: t

$$= \frac{AP}{2} : \frac{ap}{2} = AP : ap.$$

§. CCLXVIII.

Corollarium IV. *Celeritas, qua corpus circa centrum virium describit areas temporibus proportionales, in diversis eiusdem orbitæ punctis, vel arcubus infinitesimis, est reciproce ut perpendiculum ex centro virium in tangentem demissum;* Nam æqualibus temporibus æquales describuntur areæ, seu minimis tempusculis æqualia triangula, quorum bases universe sunt reciproce ut altitudines, seu perpendicula; cum igitur bases æqualium triangulorum, seu arcus minimis, & æqualibus tempusculis descripti exprimant spatia, ac proinde etiam celeritatem, quæ minimis tempusculis pro constante habetur, patet, celeritatem esse reciproce ut perpendiculum ex centro virium demissum; nempe $C = \frac{S}{T}$ in motu æquabili; est autem spatium confectum uti arcus A, & a; & tempora ex Schol. §. præc. sunt ut A P & a p; igitur erit celeritas $C = \frac{A}{AP} = \frac{1}{P}$; vel si arcus descriptus, sive celeritas dicatur C; area A; perpendiculum P; erit $A = \frac{CP}{2}$ & $C = \frac{2A}{P}$.

Hæ propositiones cum suis corollariis maximi momenti sunt in Philosophia Newtoniana; cum enim ex observationibus primarii planetæ omnes circa solem describant areas temporibus proportionales, & ex coroll. III. omne

cor-

Digitized by Google

corpus, quod hac lege arearum orbitam describit, urgeatur vi quadam in ipsum centrum istiusmodi arearum; manifeste consequitur, in planetis vim gravitatis versus solem inesse. Sed antequam plura istiusmodi exempla de usu virium centralium adferamus, motus in circulo exponendus est.

CAPUT IV.

De Motu in Circulo, cuius Centrum ponitur esse Centrum Virium.

Machinam virium centralium, variaque experimenta, quae eiusdem ope fieri possunt, passim descriptam apud Auctores reperies; quapropter theoriam huius motus, tum eius in natura usum maxime declarare animus est.

§. CCLXIX.

Propositio I. *Si quod corpus vi proiectili & centripeta volvitur in circulo, cuius centrum est centrum virium, eius velocitas per totam circuli peripheriam est constans.* Velocitas enim in diversis orbitae punctis vel arcubus infinitesimis est reciproce ut perpendiculum ex centro virium in tangentem demissum (§. CCLXVIII.) cum igitur omnia perpendicula ex centro circuli in tangentem demissa aequent radium, qui constans est, patet, velocitatem quoque in hoc motu esse constantem.

§. CCLXX.

Propositio II. *Vis centripeta in circulo est in ratione composita ex directa duplicata arcuum minimis tempusculis descriptorum, sive ex directa duplicata celeritatum, & inversa simplice radiorum, sive distantiarum a centro virium, & circuli.* Sit (F. IV.) S T tangens, sive directio, secundum quam mobile nititur vi proiectionis, aut inertiae. Vim centralem, quae minimis tempusculis

lis ex effectu æstimatur, exprimit lineola S m vel A a, siquidem vis proiectionis, aut inertiæ, qua mobile secundum tangentem nititur, ponitur expressa per S A, vel si hæc vis ponitur maior, expressa per S B, vim centripetam exprimet recta S n, vel B b; nam ex Geometria infinitesimorum, si arcus S a, S b ponuntur infinitesimi, sinus versi S m, vel S n eorum arcuum, & interceptæ inter tangentem, & arcum lineolæ A a, B b æquipollent. Porro mensura absoluta virium acceleratricium non est spatiolum S m, vel S n, quod per vim centripetam, vel acceleratricem motu uniformiter accelerato intra tempusculum infinitesimum percurritur, sed duplum spatiolum, sive 2 S m, vel 2 S n; quia mensuræ virium sunt spatia motu æquabili percursa: at vero eodem tempore, quo motu accelerato percurritur S m, vel S n, motu æquabili, & celeritate finali conficitur duplum spatium = 2 S m, vel 2 S n. Dicatur vis centripeta V; erit V = 2 S m vel = 2 S n. His positis constat ex elementis, si ex eodem extra circulum puncto A duæ ducantur rectæ, altera tangens A S, altera secans A d; tangens A S est media proportionalis inter totam secantem, & eius partem A a extra circulum. Erit igitur $A\,a = \frac{A\,S^2}{A\,d}$; quia vero arcus infinitesimi non differunt a tangentibus, & præterea lineola A a respectu diametri evanescit, erit $A\,a = \frac{S\,a^2}{a\,d}$.

Et quoniam vis centripeta V exprimitur per 2 S m, vel 2 A a, erit $V = \frac{S\,a^2}{\frac{1}{2}\,a\,d} = \frac{C^2}{D}$, si celeritas quæ est ut arcus S a descriptus dicatur C, & radius sive $\frac{1}{2}\,a\,d$, cum sit distantia mobilis a centro virium & circuli, ponatur = D. Si celeritas proiectionis, aut motus, quo fertur mobile in circulo ponitur maior, & exprimatur per S B, vel S b, erit vis centripeta pariter maior in ratione $\frac{S\,b^2}{\frac{1}{2}\,b\,e}$. Quæcunque autem ponatur celerileritas proiectionis, & vis centripeta, illa intra tempusculum infinitesimum semper infinities maior est, nimirum infinitesima primi ordinis, hæc infinitesima secundi ordinis (§. CCXXXIX. n. I. & III.) tempore finito utriusque effectus sit finitus; quod de vi tangentiali manifestum est; sed de vi quoque centripeta haud ægre perspicitur; cum enim tempus finitum ex infinitis tempusculis coalescat, effectus vis centripetæ, si eius actio non repeteretur, evaderet infinitesimus primi ordinis; ob repetitam autem continuo actionem uno præterea gradu altior, sive finitus evadat, necesse est. Etsi vero actio vis centripetæ sit continua; non tamen idcirco sequitur, ut mobile identidem magis ad centrum accedat, nam eius effectus est, ut mobile continuo a tangente retrahat, sive impediat, ne magis, ac antea, discedat a centro.

§. CCLXXI.

Corollarium I. Dici potest: *Vis centripeta in diversis circulis est ut quadratum celeritatis divisum per diametrum*; Nam eadem est ratio radiorum, & diametrorum, sive simplicis ad simplum, ut dupli ad duplum.

§. CCLXXII.

Corollarium II. *Vis centripeta in diversis circulis est in ratione composita ex directa simplice radiorum, sive distantiarum a centro virium, & reciproca duplicata temporum periodicorum*; cum enim celeritas in motu circulari sit constans, ea erit directe ut spatium percursum, & reciproce ut tempus, secundum formulam $C = \frac{S}{T}$. Porro spatia percursa sunt ut peripheriæ, hæ ut diametri, vel radii, id est, distantiæ a centro virium; erit igitur $C = \frac{D}{T}$; & $C^2 = \frac{D^2}{T^2}$; si igitur hic valor substitui-

tur

tur in formula $\frac{C^2}{D}$, quæ vim centripetam exprimit, ea erit $= \frac{D^2}{D\,T^2} = \frac{D}{T^2} = V$.

§. CCLXXIII.

Corollarium III. Quoniam in æstimanda vi centripeta V hactenus duntaxat vim acceleratricem gravitatis spectavimus, facile intelligitur, vim motricem eo maiorem esse, quo maior est massæ revolutæ quantitas; sit ea $= M$; erit vis motrix gravitatis $= \frac{M\,D}{T^2}$, sive *in ratione composita ex directa massæ, & distantiæ a centro virium, & reciproca duplicata temporum periodicorum.* Ex qua formula pronum est, complura theoremata pro experimentis virium centralium derivare; nam in motu astrorum, ad quem hæc theoria maxime refertur, nullam rationem massæ in centrum virium tendentis, sed massæ duntaxat attrahentis, sive illius, in quam tenditur, habendam esse docebimus. Si autem exercitationis caussa spectantur massæ, sint in binis corporibus circulos describentibus, vires centripetæ V, & u; distantiæ a centro virium D, & d, tempora periodica T, & t, massæ M, & m; sitque $M = 3\,m = 5$. $D = d = 3$. $T = t = 2$; erit $V : u = \frac{9}{4} : \frac{15}{4} = 3 : 5$ hoc est, si tempora periodica & distantiæ a centro virium utrinque eædem sunt, vires centrales sunt ut massæ. Sit $M = m = 5$. $T = t = 3$. $D = 2$. $d = 6$. erit $V : u = \frac{10}{9} : \frac{30}{9} = 2 : 6$ hoc est, cæteris paribus vires centripetæ sunt ut distantiæ a centro virium. Sit denique $M = 6$. $m = 3$. $D = 2$, $d = 6$; $T = t = 4$; erit $V : u = \frac{12}{16} : \frac{18}{16} = 12 : 18$. h. e. Si tempora periodica sunt æqualia, vires centrales sunt in ratione composita massarum, & distantiarum.

§.

§. CCLXXIV.

Corollarium IV. *Si quadrata temporum periodicorum ponuntur ut cubi distantiarum* (quod quidem de revolutionibus planetarum Keplerum observasse dicemus) *erit vis in centrum virium tendens in ratione reciproca duplicata distantiarum ab eodem centro.* Nam ex hyp. $T^2 = D^3$; & ex Cor. II. $V = \frac{D}{T^2}$; igitur facta substitutione erit $V = \frac{D}{D^3} = \frac{1}{D^2}$.

§. CCLXXV.

Corollarium V. *Si vires centripetæ, per quas diversi circuli describuntur, nempe in diversa a centro distantia, sint reciproce ut quadrata distantiarum ab eodem centro, erit celeritas motus circularis in ratione reciproca subduplicata distantiarum*, sive $C = \frac{1}{\sqrt{D}}$. Nam ex hyp. $V = \frac{1}{D^2}$; est autem universe in circulo $V = \frac{C^2}{D}$; erit igitur hoc casu $\frac{1}{D^2} = \frac{C^2}{D}$; & $\frac{D}{D^2} = C^2$, sive $\frac{1}{D} = C^2$; unde fit $C = \frac{1}{\sqrt{D}}$.

§. CCLXXVI.

Resolvuntur Dubia, & ostenditur usus Theoriæ Virium Centralium.

I. *Omne corpus, quod circa centrum quoddam in curva revolvitur, vim duplicem habet, unam, qua ad centrum perpetuo trahitur, alteram, qua a centro conatur iden-*

identidem recedere secundum tangentem (§. CCLXIV.) *cum igitur*, inquiunt, *diversae curvae describi possint*, *uti circularis*, *elliptica*, *parabolica &c. adsignanda est ratio sufficiens*, *cur in dato casu haec potius*, *quam alia curva describatur ob vim proiectilem*, *& centripetam*, *seu vim gravitatis.* R. Sine dubio Philosophi est, saltem generalem rationem dare, cur haec potius, quam alia curva describatur ob vim proiectionis, & gravitatis; nam orbitas planetarum circa solem dicemus esse ellipticas: corpora in superficie terrae proiecta proxime describunt ramos parabolae: motus lunae circa terram adparet ad circulum accedere; cum igitur omnes isti motus curvilinei a vi proiectionis, & gravitatis oriantur, legitime quaeritur, cur haec potius quam alia traiectoria conficiatur a mobili. Dico: ratio generalis, cur haec potius, quam alia curva percurratur, petenda est tum ab angulo, quem directio proiectionis, vel durante motu positio tangentis efficit cum recta ad centrum virium ducta, tum & praecipue a certa attemperatione vis proiectilis seu tangentialis, & centripetae, sive a ratione, quae inter eas vires intercedit; quemadmodum generatim positio, & magnitudo diagonalis, quae motum compositum exprimit, ab angulo, & a ratione virium componentium pendet; idem igitur in motu fit curvilineo, quia quodvis infinitesimum latus curvae quaedam diagonalis est. Ut ea virium attemperatio intelligatur, *primo* spectatur, quanta esse debeat celeritas proiectionis, vel quanta sit celeritas motus in quovis arcu infinitesimo. *Secundo* quanta sit vis gravitatis, & quomodo ea pro varia a centro virium distantia crescat, vel decrescat. Ex iis dein facile intelligitur, qualis ea virium componentium attemperatio esse debeat; Nam praecipuus effectus virium gravitatis sive centripetarum est, ut mobile a rectilineo motu, ad quem per vim proiectionis, vel inertiae in quovis arcus puncto nititur, ad arcum datae curvae describendum detorqueatur; hinc si manente eadem vi centripeta maior ponitur celeritas tangentialis, mobile eodem tempusculo minus a tangente deflectitur, & orbita magis dilatatur; si vero manente vi proiectili maior ponitur vis centripeta, orbita magis incurvescit; consequenter nisi certa attemperatio virium com-

po-

ponentium concipiatur, nunquam eandem describi curvam concipi potest, quae reipsa describitur.

II. Dicunt: *Vires componentes, nempe vis centripeta, & proiectionis sunt vires dispares, & heterogeneae, nimirum illa acceleratrix, & saepe variabilis: haec uniformis & constans; igitur intelligi non potest, quomodo ratio quaedam inter eas vires determinari queat.* R. Ea ratio determinatur hoc modo: Ponitur mobile per vim gravitatis eandem, quam in puncto proiectionis, vel in dato puncto orbitae habet, decidere versus centrum virium, eaque gravitate constante motum accelerare uniformiter; & quoniam motu libero, & uniformiter accelerato quaevis data celeritas acquiri potest (§.LXXXIX) hinc determinatur spatium, per quod, si corpus ea, quam habet, gravitate constante decideret, velocitas proiectionis, sive motus, quo fertur in orbita, acquireretur. Eiusmodi spatium versus centrum virium confectum, a nobis adpellabitur *altitudo respondens* celeritati, qua proiiciendum est corpus, ut datam curvam describat, vel qua fertur in data orbita. Exempli caussa poni potest istiusmodi problema: *Invenire altitudinem, per quam corpus motu libero, & uniformiter accelerato descendendo versus centrum virium per actionem constantem gravitatis, acquireret celeritatem, qua proiectum circulum describeret circa illud centrum.* Sit (F. IV.) centrum C. mobile in S; altitudo quaesita x; tempus per S m = t; tempus per x = T.

1. Quoniam spatia motu uniformiter accelerato, & gravitate constante confecta, sunt ut quadrata temporum, erit

$$S\,m : x = t^2 : T^2.$$

2. Corpus eodem tempore t moveretur per S m, & S *a*, atque eodem tempore T, quo motu uniformiter accelerato conficit spatium x, celeritate finali, & motu aequabili conficeret 2 x; atque haec celeritas per spatium = 2 x, esset celeritas proiectionis, sive celeritas per arcum S *a*. Cum igitur celeritas per arcum S *a*, & per spatium 2 x sit eadem, erunt haec spatia, ut tempora, queis percurruntur, sive

$$S a : 2 x = t : T$$

Unde fit $S a^2 : 4 x^2 = t^2 : T^2$.

3. Si comparetur hæc analogia cum numero primo, fit

$$S m : x = S a^2 : 4 x^2.$$

& $$S m : 1 = S a^2 : 4 x$$

Consequenter $S m = \frac{S a^2}{4 x} = \frac{S a^2}{a d}$; nam arcus infinitesimus $S a$ non differt a chorda respondente, quæ est media proportionalis inter diametrum $a d$, & segmentum adiacens $S m$.

4. Cum igitur sit $\frac{S a^2}{4 x} = \frac{S a^2}{a d}$, erit $4 x = a d$; & $x = \frac{a d}{4}$ hoc est, ut *corpus acquirat celeritatem proiectionis, qua volveretur in circulo, deberet descendere per quartam diametri partem, sive dimidium radium; & celeritas, qua corpus in circulo volvitur, eadem est, quam lapsu libero per dimidium eius radium acquireret ope eiusdem gravitatis, quam habet in S seu puncto proiectionis.* Quæ præterea ad hunc locum referri possunt, problemata infra exponemus.

III. *Nulla est ratio sufficiens, cur vis centralis sive centripeta in circulo, sit ut quadratum celeritatis directe, & reciproce ut radius; Nam vires, præscindendo a massis, sunt ut ipsæ celeritates, non ut quadrata earundem; nec facile intelligi potest, quid radius ad maiorem, vel minorem vim centripetam conferat.* Hæc quidem non nisi declarandæ rei gratia obiici possunt; reipsa enim datæ a nobis demonstrationi nihil officiunt. Quapropter R. Vires sunt ut ipsæ celeritates per eas vires genitæ; c. ut celeritates productæ per vim aliam, vel ut celeritates motus compositi, n. Nempe vis centripeta est ut quadratum celeritatis, qua mobile abiret per

tan-

tangentem, aut qua volvitur motu compoſito in curva; non eſt autem hæc vis centripeta ut quadratum celeritatis, quam ipſa gignit. Et quoniam effectus vis centripetæ eſt, ut mobile a tangente, ſecundum quam per vim inertiæ perpetuo nititur, detorqueatur ad orbitam, hinc ea in eadem ratione creſcere debet, qua creſcunt lineolæ, A *a*, B b inter tangentem, & arcum interceptæ; hæ autem lineolæ creſcunt ut quadrata tangentium S A, vel S B; cum igitur hæ tangentes exprimant celeritatem proiectionis, vel motus in orbita, neceſſe eſt, ut vis centripeta creſcat, ut quadratum celeritatis. Dein quo minor eſt radius, eo minor eſt circuli curvatura, eoque magis creſcunt illæ lineolæ A *a*, & B b, quæ rationem vis centripetæ exprimunt; igitur ex hac ratione intelligi poteſt, cur ea ſit reciproce ut radius, ſive diſtantia a centro virium. Hinc vero etiam alterius expreſſionis, qua V fit $= \frac{D}{T^2}$, expoſitio quædam phyſica derivari poteſt; cum enim motus in circulo ſit æquabilis, ubi celeritas univerſe eſt directe ut ſpatium, ſive in motu circulari ut peripheria aut radius, & reciproce ut tempus; erunt quadrata celeritatum, ut quadrata radiorum, ſeu diſtantiarum directe, & reciproce ut quadrata temporum; hinc facta ſubſtitutione $\frac{D^2}{T^2}$ pro C^2 fit $V = \frac{D}{T^2}$, uti coroll. II. oſtendimus. Plures iſtiusmodi *explicationes phyſicas*, uti non nulli vocitant, de formulis ope matheſeos erutis tum adferemus, cum de planetarum motu erit agendum.

IV. *Paſſim Philoſophi ſtatuunt, motum curvilineum circa centrum oriri ex vi centripeta, & centrifuga; & vim centrifugam etiam experimenta comprobant, dum enim lapis ope fundæ circumagitur, funda tenditur, & manus niſum contrarium ſentit. Ergo curvilineus motus per vim centripetam, & tangentialem non ſatis intelligitur.* R. Non quæritur, quid Philoſophi quidam ſtatuant; ſed quid convenienter rationi, & experientiæ ſtatuere debeant. Vis centrifuga in corporibus circa centrum revolutis reipsa & absolute nulla est, sed duntaxat fingitur hypothetice, nimirum si cessante vi centripeta mobile per tangentem abiret, eo ipso magis discederet, & distaret a centro, quam si conservaretur in orbita; uti si cessante vi centripeta S m (F. V.) mobile ex S veniret in A, intervallo A i auffugisset ab orbita; hæc igitur vis centrifuga expressa per A i duntaxat fictitia est, & hypothetica, & æquatur vi centripetæ S m, cum sit oppositum latus in parallelogrammo, cuius diagonalis est arculus infinitesimus dato tempusculo descriptus. Tensio fundæ, & vis contraria, quam manus sentit, oritur a vi tangentiali, sive perpetuo nisu mobilis abeundi per tangentem, a qua proin perpetuo retrahi debet. Sane cum in motu composito quodvis latus exprimens vim quandam æquipolleat binis aliis viribus per reliqua latera expressis (§. LVIII.) hinc & vis tangentialis S A æquipollebit vi S i & S m contraria directione sumtæ seu vi S n, quæ a vi centripeta trahente versus centrum extinguenda est, ut mobile describat latus S i sive arcum curvæ; satis igitur patet, quomodo a vi tangentiali oriatur tensio fundæ, & vis contraria, quam manus sentit; centrum enim rotationis est ipsa manus, quæ continuum nisum exerere debet, ne funda excutiatur; omnis porro ars funditorum in eo sita est, ut laxato opportune funiculo ad observatam metam per tangentem abire sinantur lapides. Hæc directio, & vis tangentialis, quam cessante vi centripeta sequuntur rotata corpora, plurimis observationibus, & experimentis comprobatur. Si ad cotem acuuntur instrumenta mechanica, vel si rota molaris volvitur in aqua, guttæ aquæ per tangentes disperguntur: pariter lutum adhærens rotis linea recta, quæ rotam tangit, eiicitur. Sic & frusta lapidis molaris, si cessat vis cohæsionis, avolant per tangentem; ea autem vis cohæsionis partium rotæ vim centripetam obit. Ratio autem, cur præcise per tangentem abeant corpora rotata, ex generali lege motus intelligitur, vi cuius ea per vim inertiæ semper ad motum uniformem in directum tendunt; etsi autem per vim centripetam a rectilineo motu detorqueantur; tamen, cum vis inertiæ semper maneat, in quovis arcus descripti

pun-

Digitized by Google

puncto nituntur ad eiusmodi motum; cum igitur tangens nihil aliud sit, quam productio finita lateris polygonaris infinite parvi, necesse est, ut in quovis arcus puncto semper per tangentem conentur abire.

V. *In machina virium centralium globi rotati moventur per filum ferreum, quod radios circuli descripti, non tangentes repræsentat; igitur inferunt corpora in gyrum acta veram vim centrifugam, non tangentialem habent.* R. Globi per filum ferreum transmissi, cum a filo impediantur, moveri secundum tangentem hoc casu non possunt; rupto autem filo ferreo, uti fit non raro, eos omnino per tangentes eiici observamus. Liquores in tubis vitreis rotati etiam ad latera, si possint, diffluunt; quod vero maiore copia abeant secundum radios, ratio est, quia primo diffluere ad latera non possunt ob ipsa latera vitri, tum quia a partibus insequentibus recta premuntur.

VI. *Si capsæ argilla molliore intus vestitæ inseritur globus, qui dein una cum capsa in gyrum agitur, globus vestigium argillæ imprimet non directione tangentis, sed radii; ergo, inferunt, corpora rotata non semper per tangentem abeunt.* R. Ratio experimenti est. Dum globus cum capsa rotatur, fit, ut eadem celeritate, qua globus versus latera secundum tangentem nititur, ipsum capsæ latus cum argilla effugiat; hinc vestigium ei imprimi nullum potest. At si motus machinæ repente sistitur, globus etiam lateri capsæ imprimet cavitatem; quod indicio est, eundem iam ante habuisse nisum versus latus, sive secundum tangentem, sed sine effectu; quia capsa æquali celeritate cedendo actionem globi quodammodo evitabat.

VII. *Si in aqua festucæ aut paleæ innatent, eæ rotato vase versus centrum compelluntur; igitur non adparet, quomodo vim abeundi per tangentem habeant.* R. Rotato vase aqua in verticem acta, cum sit densior festucis, & paleis, & proinde maiore vi polleat discedendi a centro, festucas leviores contraria directione versus centrum compellit; uti enim liquod fluidum magis deorsum premit, quam ligna vel paleæ; hæc corpora leviora sursum truduntur; ita secundum leges pressionis, si fluidum maiore vi recedat a centro, corpora leviora versus centrum agi necesse est; hinc & flamma rotata centrum respicit, cum ignis sit levior aere. Observa: Si motus rotationis sistitur, & vas aqua plenum quiescit, fluidum tamen ob ipsam partium separabilitatem gyrum suum per vim conceptam continuat; sic postquam animalia maiore celeritate in orbem acta sunt, cessante eo motu totius corporis aliquamdiu circumagi sibi videntur, propterea quod spiritus animales priorem rotationis motum quodam tempore conservent. Cæterum ut de usu quoque huius theoriæ dissseramus, Ioannes Keplerus Wilæ natus in ducatu Wirtenbergico anno 1571 præter alia præclare inventa primus censetur observasse eam naturæ legem, qua corpora rotata circa centrum conantur ab eodem recedere, ita, ut, si in aqua festucæ aut paleæ innatent, rotato vase aqua in verticem acta, festucis densior, proin maiore vi recedens, festucas versus centrum compellat; id quod Keplerus locis pluribus, & in Epitome astronomiæ exposuit, *quamquam adhuc subdubitans* (ut ait Leibnitius Act. Erud. Ann. 1689) *& suas ipse opes ignorans, nec satis conscius quanta inde sequerentur tum in Physica, tum speciatim in Astronomia.* Addit Leibnitius, his deinde egregie usum esse Cartesium, quamquam more suo auctorem dissimularit. At enim merito dubites, Cartesium Keplerianis inventis usum fuisse, vel abusum dici oporteat. Nam ex sola rotatione fundæ, quam vi centripeta, & centrifuga agi dixerat, totum orbis systema concepit, & vortices construxit, & elementa corporum, eorumque genesin ita descripsit, ac si orbi fabricando interfuisset. Felicius observationibus Kepleri usus est Newtonus, qui theoriam inde condidit admirabilem qua intricatissimos planetarum motus, & vires, quibus ea corpora aguntur, explicavit summo cum naturæ phænomenis consensu. Postquam enim animadversum erat, corpora circa centrum quoddam revoluta perpetuo ad recessum ab eodem niti secundum rectas tangentes, duo hæc necessario concludi debebant: *primo* ea, quamdiu in orbita conservantur, perpetuo a directionibus tangentium retrahi, & versus centrum trahi debere; secus enim reipsa recederent, non aliter ac

par-

partes molaris lapidis cessante vi cohæsionis per lineas rectas excutiuntur. *Secundo* eiusmodi corpora agi motu composito ex duabus saltem viribus, una qua ad centrum trahuntur, vel quomodocunque tendunt, altera qua secundum rectas tangentes uniformiter pergere conantur; prior vis centripeta, altera tangentialis passim nunc dicitur, olim centrifuga adpellata a quibusdam. Virium igitur istarum, quas centrales vocant, theoria maximi momenti, atque usus est; omnis enim de gravitate corporum adcuratior perquisitio, & tota astronomia physica inde pendet; ostendemus enim cometas, & planetas non aliis viribus, quam centripeta, & tangentiali orbitas suas circa solem describere, eosque ni vi gravitatis in solem tenderent, vel attraherentur a sole, quovis momento per lineas rectas esse discessuros. Ut hæc virium centralium expositio, quæ tanti momenti est, recte percipiatur, adiungemus exercitationis caussa quædam problemata ad hunc locum pertinentia.

VIII. Problema I. *Invenire celeritatem gravi terrestri imprimendam, ut horizontaliter proiectum circulum describat circa terram, ac pro eodem casu invenire tempus periodicum.* Nimirum ei corpori imprimenda esset celeritas, quam acquireret vi gravitatis, quæ est prope superficiem terræ, lapsu libero, & uniformiter accelerato per dimidium terræ radium. Est autem gravitas terrestris ea, ut intra 1'' conficiantur 181. dig. terræ diameter $=$ 39231564 ped. Parif. $=$ 470778768 dig. sit spatium $181'' = g$, & dimidius radius $= s$; erit diameter $= 4\,s$. & $s = 117694692''$ Celeritas finalis lapsu libero & uniformiter accelerato acquisita æstimatur ex duplo spatio motu æquabili conficiendo intra idem tempus, quo lapsus durabat; erit ergo celeritas finalis acquisita primo minuto secundo $= 2\,g$. Porro quoniam spatia motu accelerato confecta sunt ut quadrata harum celeritatum finalium, erit $g : s = 4g^2 : 4g\,s$; ultimus terminus exprimit quadratum celeritatis finalis acquisitæ lapsu libero per dimidium terræ radium; erit ergo ipsa celeritas $= 2\sqrt{g\,s}$; atque hæc ipsa est celeritas, qua corpus horizontaliter proiectum circulum describeret circa ter-

 ram.

Digitized by Google

ram. Est autem $2\sqrt{gs}$ neglectis fractionibus $=$ 291908; tanta igitur requiritur celeritas proiectionis, ut per eam corpus proiectum intra minutum secundum percurrat digitos 291908, qui proxime efficiunt pedes 24325. Hi rursus conversi in leucas (continet autem leuca 2000 hexapedas, seu 12000 pedes) præbent leucas $2\frac{1}{37}$ quam proxime intra 1'' percurrendas. Tanta igitur celeritate si grave terrestre proiiciatur sub angulo recto, sepositis impedimentis motum perturbantibus, circa terram circulum describeret sive satelles, aut luna terræ fieret; sed vi quidem humana tanta celeritas corpori imprimi haud potest. Ut iam tempus revolutionis eruatur, animadverte, celeritatem, qua mobile peripheriam sui circuli describeret, esse eandem, quam lapsu libero, & uniformiter accelerato per dimidium radium acquireret; atque hoc eodem tempore, quo hanc celeritatem finalem acquirit, per eam motu æquabili percurreret duplum spatium, sive radium circuli; hinc cum celeritas per radium, & circuli peripheriam eadem fit, erunt tempora, queis radius, & peripheria celeritate finali percurrerentur, uti ipsa spatia percurrenda; nempe ut radius ad peripheriam ($\frac{113}{2}$: 355) ita tempus motus æquabilis per radium vel tempus motus accelerati per dimidium radium ad tempus integræ revolutionis in circulo. His positis quæratur tempus motus accelerati per dimidium radium, quod ad tempus per g erit in ratione subduplicata spatiorum, sive $= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$; nam $\sqrt{g} : \sqrt{s} = 1 : \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$. Deinde fiat: ut radius $\frac{113}{2}$ ad peripheriam 355; ita tempus descensus per dimidium radium $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$ ad tempus integræ revolutionis in circulo $= \frac{355}{113} \times 2 \times \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}} = \frac{355}{113} \sqrt{\frac{4s}{g}} = 5068''$ proxime; igitur tempus revolutionis adæquat proxime 1 hor. 24'. 28''.

28". Ex his præterea colligi poteſt *primo* quoniam motus in circulo eſt æquabilis, erit tempus revolutionis per quadrantem quadruplo minus tempore totius revolutionis, adeoque *erit tempus deſcenſus per dimidium radium ad tempus, quo deſcribitur quadrans, uti radius ad quadrantem. Secundo ſpatium, per quod corpus vi centripeta conſtante decideret, eſt ut quadratum arcus eodem tempore deſcripti diviſum per diametrum.* Sit enim (F. VI. T. V.) A Q H peripheriæ quadrans; $AG = \frac{1}{2} AC$. Ponatur arcus A Q deſcribi eodem tempore, quo fit deſcenſus liber per A M; erit

$$\text{tempus per } AM : \text{tempus per } AG = \sqrt{AM} : \sqrt{AG}.$$
$$\text{tempus per } AG : \text{tempus per } AH = 2\,AG : AH \text{ (cor.præc.)}$$
$$\text{tempus per } AH : \text{tempus per } AQ = AH : AQ$$

itaque eſt $\text{tempus per } AM : \text{tempus per } AQ = 2\sqrt{AM.\,AG} : AQ$; cumque hæc tempora ponantur æqualia, erit $2\sqrt{AM.\,AG} = AQ$; & $4\,AG.\,AM = AQ^2 = AM.\,2\,AC$ conſequenter $AM = \frac{AQ^2}{2\,AC}$.

IX. Problema II. *Poſita eadem gravitate terreſtri invenire primo tempus periodicum, dein celeritatem proiectionis eruere.* Dicatur diameter telluris a; ſpatium intra 1" gravitate terreſtri percurſum $= 181'' = g$. Tempus periodicum x; ratio peripheriæ ad diametrum ſit $= 355 : 113$; erit igitur peripheria a corpore deſcribenda $= \frac{355\,a}{113}$.

1. Quoniam motus in circulo eſt æquabilis, erunt tempora uti arcus decurſi, adeoque (F. VI. T. V.) uti tota peripheria ad arcum A Q; ita tempus integræ revolutionis x ad tempus, quo decurritur arcus A Q; ſeu $\frac{355\,a}{113} : AQ = x : \frac{x \times AQ \times 113}{355\,a}$; quartus terminus exhibet tempus per arcum A Q.

2. Quæratur ſpatium, quod gravitate terreſtri ac motu libero conficitur eo tempore, quo percurritur arcus

cus A Q; & quoniam in motu uniformiter accelerato ſpatia ſunt ut quadrata temporum, erit

$$1 : \frac{x^2 \times AQ^2 \times (113)^2}{(355)^2\, a^2} = g : \frac{x^2 \times AQ^2 \times (113)^2 \times g}{(355)^2 a^2}.$$

3. Hoc ſpatium per conſectarium ſecundum numeri præc. æquatur quadrato arcus eodem tempore deſcripti diviſo per diametrum; itaque erit

$$\frac{x^2 \times AQ^2 \times (113)^2 \times g}{(355)^2\, a^2} = \frac{AQ^2}{a}.$$

Hinc autem facile eruitur $x^2 = \frac{(355)^2 \times a}{(113)^2\, g}$, &

$x = \frac{355}{133} \sqrt{\frac{a}{g}}$. Denotat autem a diametrum ſeu 4s; Idem igitur ut ſupra invenitur tempus periodicum $= 5068''$. Ut celeritas proiectionis eruatur, quæratur tempus deſcenſus per dimidium radium; quod quidem ex tempore periodico eruitur; ſit illud $= T$; erit ex num. præc. $\frac{113}{2} : 355 = T : 5068$. Subducto calculo reperitur $T = 806, 5$. Porro ex formula indicata in Schol. §. XCVI. Probl. IV. celeritas finalis univerſe eſt $= 2\, g\, T = 2 \times 181 \times 806, 5 = 291953$ proxime, uti probl. præc. reperimus. Numerus inventus in digitis indicat ſpatium a mobili intra $1''$ conficiendum vi proiectionis.

X. Problema III. *Poſito motu vertiginis terræ intra 24 horas* ($= 86400''$) *invenire vim centrifugam corporis in ſuperficie terræ poſiti relate ad gravitatem terreſtrem.* R. Vi centripetæ corporum revolutorum æquatur vis centrifuga, eademque utriusque expreſſio eſt, uti numero IV huius §. oſtendi. Si corpus terreſtre circa terram revolvitur intra $5068''$, ea vis centripeta & centrifuga æquat gravitatem terreſtrem; quæritur, quanta ſit hæc vis, ſi in eadem a centro terræ diſtantia, quæ radium telluris æquat, revolvitur intra 24 horas $= 86400''$. Dicatur hoc tempus T, illud ſuperius ſit $= t$.

Digitized by Google

$= t$. Vis centrifuga sub revolutione T sit $= 1$. Ex Cor. II. §. CCLXXII. vires centripetæ sunt directe ut distantiæ, & reciproce ut quadrata temporum periodicorum; ex hypothesi distantiæ sunt eædem $= 1$, Erit igitur $t^2 : T^2 = 1 : \frac{T^2}{t^2}$ seu $(5068)^2 : (86400)^2 = 1 : 287$ proxime; hoc est, si corpus terrestre circa terram revolvitur intra 24 hor. vis centrifuga se habet ad gravitatem terrestrem sive ad vim sub revolutione t, uti $1 : 287$; hæc ratio non multum discrepat ab ea, qua passim statuunt, vim centrifugam corporis terrestris sub æquatore ad vim gravitatis terrestris esse, ut $1 : 289$. Ut inveniatur, quanto spatio corpus per eiusmodi vim centrifugam recederet a terra intra minutum secundum, in memoriam revocanda est formula de spatiis per diversas vires acceleratrices confectis, quæ sunt ut ipsæ vires, si tempus ponitur constans (§. XCV.) hinc cum spatium gravitate terrestri percursum intra min. secundum sit $= 181''$, erit $287 : 1 = 181 : \frac{181}{287} = 0,630$ hoc est, mobile per eam vim centrifugam intra $1''$ non nisi per 6 partes decimas & tres centesimas unius digiti recederet. Passim id spatium statuunt $= \frac{1}{19}$ ped. Nam $287 : 1 = 15 : \frac{15}{287} = \frac{1}{19}$.

Paulo minus reperitur hoc spatium ex consectario secundo n. VIII. ubi spatium per vim centralem confectum ostenditur æquale quadrato arcus eodem tempore descripti diviso per diametrum. Igitur quæratur arcus æquatoris terrestris, qui intra $1''$ *per meridianum transit, hoc modo: si æquatori tribuuntur* 360 *gradus, uni gradui* 15 *milliaria germanica, uni milliari* 20000 *pedes; continebit tota peripheria* 108000000 *ped. qui transeunt per meridianum intra* 24 *horas seu* $86400''$. *Igitur intra* $1''$ *transibit arcus* 1250 *ped. quadrato huius arcus per diametrum diviso æquale est spatium vi centripeta, cui æquatur centrifuga, conficiendum, idque erit* $= \frac{1562500}{39231564} = \frac{1}{25}$ *ped. Ratio discriminis, quod inter hoc spatium, ac superius inventum intercedit, oritur a diversis numeris assumtis, quod calculi facilioris gratia factum est. Nam assumta ut supra diametro terrestri* $= 39231564$ *ped. Non possunt uni gradui* 15 *milliaria germanica, & uni milliari* 20000 *pedes adcurate tribui.*

Digitized by Google

CAPUT V.

De Motu Corporum Proiectorum, & Principiis Balisticæ.

Qui imperitia rerum mathematicarum, aut vitio methodi, quam in explicanda Philosophia arripuerunt, adplicationi, & usui elementorum Matheseos infensi sunt, ex hoc loco argumentum depromi posse eiusdem adplicationis reprehendendæ arbitrantur; propterea quod experientiæ & observationes, quas de proiectione corporum, & re Balistica habemus, cum theoria ope Matheseos stabilita parum consentiant; quasi vero id theoriæ aut Matheseos vitio contingeret. Si perfunctorie, & vage philosophandum non est, neque eventus rerum incertis casibus, & fortuna ludibrio sunt committendi, profecto nec in rerum usu seu praxi ut aiunt, genuina theoria, nec in theoria condenda elementis Matheseos carere possumus. Quæ ultra theoriam desiderantur, ex singularibus adiunctis petenda, ipsoque usu cognoscenda sunt.

§. CCLXXVII.

Definitio. Si conus rectus A B C (F.VII. T.V.) secatur directione S p ad latus coni A B parallela, sectio m M S M m est *Parabola*. Recta S p, seu communis plani m S m cum triangulo A B C sibi verticali, & per axem transeunte intersectio, est *axis*; rectæ M P, m p ad axem normales sunt *ordinatæ* axeos, rectæ S P, S p *abscissæ*. Proprietates parabolæ ex Elem. sunt 1. Quadrata ordinatarum, sunt ut abscissæ, ut fit $PM^2 : pm^2 = SP : Sp$; & quia alternando fit $PM^2 : SP = pm^2 : Sp$, ac proin $\frac{PM^2}{SP} = \frac{pm^2}{Sp}$; hinc tertia proportionalis ad abscissam, & suam ordinatam est ubique eadem, ac constans. Hæc tertia proportionalis adpellatur *Parameter*; hinc quadratum ordinatæ y æquat rectangulum ex abscissa x & parametro p; ut sit $y^2 = px$. Punctum axeos in quo ordinata æqualis est semiparametro, adpellatur *focus*; ut sit $y = \frac{1}{2}p$; cumque universe sit $y^2 = px$, erit in foco $\frac{1}{4}p^2 = px$; & $\frac{1}{4}p = x$ h. e. Abscissa inter verticem

&

Digitized by Google

& focum intercepta, sive distantia foci a vertice aequalis est quartae parti parametri axeos. Est illa quoque memorabilis parabolae proprietas, vi cuius radii ex foco in superficiem parabolicam incidentes, inter se paralleli egrediuntur, & qui paralleli cum axe incidunt in superficiem parabolicam, omnes reflectuntur in focum.

2. Si in parabola ducuntur plures rectae MM, mm, NN &c. (F. VIII.) inter se & cum tangente aliqua AT parallelae, eaeque omnes a recta quadam AR bissecentur, haec recta AR illarum *diameter est*: tertia proportionalis ad abscissam diametri, & respondentem ordinatam, est *parameter eius diametri*: *focus* iterum est punctum diametri, in quo ordinata aequalis est semiparametro.

3. Quoniam parameter semper constans est, hinc crescente in infinitum abscissa etiam crescent in infinitum ordinatae, proin uterque parabolae ramus, in infinitum abit, neque ea est curva in se rediens; ac quaevis recta, quae diameter non est, vel tangens, quae in uno puncto secat hanc curvam, eam secat in alio praeterea puncto. Tangens vero semper parallela est ordinatim adplicatis ad axem, vel diametrum, cuius tangens est; ac quodvis punctum, in quo si adplicetur ordinata, huius quadratum est ut abscissa, vel aequalis rectangulo ex abscissa in parametrum, censetur esse in parabola.

§. CCLXXVIII.

Propositio I. *Si quod corpus sollicitatur vi acceleratrice constante, & secundum directiones parallelas agente, idque proiiciatur quavis directione extra directionem vis acceleratricis sita describet motu suo curvam parabolicam.* Dem. Fiat proiectio per lineam AT (F. VIII. IX. X.) ut motu aequabili intra aequalia tempora aequalia spatia AB, BC, CD &c. describantur, quae spatia proinde crescent, uti tempora, nempe 1, 2, 3 &c. seu uti AB, AC, AD, AE &c. aut uti rectae aequales prioribus GM, HN, IO. Ob vim autem acceleratricem constantem spatia per eandem confecta, erunt ut quadrata temporum seu ut 1. 4. 9. &c. hoc est, uti AB^2, AC^2 vel ut GM^2, HN^2, IO^2 &c. Si igitur

spa-

spatia vi proiectili confecta exprimuntur per ordinatas GM, HN, IO &c. spatia vero vi acceleratrice percursa per abscissas rectae AR, nempe per AG, AH, AI &c. mobile motu composito percurret curvam, cuius abscissae sunt ut quadrata ordinatarum; eiusmodi vero curva est parabolica: igitur mobile in data hypothesi percurret curvam parabolicam.

§. CCLXXIX.

Corollarium. Quia linea, cuius abscissae sunt ut quadrata ordinatarum, diameter parabolae est; hinc recta AR, nempe linea directionis initialis, secundum quam agit vis acceleratrix, est diameter parabolae a mobili descriptae. Si igitur *angulus, quem directio proiectionis cum directione vis acceleratricis efficit, rectus est.* (F. IX.) ordinatae ad diametrum AR sub angulo recto adplicantur, eaque diameter est *axis* curvae, punctum A, in quo axis curvae occurrit, eiusdem *vertex*; consequenter corpus terrestre horizontaliter proiectum, id est, sub angulo recto, parabolam a vertice describere incipit, estque axis curvae directio vis acceleratricis. *Si angulus virium componentium est obtusus* (F. VIII.) id est, siquod corpus oblique sursum proiicitur, intra eum angulum ducatur normalis AZ, quae est linea horizontalis respectu directionis gravium. Ex proprietate parabolae omnis recta occurrens curvae in uno puncto, si non sit tangens, vel diameter ei puncto respondens, transibit per aliud quoque illius punctum nempe V. Secetur AV bifariam in F, fiatque perpendicularis FS, quae occurret curvae in S, eritque FS axis parabolae, S vertex, AR diameter, in qua sumuntur abscissae. Igitur grave terrestre oblique sursum proiectum parabolam incipit describere infra verticem, per illum tamen transit, ita, ut circa axem utrinque ramum quemdam describat. Linea horizontalis AV, quae subtendit semitam oblique sursum proiectorum, vocatur *amplitudo semitae*, quae ad diametrum AR sive directionem gravium est perpendicularis. Angulus TAZ, quem linea proiectionis cum linea horizontali efficit, nuncupatur *angulus elevationis.* Perpendicularis FS inter verticem, & punctum F rectae

AV

Digitized by Google

AV medium intercepta, est *maxima altitudo* corporis proiecti, sive *altitudo iactus*, quae determinatur per punctum S, in quo proiectile maxime distat ab horizontali AV. Si denique *angulus virium componentium R A T est acutus* (F.X.) id est, si corpus oblique deorsum proiicitur, totus arcus descriptus cadet infra hunc angulum. Perpendicularis Z A per A ducta secaret axem; proin vertex curvae est extra angulum & ramum descriptum. Quapropter corpus oblique deorsum proiectum parabolam incipit describere infra verticem, nec per eum transit. In omni autem parabola descripta adplicatae seu ordinatae sunt parallelae ad lineam proiectionis A T ductam per punctum A, in quo diameter AR secat parabolam; & quoniam omnis linea ordinatis parallela, quae in eodem, quo diameter, puncto parabolae occurrit, est tangens eiusdem, perspicuum est, lineam proiectionis esse tangentem curvae in puncto, ubi motus incipit.

Plura sunt, quae in hoc motu praecipue spectari debent; 1. directio proiectionis, sive angulus, quem linea proiectionis cum horizontali efficit. 2. amplitudo semitae. 3. altitudo iactus. 4. celeritas proiectionis. Nam manente eadem directione, & vi acceleratrice, si celeritas proiectionis alia, atque alia est, alia quoque parabola describetur; quo enim maior est vis proiectionis, eo maiores sunt ordinatae; consequenter singula curvae puncta constante quidem lege sed tamen maiore intervallo utrinque a diametro, ubi sumuntur abscissae, discedent, ac semita magis dilatabitur. Ut igitur traiectoria proiectilis determinetur, praeter angulum etiam celeritas proiectionis determinanda est. Quemadmodum vero, data parametro & abscissis, itemque angulo, sub quo ordinatae ad diametrum sunt adplicandae, describitur parabola; ita celeritas proiectionis cum parametro, a quo curva pendet, nexum quendam habet, qui modo investigandus est. Ac supra iam adnotavimus, celeritatem proiectionis, quae ad datam curvam describendam necessaria est, determinari per altitudinem, per quam, si mobile vi suae gravitatis libere descenderet, eam celeritatem acquireret, qua proiectum datam curvam describeret.

§. CCLXXX.

Digitized by Google

§. CCLXXX.

Propositio II. *Parameter diametri e puncto proiectionis ductae aequalis est quadruplae altitudini, per quam cadendo grave celeritatem proiectionis acquireret*, sive si parameter eius diametri dicatur p; altitudo quaesita x; dico esse $p = 4x$, & proin $\frac{1}{4}p = x$, hoc est, *altitudo respondens celeritati proiectionis aequatur quartae parti parametri*. Dem. In fine altitudinis x acquiritur ea celeritas, qua motu aequabili eodemque tempore possit percurri dupla altitudo seu $2x$; erit igitur ordinata y respondens altitudini $= 2x$. In parabola universe est $y^2 = px$; proinde hoc casu erit $4x^2 = px$. unde $x = \frac{1}{4}p$.

§. CCLXXXI.

Corollarium. Sint altitudines respondentes celeritati proiectionis A, & a; celeritates acquisitae C, & c; parametri parabolarum, quae per eas describuntur P, & p; erit $A : a = \frac{1}{4}P : \frac{1}{4}p = P : p$. Item ex legibus motus uniformiter accelerati, $A : a = C^2 : c^2$; consequenter $P : p = C^2 : c^2$. Parametri sunt in ratione duplicata celeritatum, queis corpora proiiciuntur; & si eadem est proiectionis velocitas, quaecunque sit directio, eadem est parameter. Quoniam ex elem. distantia verticis a foco axeos aequalis est quartae parti parametri, seu lateris recti axeos; hinc si abscissae sumuntur in axe parabolae descriptae, ea erit velocitas proiectionis, quam grave descendendo in focum axeos acquireret. Data igitur celeritate proiectionis invenitur altitudo ei respondens, proinde eius quadruplum, sive parameter; quomodo autem ea celeritas proiectionis, quam globi tormentis bellicis excussi habent, innotescat, infra intelligetur.

§. CCLXXXII.

Propositio III. *Amplitudo iactus se habet ad semiparametrum, ut sinus dupli anguli elevationis ad sinum totum.* Dem. Sit (F. XI. T. V.) A R diameter curvae descri-

Digitized by Google

describendæ e puncto proiectionis A, seu directio gravium; ea producatur in G, donec A G habeat rationem parametri, quæ ex data celeritate proiectionis determinatur; recta A G secta bifariam, ex puncto eius medio C intervallo A C describatur semicirculus occurrens lineæ proiectionis A T in F; atque ex hoc puncto F agatur normalis F E; dico in primis, eam exprimere amplitudinem semitæ. Quod ut demonstretur, ducta ad A R normali S A, & ex F normali F Q, fiat A B = F Q, & agatur recta B Q. erit A Q = E F; A F = B Q, E A = F Q. Ex proprietate circuli est AG: AF = AF: EA

sive - - - AG: BQ = BQ: FQ.

Quare cum A G sit parameter, A B abscissa, B Q parallela lineæ proiectionis seu tangenti in puncto A, & respondens abscissæ A B, erit punctum Q in parabola a mobili descripta. Igitur recta A Q in binis punctis A & Q occurrit parabolæ, eademque ad A R directionem gravium est normalis, ac proin horizontalis; cum igitur eadem recta in binis punctis secet parabolam, ea exprimet amplitudinem iactus; sed A Q = F E; hæc igitur perinde ut A Q amplitudinem iactus exhibet. Porro

Sit semiparameter = $\frac{1}{2}$ p; amplitudo iactus B, angulus elevationis F A S; ductis ex C centro recta C F, tum recta G F, erit angulus elevationis F A S = ang. A G F, cum utriusque mensura sit dimidius arcus A F. Ob radios C G, C F æquales triangulum G C F est isoscelicum, & angulus externus E C F = 2 C G F æquatur duplo angulo elevationis. Quamobrem si in triangulo E C F fiat C F = C G = $\frac{1}{2}$ p sinus totus, erit recta E F sinus dupli anguli elevationis. Igitur C F sinus totus = 1. est ad E F sinum dupli anguli elevationis, uti semiparameter ad amplitudinem iactus, sive 1: $\frac{1}{2}$ p = sin. 2 ang. elev: B.

§. CCLXXXIII.

Corollarium I. Si prima ratio ponitur constans, id est, si eadem est proiectionis velocitas, & consequenter eadem parameter, & semiparameter, amplitudines

dines iactuum erunt uti ſinus duplorum angulorum elevationis.

§. CCLXXXIV.

Corollarium II. Manente eadem celeritate proiectionis ſub angulo proiectionis ſemirecto ſive 45° eſt maxima amplitudo ſemitæ, & æqualis ſemiparametro. Nam ex cor. præc. ſi eadem manet velocitas proiectionis, amplitudines ſunt ut ſinus duplorum angulorum elevationis. Si iam angulus elevationis ponitur $= 45^\circ$, erit duplus $= 90^\circ$, qui eſt ſinus totus omnium ſinuum maximus, $= 1$. Unde fit $1 : 1 = \frac{1}{2} p : B$ h. e. inter amplitudinem iactus & ſemiparametrum obtinet ratio æqualitatis. Nempe ad maiorem amplitudinem confert tum maior altitudo; quo magis enim oblique aſcendit, eo magis diſcedit a puncto proiectionis: tum maior celeritas ſecundum directionem horizontalem; iuſta igitur & altitudinis, & directionis horizontalis attemperatio habetur ſub angulo ſemirecto; ſi enim is minor eſt, directio quidem horizontalis creſcit, ſed minor fit altitudo: ſi vero maior eſt angulus elevationis, magis creſcit altitudo, altiusque aſcendit mobile, ſed tota orbita ob vim minorem horizontalem magis contrahitur.

§. CCLXXXV.

Corollarium III. Sub angulis a ſemirecto æque differentibus e. g. 40° & 50°, vel 30° & 60°, vel 20° & 70°, ſi eadem eſt proiectionis celeritas, amplitudo ſemitæ pariter manet eadem. Sit enim angulus ſemirectus $= \frac{r}{2}$; exceſſus, vel defectus ab eodem $= d$; erunt ex hyp. anguli elevationis $= \frac{r}{2} + d$, & $\frac{r}{2} - d$. Horum dupli $= \frac{2r}{2} + 2d$, & $\frac{2r}{2} - 2d$; ſumma igitur $= 2r$ facit duos rectos. At vero ii anguli, quorum unus tantundem excedit rectum, quantum alter

ab

ab eo deficit, ſunt deinceps poſiti: angulorum autem deinceps poſitorum iidem ſunt ſinus; cum igitur poſita celeritate proiectionis conſtante amplitudines iactuum ſint ut ſinus duplorum angulorum elevationis, patet propoſitum.

§. CCLXXXVI.

Corollarium IV. *Maxima altitudo iactus eſt ad octavam partem parametri, ut ſinus verſus dupli anguli elevationis ad ſinum totum.* Inventa enim F E, quae amplitudinem ſemitae exprimit, haud aegre reperitur ratio maximae altitudinis iactus. Concipiatur enim vis proiectionis A F reſolvi in binas vires, E F horizontalem, & A E verticalem. Si utraque a puncto proiectionis A maneret conſtans, eodem tempore conficeretur E A, & E F, quo recta A F. Cum ergo vis A E uniformiter retardetur, duplo tempore opus eſt ad conficiendam directionem A E, ſive mobile eo tempore, quo vi perpendiculari aſcenderet per A E, vi horizontali, quae manet conſtans, percurret 2 E F; cumque tempus deſcenſus ex altitudine, ad quam proiectile eluctatur, ſit aequale tempori aſcenſus; idcirco tempore totius iactus, quo mobile ad maximam altitudinem aſcendit, & ex ea iterum deſcendit, percurrentur 4 E F; erit ergo maxima altitudo ad amplitudinem iactus uti A E : 4 E F, ſive quia amplitudo exprimitur per E F, erit altitudo iactus ad eiusdem amplitudinem ut $\frac{1}{4}$ A E : E F, conſequenter A E exprimit quadruplam altitudinem iactus. Si igitur in triangulo C E F eſt C F ſinus totus $= 1$, E F ſinus dupli anguli elevationis, erit iſtius ſinus verſus A E, quae exprimit quadruplum altitudinis iactus, quam voco A. Eſt igitur A E : C F ($= 4$ A : $\frac{1}{2}$ p) $=$ ſin. verſ. 2 ang. elev: 1. & proin A : $\frac{1}{8}$ p $=$ ſin. verſ. 2 ang. elev: 1. Deduces alternando A : ſin. verſ. 2 ang. elev. $= \frac{1}{8}$ p : 1. Si poſterior ratio ponitur conſtans, id eſt, ſi eadem eſt proiectionis celeritas, conſequenter & parameter, maximae altitudines iactuum ſunt ut ſinus verſi duplorum angulorum elevationis.

§. CCLXXXVII.

Animadversiones in Balisticam.

I. Cylinder tormenti bellici, ex quo globi ferrei, plumbei, imo & lapidei vi pulveris pyrii eiiciuntur, in tres partes vulgo distinguitnr. Infima (Bodenstück) ea est, quae pulverem pyrium cum globo & lumine accensorio continet. Media (Zapfenstück) ea est, in qua sunt cylindri laterales solidi, quibus tormentum incumbit fulcro, & delphini, seu ansae quibus elevatur. Anterior (Mundstück) ubi est orificium, seu os cylindri. Huius orificii, uti & globi excutiendi diameter *calibra* nuncupatur.

II. Pulvis pyrius, unde celeritas Proiectionis pendet, est mixtum ex nitro, sulphure, & carbonibus. eius pondus, quando tormenta maiora onerantur, plerumque est subduplum ponderis globi, aut etiam subdupli dimidium, si pulvis bombardarius adhibetur: si vero propugnacula munimentorum sunt diruenda, pondus globi est ad pondus pulveris ut $3:2$, vel etiam hoc illi aequale. Regulam calibrae in circino proportionis exhibet *linea solidorum.*

III. Parameter quidem ex quavis observata amplitudine, & noto angulo elevationis, sub quo iactus est factus, potest colligi. His datis tres termini proportionis (§. CCLXXXII.) noti sunt, consequenter quartus, sive semiparameter potest inveniri. Plerumque tamen ex amplitudine maxima (Cor. II. §. CCLXXXIV.) immediate determinatur. Sed quoniam evenire potest, ut commodum spatium pro determinanda maxima amplitudine non suppetat; hinc iactus probatorius fit sub angulo 15°. quo casu amplitudo respondens aequat dimidium maximae; est enim amplitudo maxima ad hanc uti $2 \times 45 : 2 \times 15 = 90^{\circ} : 30$ id est ut radius ad eius dimidium; nam sinus anguli 30° aequatur dimidio sinui toti. Hinc quia amplitudines iactuum posita eadem celeritate proiectionis seu vi pulveris pyrii & pondere globi sunt uti sinus dupli anguli elevationis (§.CCLXXXIII.) necesse est, ut amplitudo iactus sub angulo 15° aequet

quar-

Digitized by Google

quartam partem parametri, uti ea ſub angulo 45° æquat dimidiam (§. CCLXXXIV.)

IV. Etſi anguli elevationis a ſemirecto æque diſtantes eandem præbeant amplitudinem iactus, non tamen in omni caſu perinde eſt, quisnam ex iis ſeligatur. Nam ſi ædificium diruendum eſt, præſtat maiorem adhibere angulum, ut ob maiorem lapſus altitudinem maior a proiectili acquiratur celeritas, & vis: ſi autem cito res agenda eſt, minor adhibetur angulus; quia eiusmodi iactus ob minorem altitudinem breviore quoque tempore peragitur.

V. Plura ſunt, eaque non exigui momenti, quæ theoriam, cuius plura capita expoſuimus, perturbent. 1° Quod actiones gravitatis, cum verſus centrum telluris convergant, inter ſe parallelæ haud ſint, uti theoria poſcit. At enim relate ad radium terræ eæ perparum a parallelismo diſcedunt, etſi amplitudo iactus ponatur = 5818 ped. 2. Gravitas variatur reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro telluris; ſed hæc quoque perturbatio non niſi in rigore mathematico ſpectari poteſt. 3. Reſiſtentia aeris tum motum proiectionis tum verticalem multo minorem reddit, quam in vacuo haberetur. At enim diſtinguenda eſt reſiſtentia *abſoluta aeris*, quæ habetur, ſi motus per aerem factus conferatur cum motu in vacuo: & reſiſtentia *reſpectiva*, quæ intelligitur, ſi motus in aere certa vi proiectili factus comparetur cum motu rurſus in aere, eademque vi proiectili ſed ſub alio angulo elevationis peracto. Negari nequit, reſiſtentiam abſolutam eſſe quam maxime ſenſibilem, ut cum Daniel. Bernoullio T.II. Acad. Petrop. facile admitti queat, globum tormentarium, qui in libero aere ad 7819 ped. eluctatur, in vacuo ad altitudinem 58750, adeoque plusquam ſepties maiorem aſcenſurum. At enim hæc reſiſtentia abſoluta ſpectari non poteſt, quia ipſa iam parameter in medio reſiſtente indagatur, inventaque ad determinandam amplitudinem, altitudinem, & directionem aliorum iactuum adhibetur. 4. Obeſt affrictus, quem globus in ipſo tormento ſubit; ſed de hoc quidem obſtaculo, uti de præcedente diſſerendum eſt; nam in corporibus eadem pul-

Digitized by Google

veris quantitate eodemque tormento eiectis, & æqualibus affrictus, magnopere variari non potest. De directione tormenti instrumenta nunc quidem satis adcurata fuerunt inventa, quibus anguli elevationis adcurate obtineri possint. Cæterum experientia constare aiunt, tormento etiam horizontaliter disposito globos non nihil elevari supra directionis lineam, ac superiorem radere cavitatis oram. Inter longitudinem machinæ, & quantitatem pulveris pyrii etiam proportio quædam intercedat, necesse est, ut nimirum globus eousque contineatur intra cylindrum, donec tota pulveris quantitas flammam conceperit. Retrocessio tormenti facta explosione aeris activitati in cylindrum irruenti a quibusdam tribuitur, ab aliis vi pulveris interioris versus fundum agentis, cum tormentum globo nondum eiecto videatur retrocedere; atque ita periculum est, ne, si globus parum celeriter elabatur, concussio tormenti eius directionem prope orificium adficiat, ac immutet.

VI. Caillius in Mech. §. 446. maximam huius theoriæ utilitatem in eo constitisse putat, quod ea geometras superioris seculi ad Astronomiæ theoriam physicam perduxerit, inventorum omnium, quibus recentius ævum gloriari potest, facile pulcherrimum, atque utilissimum; de qua re sequente sectione agemus. Sed fortassis in prima propositione (§. CCLXXVIII.) qua motum in parabola exposuimus, hæret non nemo; cum enim vires componentes quovis tempusculo combinentur in diagonalem, quæri potest, cur hoc loco singilatim spatia per vim proiectionis conficienda & singilatim spatia vi acceleratrici debita computentur. R. Id potissimum fit ob vim acceleratricem constantem, quæ in demonstranda hac propositione sumitur; nec vero compositio virium in diagonalem obest, quia motu composito versus quamvis plagam tantundem progreditur mobile, quantum per vires singulas seorsim progrederetur. Et quamvis sumantur tempuscula infinitesima, in quibus spatia vi acceleratrice confecta crescunt ordine naturali numerorum ascendentium; tamen temporibus finitis ea spatia ab initio motus computata crescunt uti quadrata temporum; alia enim singulorum terminorum, alia summarum est ratio. Quod quidem facile

cile ac generatim demonſtrabo ita, ut idem ad motum uniformiter acceleratum rectilineum queat adplicari. Sit numerus ſpatiolorum, qui tempore finito intra primum minutum ſecundum conficiuntur, $= n$. Quoniam ea ſpatiola creſcunt ordine naturali numerorum aſcendentium (§. LXXXIV.) erit ultimus terminus pariter $= n$; primus evaneſcens $= 0$. Conſequenter cum ſumma progreſſionis arithmeticæ ſit æqualis facto ex ſumma termini primi & ultimi in dimidium numerum terminorum, erit ſumma ſpatiolorum ſub finem primi minuti ſecundi $= n \times \frac{1}{2} n = \frac{1}{2} n^2$. Sub finem ſecundi temporis erit numerus ſpatiolorum $= 2n$, idemque erit ultimus terminus: igitur ſumma omnium ſpatiolorum ſub finem ſecundi temporis erit $= 2n \times n = 2n^2$. Eſt vero $\frac{1}{2} n^2 : 2n^2 = n^2 : 4n^2 = 1 : 4$. Sub finem tertii temporis numerus ſpatiolorum $= 3n$; ſub finem quarti $= 4n$; conſequenter ſummæ $= \frac{9n^2}{2} : 8n^2 = 9n^2 : 16n^2 = 9 : 16$ atque ita porro. Cum igitur proiectile a linea proiectionis vi gravitatis conſtantis diſcedat ita, ut intra tempuſcula infiniteſima receſſus creſcant ordine naturali numerorum aſcendentium, facile intelligitur, ſummas eorum receſſuum temporibus finitis, ſi iidem ab initio computentur, creſcere ut quadrata temporum, ac proin ſingulis temporibus finitis ſecundum numeros impares 1, 3, 5 &c.

CAPUT VI.

De Motu Corporum in Ellipſi.

Ut conſtitutio ſyſtematis mundani, & inprimis ſolaris, utque planetarum motus, ac vires, & leges attractionis univerſalis recte exponi, ac percipi queant, neceſſe eſt, motum corporis in Ellipſi ante perſpectum eſſe. Quapropter concipiatur, ſeu fingatur interea, planetarum quendam ceu Mercurium, aut Martem, circa ſo-

solem tanquam centrum virium suarum acceleratricium moveri, perinde ac si corpus terrestre sat magna celeritate proiectum circa terram tanquam centrum virium suarum moveretur. Pono autem motum planetæ circa solem fieri in ellipsi; nec vana hypothesis est. Nam paulo post ostendam, planetarum motum circa solem re vera ellipticum esse.

§. CCLXXXVIII.

Definitio I. Si conus rectus A F G (F.XII. T.V.) secatur plano S M s M, quod, si concipiatur productum in D, ad basin coni F G minorem angulum S D F faciat, quam sit angulus A G F a coni lateribus ad eandem basin formatus, sectio S M s M *ellipsis* vocatur. Si ad planum sectionis concipitur triangulum verticale F A G; erit S s, seu communis plani S M s M cum triangulo verticali intersectio, *axis maior* ellipseos; rectæ M p, m p ad axem normales, sunt *ordinatæ*: partes axeos S P, P s *abscissæ*, vel *segmenta axeos* sunt. Sed transferatur hæc sectio seu curva ex cono in planum (F.XIII.) ac in memoriam revocentur sequentes potissimum illius proprietates; (nam elementis geometriæ initiatos pono eos, qui ad Physicam Newtonianam accedunt).

1. Arcus ellipticus A P Q, A K B primo utraque ex parte ab axe A a discedit, donec in medio circa B obtineat ordinatam maximam B C; tum revertitur utraque ex parte, ita, ut perinde, ac circulus axem bis secet, formetque curvam in se redeuntem. Ordinata maxima B C ad axem maiorem vocatur semiaxis minor, quæ producta usque ad oppositum perimetri punctum sit *axis minor*. Punctum medium axis maioris A a, per quod normaliter transit axis minor, est *centrum* ellipseos. Quævis alia recta P G per centrum ducta, & in perimetro utrinque terminata, est *diameter*. Cuiusvis diametri, ut & axeos utriusque proprietas generalis est, ut suas ordinatas usque ad oppositum punctum perimetri productas bisecent. *Diameter coniugata* alterius diametri est, quæ est parallela ordinatis alterius, vel tangenti per alterius verticem ductæ: diametri P G diameter coniugata est recta D K parallela ordinatæ Q o, & tangenti P T. Axis maior & minor ab aliis diame-

tris

tris duntaxat in eo differt, quod habeat ordinatas normaliter adplicatas; quod non fit in diametris. universe autem *Quadrata ordinatarum ad axes, vel diametros sunt uti facta ex abscissis vel segmentis axium aut diametrorum respondentibus*; Sic (F. XII.) $PM^2 : pm^2 = SP \times Ps : Sp \times ps$. Porro semiaxis minor est ordinata maioris, & semiaxis maior ordinata minoris, & quævis semidiameter coniugata est ordinata alterius diametri cuius coniugata dicitur: præterea axes, & diametri in centro secantur bifariam; hinc facta seu rectangula semiaxium & semidiametrorum sunt æqualia quadratis eorundem; ac dicta proprietas in hunc modum proponi potest: *primo:* in Ellipsi quadrata adplicatarum ad axem principalem, seu maiorem sunt ad facta ex abscissis respondentibus, ut quadratum semiaxis minoris ad quadratum semiaxis maioris. *Secundo* Quadrata adplicatarum ad axem minorem sunt ad facta ex abscissis respondentibus, ut quadratum semiaxis maioris ad quadratum semiaxis minoris. *Tertio* quadrata ordinatarum ad semidiametrum coniugatam quamcunque sunt ad facta ex abscissis respondentibus, ut quadratum alterius semidiametri coniugatæ ad quadratum semidiametri illius, ad quam ordinatim est recta adplicata. Ceu (F. XIII.) $Qo^2 : Po \times oG = CD^2 : PC^2$; & $Po \times oG : oQ^2 = PC^2 : CD^2$.

2. Ipso prope intuitu ellipseos patet: quamvis diametrum esse minorem axe maiore, & maiorem axe minore, estque talis magnitudinis ratio, ut quodvis parallelogrammum super semidiametros coniugatas constructum æquale sit rectangulo ex semiaxibus; hinc eum quodvis parallelogrammum æquetur facto ex basi in altitudinem, si PH est normalis ad DK, erit $DC \times PH = AC \times CB$. Areæ vero totales plurium ellipsium sunt, uti rectangula ex semiaxibus.

3. Latus rectum seu parameter axeos maioris est tertia proportionalis ad axem maiorem & minorem; uti si parameter dicatur p; axis maior (F. XIII.) $= 2AC$; minor $= 2CB$ erit $2AC : 2CB = 2CB :$

$$p = \frac{4CB^2}{2AC} = \frac{2CB^2}{AC}; \text{ unde erit } \frac{1}{p} = \frac{AC}{2CB^2};$$

quæ est ratio reciproca lateris recti principalis.

Digitized by Google

4. Memorabilia axeos maioris puncta sunt bini *foci*, per quae nempe ducta ordinata dupla aequalis est parametro. Eiusmodi puncta (F. XIII.) sunt S, & F. Ut ratio huius denominationis intelligatur, notandum : angulus T P S ad punctum contactus P inter tangentem P T & rectam ad focum S tendentem comprehensus semper aequalis est angulo t P F, qui inter eandem tangentem, & rectam ex altero foco F ductam continetur; atque ob hanc caussam, si corpus lucidum statuitur in uno foco, radii omnes in superficiem ellipticam incidentes reflectuntur in alterum focum; quoniam angulus reflexionis aequatur angulo incidentiae : angulos autem ad punctum superficiei curvilineae per tangentes metimur. Porro summa rectarum ex utroque foco ad idem perimetri punctum ductarum constans est, & aequalis axi principali. Rectangulum vero inclinatarum S P, P F ex focis ad quodvis ellipseos punctum, aequale est quadrato (CD^2) semidiametri C D, quae coniugata est diametri P G ad datum punctum P terminatae. Praeterea si ad quamvis diametrum P G ducitur coniugata D K parallela tangenti P T, haec ex recta S P ad focum ducta intercipit partem P E semiaxi principali aequalem, ut sit P E = A C.

5. Maxima est circuli & ellipseos affinitas, ut revera circulus nihil aliud sit, nisi ellipsis, cuius foci infinite propinqui sint; si enim (F. XII.) axis sectionis S s manente S, concipiatur elevari, ut s abeat in t, & axis sectionis eiusque planum basi coni fiat parallelum, ellipsis migrat in circulum, & contraria directione circulus in ellipsin. Illud quoque sine molimine demonstrant geometrae, ellipsin & circulum descriptum super media proportionali inter semiaxes ellipseos tanquam radio esse aequales, sive areas aequales continere.

§. CCLXXXIX.

Definitio II. Dum planetis orbita elliptica tribuitur, sol, circa quem moventur tanquam centrum virium, collocatur in foco quodam S; ac dein punctum A, in quo existens planeta maximam habet a sole distan-

Digitized by Google

distantiam, dicitur *Aphelium*, vel *apsis summa*: punctum vero a, in quo habetur distantia minima planetæ a sole, *perihelium*, vel *apsis ima*; unde axis maior Aa *linea apsidum* vocatur coniungens aphelium cum perihelio. Apsides etiam *Auges* nuncupant. Porro focus S, in quo sol collocatur ceu centrum virium, adpellatur *inferior*; alter F *superior*. Distanstia foci a centro ellipseos, = C S, est *eccentricitas*, & quoniam uterque focus æquidistat a centro, erit distantia focorum = SF, dupla eccentricitas. Summa distantiarum planetæ in aphelio, & perihelio a sole, æqualis est maiori axi ellipseos, quam describit. Quemadmodum vero planeta respectu solis dicitur esse in aphelio vel perihelio; ita sol vel planeta quiscunque cum maxime a terra distat, est in *apogæo*; cum maxime ad nos accedit, in *perigæo*. Semiaxes principales, si plures orbitæ inter se conferantur, solent etiam dici *distantiæ mediæ*.

His præmissis investiganda est ratio virium, queis corpus in Ellipsi incedens in centrum urgetur. Feratur planeta in perimetro ellipseos A P a B, cuius semiaxes sint A C, CB; & migret tempusculo infinitesimo ex P in Q, ut describatur arcus nascens P Q. a binis eius extremis ducantur radii vectores, seu rectæ, quæ simul cum arcu areolam concludant P S Q, quæ quidem areola, si tempora sumuntur æqualia, constans est. Ducatur diameter P C G, eique coniungata D K tangenti P T parallela. ea diameter occurret radio vectori P S in E, & perpendiculo in se demisso in H. fiat Q T parallela rectæ P S, & Q L parellala tangenti & diametro D K producatur in o, ut sit ordinatim adplicata ad diametrum P G. vim igitur centripetam exprimet 2 P L vel 2 Q T; nam intervallo P L mobile a directione tangentis P T, ad quam vi inertiæ nititur, retrahi debet vi centripeta, quam ex duplo spatiolo vi acceleratrice intra datum tempusculum decurso æstimamus, uti §. CCLXX. de motu in circulo est animadversum; quæritur igitur ratio istiusmodi lineolarum in diversis ellipsibus, vel diversis arcubus eiusdem ellipseos ita descriptæ, ut areæ sint temporibus proportionales.

§.

Digitized by Google

§. CCXC.

Propositio I. *Si corpus moveatur in ellipsi, ita, ut areæ ad focum terminatæ sint temporibus proportionales; vis centripeta, seu ad focum tendens est in ratione reciproca duplicata distantiarum a foco, seu centro virium.* Dem. 1. Area PSQ dicatur A; erit ea $= \frac{PS \times Qn}{2}$; proinde $Qn = \frac{2A}{PS}$, & $Qn^2 = \frac{4A^2}{PS^2}$; ponitur enim Qn perpendicularis ad SP.

2. Quoniam ordinata Qo & diameter coniugata DK sunt parallelæ, triangula PLo, PEC similia sunt; proinde $PL : Po = PE : (= AC$. def. I. n. 4.) PC. Quæratur valor Po. Ex def. I. n. 1. est $Po \times oG : oQ^2 = PC^2 : CD^2$; & quia PQ est arcus infinitesimus, erit Po infinitesima respectu oG, hinc pro oG sumi potest $PG = 2PC$ eidem æquipollens; adeoque erit $Po \times 2PC : oQ^2 = PC^2 : CD^2$; & $Po = \frac{oQ^2 \times PC}{2CD^2}$. & $oQ^2 = \frac{Po \times 2CD^2}{PC}$. Si igitur inventus valor Po in superiore analogia substituatur, erit $PL : \frac{oQ^2 \times PC}{2CD^2} = AC : PC$ consequenter $PL = \frac{oQ^2 \times AC}{2CD^2}$.

3. Pro oQ^2 sumi potest QL^2 eidem æquipollens: si enim æquatio $oQ^2 = \frac{Po \times 2CD^2}{PC}$ resolvitur in analogiam, erit $\frac{2CD^2}{PC} : oQ = oQ : Po$; quemadmodum igitur oQ est infinitesima respectu finitæ quantitatis

titatis $\frac{2\,CD^2}{PC}$; ita erit Po infinitesima respectu oQ (§. CCXXXVII) quare cum ob similitudinem triangulorum PoL, PEC habeatur $Lo : Po = EC : CP$, erunt Lo, Po eiusdem rationis; & sicut Po est infinitesima respectu oQ; ita & Lo infinitesima respectu oQ; consequenter differentia inter QL, & Qo evanescit, estque $QL^2 = \frac{Po \times 2\,CD^2}{PC}$.

4. Triangula EPH, QLn similia sunt; nam ob QL, EH parallelas anguli alterni PEH, QLn æquantur; ad n & H recti sunt. Unde erit

$$QL^2 : Qn^2 \left(\frac{4A^2}{PS^2}\right) = EP^2\ (AC^2) : PH^2$$

consequenter $QL^2 = \frac{4A^2 \times AC^2}{PS^2 \times PH^2}$. cum igitur n. 2. sit $PL = \frac{oQ^2 \times AC}{2\,CD^2}$, erit substituto pro oQ^2 vel QL^2 æquali valore, $PL = \frac{4A^2 \times AC^3}{PS^2 \times PH^2 \times 2CD^2}$

5. (Definit. I. n. 2.) $CD \times PH = AC \times CB$, ac proin $CD^2 \times PH^2 = AC^2 \times CB^2$; hoc substituto valore in ultima æquatione num. præc. fit $PL = \frac{4A^2 \times AC}{PS^2 \times 2CB^2}$; est autem $\frac{AC}{2\,CB^2}$ ratio reciproca lateris recti; & vis centripeta $V = 2PL = \frac{1}{PS^2} \times \frac{8A^2 \times AC}{2\,CB^2}$; seu in ratione composita ex duplicata directa areæ, quovis dato tempore descriptæ, reciproca simplici lateris recti principalis, & reciproca duplicata distantiarum a centro virium: in eadem ellipsi est

est valor $\frac{8 A^2 \times AC}{2 CB^2}$ constans; manet igitur $V = \frac{1}{PS^2}$, seu *vis ad focum directa est in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium.*

Inventa vi centripeta celeritas proiectionis ad ellipsin describendam necessaria est investiganda; quo loco similem methodum, qua in circulo usi sumus (§. CCLXXVI. n. II.) adhibebimus.

§. CCXCI.

Propositio II. *In ellipsi altitudo respondens, per quam corpus motu libero, & uniformiter accelerato descendendo per vim gravitatis, quam habet in quovis dato puncto ellipseos, acquireret celeritatem proiectionis, est quarta proportionalis post axem maiorem, distantiam a foco superiore, & inferiore.* Dem. Capiatur in directione, secundum quam agit vis centripeta, PR quarta proportionalis post axem maiorem Aa, distantiam a foco superiore PF, & distantiam a foco inferiore PS; dico eam esse altitudinem respondentem celeritati proiectionis. nam

1. Ex theoria gravium corpus eodem tempore t, quo motu uniformi percurrit PT, vel LQ, motu uniformiter accelerato conficit PL, & eodem tempore T, quo eadem gravitate motu uniformiter accelerato percurrit PR, motu æquabili conficeret spatium duplum seu 2PR; hinc erit primo: $PL : PR = t^2 : T^2$. *Secundo* quoniam velocitas per 2PR & LQ eadem est, erunt hæc spatia, ut tempora, seu $LQ : 2PR = t : T$, ac $LQ^2 : 4PR^2 = t^2 : T^2 = PL : PR$; consequenter $PL = \frac{LQ^2}{4PR}$.

2. Ex n. 2. demonstrat. præc. $PL = \frac{oQ^2 \times AC}{2CD^2} = \frac{LQ^2 \times AC}{2CD^2}$. unde fit $\frac{LQ^2}{4PR} = \frac{LQ^2 \times AC}{2CD^2}$; ac $CD^2 = 2AC \times PR$.

3.

3. Def. I. n. 4. $CD^2 = PF \times PS$. & $2AC = Aa$; hinc facta substitutione $PF \times PS = Aa \times PR$; unde nascitur analogia $Aa : PF = PS : PR$. q. e. d.

§. CCXCII.

Corollaria. I. *Celeritas proiectionis, vel qua corpus fertur in ellipsi, semper minor est ea, quæ vi gravitatis, quam habet, acquiri posset descendendo usque ad centrum virium, vel ultra illud*; nam $PF < Aa$; proinde etiam $PR < PS$. II. *Deinde data distantia a centro virium PS, & inventa altitudine respondente PR inveniri etiam potest differentia altitudinis respondentis, & distantiæ a centro virium RS*, quia PR semper minor est, quam PS. III. Ex his ulterius reperitur axis maior ellipseos; cum enim sit $Aa : PF = PS : PR$; erit dividendo $Aa : Aa - PF = PS : PS - PR = RS$; cum igitur summa rectarum $PF + PS$ ex utroque foco ad idem perimetri punctum ductarum æqualis sit axi principali Aa (Def. I. n. 4.) erit $Aa - PF = PS$; consequenter $Aa : PS = PS : RS$, hoc est, *axis maior ellipseos, in qua corpus fertur, est tertia proportionalis post differentiam RS altitudinis respondentis & distantiæ a centro virium, & ipsam distantiam ab eodem centro.* IV Denique ex hac analogia dividendo sequitur alia: $Aa - PS$ (PF): $PS = PS - RS$ (PR): RS; hoc est, *distantia corporis in ellipsi moti a foco superiore, est ad distantiam eiusdem a foco inferiore, ut altitudo respondens ad differentiam altitudinis respondentis, & distantiæ a centro virium.*

§. CCXCIII.

Resolvuntur Dubia de Motu in Ellipsi.

I. *Celeritas, qua corpus fertur in circulo pariter minor est ea, quæ vi gravitatis, quam corpus habet, acquiri posset descendendo usque ad ipsum centrum virium* (§. CCLXXVII. n. II.) *cur ergo corpus in dato casu potius ellipsin quam circulum describit?* R. In circulo directio proiectionis seu tangens cum directione gravitatis, seu radio semper angulum rectum efficit; in motu autem

autem composito non modo ratio, sed etiam angulus virium componentium spectandus est (§. CCLXXVII. n. I. si ergo diversi sunt anguli, etsi vires componentes eandem inter se rationem servent, alia atque alia diagonalis, ac proin diversa curva describatur, necesse est. Porro in ellipsi directio virium S P cum tangente nunquam rectum efficit, nisi in apside Ima, & summa; quoniam enim (Def. I. n. 4.) anguli S P T, F P t a tangente, & rectis ex utroque foco ad idem perimetri punctum ductis comprehensi æquales sunt, ii non possunt esse recti, nisi angulus intermedius S P F evanescat, quod duntaxat in apsidibus fit. Ergo etsi eadem, quæ in circulo, ratio virium esset, tamen circulus extra apsides describi non posset.

II. *Cur ergo corpus ab apside ima vel summa digressum non describit circulum, cum in iis punctis directio tangentis cum directione gravitatis angulum efficit rectum, qui ad describendum circulum requiritur?* R. Ad circulum describendum præter angulum directionis rectum ea præcise requiritur celeritas, quæ aquireretur lapsu libero usque ad *dimidiam distantiam* a centro virium; porro in apside ima celeritas motus est maior, in summa vero est minor ea, quæ lapsu libero usque ad dimidiam distantiam a centro virium acquireretur; nam ex cor. IV. §. CCXCII. est distantia corporis in ellipsi moti a foco superiore ad distantiam eiusdem a foco inferiore, ut altitudo respondens ad differentiam eius altitudinis & distantiæ a centro virium, seu P F: P S = P R : R S ponatur planeta P in apside ima a, erit tum quidem distantia eiusdem a foco superiore maior, quam a foco inferiore, proinde etiam altitudo respondens celeritati proiectionis maior, quam differentia eius altitudinis & distantiæ a centro virium, igitur altitudo respondens maior est, quam dimidia distantia a centro virium; contra si planeta est in apside summa, erit distantia a foco superiore minor; quam ab inferiore; ergo & altitudo respondens minor, quam differentia eius altitudinis & distantiæ a centro virium. Si planeta versatur circa extrema puncta axis minoris, ceu in B, distantia ab utroque foco F & S æqualis est, & qui-

quidem uti in elementis demonstratur, ea distantia æquatur semiaxi maiori; hinc etiam altitudo respondens æqualis erit differentiæ eiusdem altitudinis, & distantiæ a centro virium, hoc est, ea altitudo erit *dimidia distantia* a centro virium; at enim in iis punctis directio virium in focum tendentium cum tangente non efficit angulum rectum, proinde circulus a planeta ab iis digresso describi nequit. Cæterum quoniam in ellipsi vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro virium, erit (F XIV) vis V planetæ in aphelio A, ad vim u in perihelio a, ut $aS^2 : AS^2$; seu $V : u = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2}$. At si planeta in A circa centrum virium S describeret circulum, & alius in a circa idem centrum S pariter circulum describeret, ita ut areæ a quovis descriptæ sint temporibus proportionales, longe alia esset virium centripetarum ratio; nam in primis arcus seu bases AB, & a b triangulorum, seu arearum æqualium essent reciproce ut perpendicula, hoc est $AB : ab = \frac{1}{AS} : \frac{1}{aS}$, consequenter $AB^2 : ab^2 = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2}$. dein quia vires in circulo sunt ut quadrata arcuum directe, & reciproce ut radii (§ CCLXX.) erit vis V in distantia A S, ad vim u in distantia a S ut $\frac{AB^2}{AS} : \frac{ab^2}{aS}$, seu $V, u = \frac{AB^2}{AS} : \frac{ab^2}{aS}$; facta igitur pro AB^2, & ab^2 substitutione, erit $V : u = \frac{1}{AS^3} : \frac{1}{aS^3}$. hoc est vires essent in ratione reciproca distantiarum a centro virium.

III. *Altitudo respondens celeritati motus ex Prop. II. est quarta proportionalis post axem maiorem, distantiam a foco superiore, & distantiam a foco inferiore; igitur* (F. XIII.) *altitudo respondens celeritati motus in aphelio*

A erit $= \frac{AF \times AS}{Aa}$, *& altitudo respondens celeritati*

motus in perihelio a erit $= \frac{aF \times aS}{Aa}$, *hoc est quoniam*

$AF = aS$, *&* $AS = aF$; *altitudo respondens celeritati motus in aphelio, & perihelio eadem est; igitur non videtur satis declaratum esse, quomodo celeritates in aphelio & perihelio tantopere diversae sint.* R. Cum altitudo respondens celeritati motus investigatur, ponitur corpus per altitudinem quaesitam descendere ea ipsa vi gravitatis, quam in dato puncto habet; etsi igitur in perihelio celeritas maior sit, quae maiorem altitudinem videtur requirere; at vis gravitatis quoque ibidem maior est, ut proinde emenso eodem spatio maior celeritas acquiratur; e contrario quamvis in aphelio minor sit celeritas, cui acquirendae minor altitudo sufficeret, si vis esset constans; at ibidem vis quoque gravitatis minor est. Nempe ex formula virium acceleratricium (§. XCV.) vires sunt ut quadrata celeritatum, & reciproce ut spatia decursa seu $V = \frac{C^2}{S}$, sive si spatia decursa sint eadem, $V = C^2$. Sit vis & celeritas in $A = V$ & C; in $a = u$ & c; erit $V : u = C^2 : c^2$; ac proin $C : c = \sqrt{V} : \sqrt{u}$; cumque sit $V : u = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2}$; erit $\sqrt{V} : \sqrt{u} = \frac{1}{AS} : \frac{1}{aS}$, ac celeritas in A ad celeritatem in a, seu $C : c = \frac{1}{AS} : \frac{1}{aS}$ nempe reciproce ut perpendicula ex centro virium in tangentem demissa. Vicissim ex eadem formula colligitur, altitudines seu

spa-

ſpatia decurſa eſſe æqualia ; cum enim ſit $V = \frac{C^2}{S}$,

erit $S = \frac{C^2}{V}$ ſeu $S : s = \frac{C^2}{V} : \frac{c^2}{u}$. Porro $C^2 : c^2 = \frac{1}{AS^2} : \frac{1}{aS^2} = aS^2 : AS^2$. Dein $V : u = aS^2 \; AS^2$ nempe reciproce ut quadrata diſtantiarum ; hinc erit $\frac{C^2}{V} : \frac{c^2}{u} = \frac{aS^2}{aS^2} : \frac{AS^2}{AS^2}$, quæ eſt ratio æqualitatis ; unde erit $S = s$. Etſi autem altitudo reſpondens celeritati motus in aphelio minor ſit, quam dimidia diſtantia a centro motus, & in perihelio maior ; id tamen non obſtat, quo minus altitudines reſpondentes utrinque æquales ſint ; quia in aphelio diſtantia quoque a centro virium maior eſt, in perihelio minor. Patet uſus, & conſenſus formularum. Denique & illud addendum, ſi ponuntur foci infinite propinqui inter ſe, & ipſi centro; tunc valor $\frac{AE \times AS}{Aa}$ exprimens altitudinem reſpondentem celeritati motus in apſidibus, erit $= \frac{AC \times AC}{2AC} = \frac{1}{2} AC$; ac tum nempe, quia ellipſis migrat in circulum, iterum pervenitur ad theorema Hugenii : *Si directio proiectionis eſt normalis ad directionem virium* (uti fit in apſidibus) *& celeritas proiectionis ea, quæ acquiri poſſet lapſu per dimidiam diſtantiam a centro virium, circulus deſcribetur.*

IV. *Intelligi non poteſt, qua parte ellipſeos celeritas motus creſcat, qua decreſcat ; aut quæ ſit ratio incrementi, vel decrementi celeritatis.* R. Celeritas motus per quemvis arcum infiniteſimum intelligi poteſt ex altitudine eidem reſpondente tanquam ex ſpatio, per quod

Digitized by Google

quod, si corpus vi gravitatis, quam in eo arcu habet, libere decideret, velocitatem sui motus acquiret. Altitudo respondens ceu spatium S exprimitur, ut supra, hac formula: $\frac{PF \times PS}{Aa}, = S$. Ex formula paullo ante indicata habetur $C^2 = VS$, & $V = \frac{1}{PS^2}$; hinc facta substitutione erit $C^2 = \frac{PF}{PS \times Aa}$; est autem in eadem ellipsi axis maior constans; igitur quadrata celeritatum sunt directe ut distantia a foco inferiore. Si igitur planeta ab aphelio A descendit ad perihelium a, continuo crescit distantia a foco superiore, & decrescit distantia a foco inferiore; ergo *ab apside summa ad imam celeritas crescit: ab ima vero ad summam decrescit*; & quia ex utraque perimetri parte circa axem transversum est punctum aliquod, ad quod ductae rectae ad utrumque focum aequales sunt, hinc velocitas in illis punctis aequalis erit. Ex his intelligitur, qua parte ellipseos celeritas motus crescat, qua parte decrescat. Ut autem ratio eius incrementi, ac decrementi perspiciatur, *primo* observandum est, angulum, quem tangens in quovis dato puncto ellipseos cum recta ad centrum virium ducta efficit, post aphelium usque ad perihelium esse acutum, inde post perihelium usque ad aphelium esse obtusum; cum enim, ut supra meminimus, anguli SPT, FPt aequales sint, ac proinde uterque acutus, erit angulus SPT, qui perihelium respicit, acutus, & deinceps positus SPt versus aphelium obtusus. *Secundo* observandum est, dum planeta ab aphelio descendit ad perihelium, vis centripeta ml (F. XIV.) obliqua ad tangentem resolvitur in vim mo, & mn; quae posterior vis mn, cum sit parallela ad tangentem, vim tangentialem auget, motumque accelerat; contrarium fit in ascensu a perihelio ad aphelium. Illud praeterea deducitur planetam magis accedere ad centrum virium, si posita vi centripeta aequali, ea sub acuto, quam si sub angulo obtuso conspiret cum vi tangentiali; unde ratio acces-

Digitized by Google

accessus & recessus colligi potest; nam radius vector S P (F. XIII.) cum tangente per P ducta continet angulum acutum ad partes apsidis imae a, & obtusum ad partes apsidis summae A; dein ex rectis omnibus, quae ex foco S duci possunt ad perimetrum, omnium minima est S a, omnium maxima S A; praeterea recta S P seu radius vector ab apside ima ad summam semper crescit, & a summa ad imam decrescit. In ipsis apsidibus angulus virium componentium est idem, nempe rectus; at in apside ima celeritas vis tangentialis maior est, quam ut circulus describi queat; hinc planeta ab ima digressus pariter a centro magis recedet; in apside summa ea celeritas vis tangentialis est minor, quam motus in circulo deposcat: igitur planeta inde digressus iterum accedere incipiet ad centrum virium.

V. *Si vis gravitatis crescit, quantum distantiae quadratum decrescit, videntur planetae denique omnes in solem labi debere; nec satis intelligitur, quomodo ii a perihelio, ubi maxima vi in solem urgentur, iterum ascendere, magisque removeri a centro, aut ab aphelio, ubi minore vi aguntur in solem, tamen ad ipsum descendere queant.* R. " Hanc difficultatem (inquit insignis Geometra nostri aevi) tanquam insolubilem clamoribus toties repetitis obiecerunt Newtonianae theoriae ii, qui primum tantummodo, & extimum quendam theoriae ipsius veluti corticem attigerunt, durioribus, quae internam medullam concludunt, prorsus intactis." Nempe supra ostensum est, accessum vel recessum, praeterea augmentum & decrementum celeritatis extra apsides pendere ab angulo virium componentium; in apsidibus pendet a maiore vel minore celeritate motus relate ad vim centripetam, quam opus sit, ut planeta in eadem a centro virium manens distantia, circulum describat.

Digitized by Google

SECTIO VI.

De Analytica investigatione gravitatis universalis corporum.

CAPUT I.

De Situ corporum totalium mundi.

Qui principiis Mechanicæ adhuc explicatis sat instructus est, tuto iam cælum conscendet, gravitatem universalem omnium corporum deducturus; quod igitur regiones, ac urbes peregrinas visentibus familiare est, ut primo situm earundem, atque ædificia intueantur, postea singularem indolem, mores, ac leges explorent; sic idem faciendum hoc loco arbitror, ut astrorum, corporumque mundi totalium situm, positionesque, & ordinem generatim antea contemplemur, quam particularia phænomena subiiciamus examini.

§. CCXCIV.

Observatio I. Cælum intuentibus nobis ex hac terra, id instar superficiei sphæricæ concavæ, plurimis stellis, quas *corpora mundi totalia* dicimus, distinctæ adparet, in cuius superficiei cavæ centro nobis constituti videmur; ac si in campo patente, altioreve loco positi oculos circumferimus, visum plano circulari terminari observamus, supra quod quæ existunt, conspici a nobis possunt, quæ infra illud latent, conspici non possunt. Porro ut positiones stellarum, ordinem motusque varios determinemus, puncta quædam fixa in ea superficie cava concipimus, dein sphæram hanc amplissimam diversis circulis secamus.

§. CCXCV.

§. CCXCV.

Definitio I. Si ex quovis loco S in ſuperficie terræ (F. XV. T. V.) ducatur per centrum terræ T linea recta Z S N, quæ ſphæræ cæleſti occurrit in Z & N, punctum Z dicitur loci S vel ſpectatoris in S poſiti *Zenith*, ſeu vertex, & punctum N vocatur eiusdem *Nadir*. *Horizon ſenſibilis* ſeu adparens loci S eſt ſphæræ circulus h u r x, centrum habens in S, & polos in Z, & N. Dicuntur autem *poli circuli cuiusvis* bina puncta oppoſita alterius circuli ad priorem verticalis, quæ 90° gradibus, ſeu integro quadrante a peripheria alterius diſtant. *Horizon rationalis*, ſeu verus eſt circulus H V R X, centrum habens in T terræ centro, & polos in Z, & N, adeoque horizonti ſenſibili parallelus.

Diſtantia horizontis adparentis ab horizonte vero, ſive telluris ſemidiameter S T, ſenſibilis vix eſt, ſi conferatur cum ſtellarum (luna fere ſola excepta) diſtantiis, & ideo terra reſpectu ſphæræ ſtellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam huius ſphæræ centrum conſiderari poteſt; id quod omnes fere aſtronomorum obſervationes ita ſumunt, ut calculi inde initi cum phænomenis cæleſtibus conſentiant. Porro quemadmodum ſingula terræ loca pro centro ſphæræ cæleſtis uſurpari poſſunt; ita in ſpatiis cæleſtibus diameter ſuperficiei ſphæricæ tanta eſſe poteſt, ut illius reſpectu, ſolis a tellure diſtantia evaneſcat; adeoque poterit huius ſphæræ centrum vel in terra, vel ſole, vel quovis ſpatio intermedio collocari.

§. CCXCVI.

Obſervatio II. Tota ſuperficies cava cæli circa puncta quædam fixa ſeu cardines ab ortu ad occaſum æquabiliter convertitur, & intra 24 horas circiter integram revolutionem abſolvit. Puncta illa oppoſita P & p, circa quæ rotari videtur ſphæra, *Poli mundi* dicuntur, quorum is, qui nobis conſpicuus eſt, ut P, *arcticus* ſeu *borealis* dicitur, eidemque appoſitus *antarcticus* ſeu auſtralis. Recta linea P p utrumque connectens,

Digitized by Google

axis mundi vocatur. Si eiusmodi revolutionem sæpius observamus, videmus stellas quasdam eandem inter se distantiam perpetuo observare. Has adpellamus *fixas*; aliæ distantias suas a fixis in dies mutant, & præter communem ac diurnum motum ab ortu in occasum etiam motu proprio ferri conspiciuntur; quas idcirco nuncupamus *planetas*, seu stellas erraticas. Planetæ suis propriis signis notari solent: Mercurius ☿, Venus ♀, terra ♁, Mars ♂, Jupiter ♃, Saturnus ♄; solis signum est ☉, lunæ ☾.

§. CCXCVII.

Definitio II. *Æquator*, *sive æquinoctialis* est circulus sphæræ cælestis maximus, sive per centrum eiusdem transiens, cuius poli iidem sunt cum polis mundi; proindeque sphæram mundanam dividit in 2 hemisphæria, boreale Æ P Q, cuius est polus borealis P, & australe Æ p Q, in quo est polus australis p. Ac observamus stellas singulas extra æquatorem sitas in circulis minoribus, quorum centrum est in axe mundi, & æquatori parallelis communi quodam motu in dies revolvi, eo discrimine, quod planetæ alios præterea proprios habeant motus. Continentur autem planetæ certa plaga, quæ instar fasciæ concipitur, & adpellatur *Zodiacus*, cuius medius circulus est *Ecliptica*, seu circulus sphæræ maximus, quem centrum solis motu proprio ab occasu ad ortum singulis annis videtur describere; hic circulus æquatorem oblique intersecat sub angulo inclinationis 23 $\frac{1}{2}$ graduum circiter. Bina puncta opposita, in quibus æquator, & ecliptica se mutuo intersecant, dicuntur *æquinoctialia*, quod sole in iis posito dies nocti ubique terrarum æqualis sit, & inde tempus, quo sol alterutrum punctum æquinoctiale attingit, *æquinoctium* vocatur. Punctum æquinoctiale *vernale* est, unde sol motu proprio versus polum borealem ascendere videtur in ecliptica: *Autumnale* vero, unde sol versus polum australem descendit, ideoque æquinoctium est vernale, vel autumnale. Puncta *Solstitialia* sunt eclipticæ duo puncta opposita, quæ a punctis æquinoctiali-

li-

Digitized by Google

libus toto circuli quadrante distant, quæque proin maxime ab æquatore recedunt, & in quibus ascensus solis supra æquatorem, & descensus infra eundem terminatur; unde circuli minores per ea puncta ducti æquatori paralleli *Tropici* vocantur, quasi sol ibi cursum suum verteret. Eorum punctorum alterum dicitur *æstivum*, alterum brumale, seu *hybernum*. Vocantur solstitia, quod sole in iis versante per aliquot dies ex eodem horizontis puncto oriri, & e regione in puncto opposito occidere videatur. Porro signum cæleste est duodecima pars Eclipticæ, & in 30 gradus rursus dividitur. Principium primi signi est in puncto æquinoctiali verno, a quo signa numerantur secundum proprium motum solis ab occasu in ortum; suntque sex signa borealia, & in his tria verna, *aries*, *taurus*, *gemini*; tria æstiva, *cancer*, *leo*, *virgo*. Sex australia, & in his denuo tria autumnalia, *libra*, *scorpius*, *arcitenens*, & tria hyemalia: *caper*, *amphora*, *pisces*. Signa ascendentia a puncto solstitiali hyberno ad æstivum, descendentia a solstitiali æstivo ad hybernum computantur.

§. CCXCVIII.

Definitio III. *Circuli declinationis*, seu *circuli horarii* sunt circuli maximi per mundi polos transeuntes & proinde æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cuiuslibet in sphæra mundana *declinatio* est arcus circuli declinationis inter sidus, & æquatorem interceptus. *Ascensio recta* sideris est arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum & circulum declinationis sideris illius comprehensus, ac secundum seriem sive ordinem signorum numeratus. *Circuli latitudinis* siderum sunt circuli sphæræ maximi per polos eclipticæ & sidera transeuntes, atque ideo ad eclipticam perpendiculares. Hinc *latitudo sideris* est arcus circuli latitudinis inter sidus, & eclipticam interceptus. *Longitudo sideris* est arcus eclipticæ ab arietis initio secundum seriem signorum sive in consequentia usque ad circulum latitudinis numeratus. Punctum intersectionis eclipticæ cum circulo latitudinis sideris vocatur *locus sideris eclipticus*, sive *locus in ecliptica*, vel *ad eclipticam reductus*.

Digitized by Google

§. CCIC.

Definitio IV. *Circulus verticalis* eſt quivis circulus maximus Z V N X, per Zenith, atque Nadir, & per aliud quodcunque punctum in ſphæra mundana tranſiens, adeoque horizonti perpendicularis; *Meridianus* eſt circulus verticalis Z P N H per polos mundi P & p tranſiens, & conſequenter æquatori perpendicularis, & circulos æquatori parallelos bifariam dividens. Interſectio plani meridiani cum plano horizontali H R, vel h r nuncupatur *linea meridiana.*

§. CCC.

Definitio V. *Altitudo poli* ſupra horizontem eſt arcus meridiani P R a polo ad horizontem interceptus. Ea ſemper æqualis eſt arcui Z Æ a vertice Z ad æquatorem Æ intercepto; nam ſi ex circuli quadrantibus Z P R, Æ Z P ſubtrahatur arcus communis Z P, remanebunt arcus æquales Æ Z, & P R. *Altitudo æquatoris* ſupra horizontem eſt arcus meridiani Æ H inter æquatorem, & horizontem interceptus; ea æqualis eſt complemento altitudinis poli ſeu arcui Z P; nam ſubducto ex quadrantibus Z Æ H, P Z Æ communi arcu Æ Z, relinquuntur arcus Æ H, Z P æquales. *Altitudo adparens ſideris*, vel puncti cuiuslibet in ſphæra mundana eſt arcus circuli verticalis inter ſidus, & horizontem ſenſibilem interceptus: *altitudo vera* ſideris eſt arcus eiusdem circuli verticalis inter ſidus, & horizontem rationalem interceptus. Reſpectu fixarum, & ſolis eædem ſunt altitudines adparentes, & veræ (Conf. Schol. §. CCXCV.)

§. CCCI.

Obſervatio III. Dum radius lucis a ſideribus verſus oculum ſpectatoris propagatus ex aere rariore in denſiorem tranſit, is non per rectam continuam fertur, ſed in puncto incidentiæ refringitur ad perpendiculum ita, ut ſinus anguli inclinationis ad ſinum anguli refracti ſemper ſit in certa ratione (§. LXXX.) Si (F. XVI. T. V.) pars atmoſphæræ C X F circumfuſæ quadran-

dran-

Digitized by Google

dranti telluris A D divisa intelligatur in superficies vel tenuissimas crustas sphæricas terræ superficiei concentricas C X F, B V E, aer inter binas eiusmodi superficies contentus, & a pondere superioris aeris compressus eo densior erit, quo minus a telluris centro T distabit. Sit Z S H circulus verticalis ex centro telluris descriptus; arcus S H altitudo sideris supra horizontem rationalem T H; & Z S distantia sideris a vertice Z. Si radius lucis S X a sidere S propagatus incidat in atmosphæram in X; is refringetur per X V accedendo ad perpendiculum hoc est, ad semidiametrum T X, qui ad superficiem sphæricam est perpendicularis, & quoniam densitas aeris in V maior est, quam in X, radius in puncto V superficiei sphæricæ rursus eodem modo refringetur ad perpendiculum T V; atque ita radius per alias atque alias crustas, quarum densitas identidem crescit, continuo incurvabitur, & in lineam X V A versus centrum T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta A s, circulo verticali Z H occurrens in s; quia radius lucis S X V A oculum spectatoris in A ingreditur secundum directionem tangentis A s, sidus, quod revera est in S, videbitur in s, loco nempe altiore; atque ita *refractio magis attollit sidera supra horizontem*; quia obiectum in ea recta conspicitur, secundum quam fit directio radiorum oculos ingredientium.

Sideris in vertice Z constituti nullam esse refractionem, ex legibus refractionis patet; itemque perspicuum est, refractiones solis, lunæ, fixarum ac siderum omnium extra terrestrem atmosphæram constitutorum, in paribus a vertice distantiis æquales esse, Astronomi refractiones ad singulos altitudinis gradus definierunt; eædem diversis anni temporibus in pari altitudine æquales manent, exceptis refractionibus circa horizontem, quæ non nullis mutationibus obnoxiæ sunt. Et quoniam radiorum lucis in atmosphæram incidentium obliquitas cum sideris a vertice distantia crescit, per observationes inventæ sunt refractiones siderum a vertice ad horizontem usque, ubi maximæ sunt, continuo augeri.

S.

§. CCCII.

Definitio V. Parallaxis sideris, aut phœnomeni cuiuscunque est distantia locorum in sphæra cælesti, ad quæ sidus, aut quodvis phænomenon e superficie telluris, & ex eius centro spectatum refertur, sive est arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus. Sit T centrum telluris, ac cæli (F. XVII. T. V.) A oculus spectatoris in superficie terræ; Z zenith loci A; Q sidus, vel phænomenon quodvis; C Q P verticalis per sidus transiens; Z S X H verticalis in superficie sphæræ cælestis; A B verticalis in superficie terræ: T H horizon rationalis, & A h horizon sensibilis. His ita constitutis sequentes notiones animo concipiendæ sunt. 1. *Locus physicus* sideris Q est punctum illud, in quo sideris centrum hæret. 2. *Locus opticus adparens*, seu visus est punctum V in superficie sphæræ cælestis, in quo recta ex oculo A per centrum sideris Q ducta terminatur. 3. *Locus opticus verus* est punctum S in superficie sphæræ cælestis, in quo terminatur recta ex centro terræ T per centrum sideris Q ducta. 4. *Parallaxis* est arcus S V, sive differentia locorum opticorum veri, & adparentis. 5. *Angulus parallacticus*, qui plerumque etiam parallaxis nominatur, est angulus A Q T, quem in centro sideris efficiunt rectæ A Q, T Q ex oculo A, & ex terræ centro T ad sideris centrum Q ductæ. 6. *Parallaxis altitudinis*, quæ & parallaxis simpliciter dicitur, est differentia inter distantiam Z V a zenith Z ex loco A visam, & distantiam veram Z S; nempe arcus S V in circulo verticali Z S V H.

§. CCCIII.

Corollaria. I. *Si terræ semidiameter A T ad distantiam sideris a terra non habet rationem sensibilem, nulla erit eius sideris parallaxis.* Quo enim maior est distantia sideris a terra, eo minor fit angulus A Q T, & si A T relate ad reliqua bina latera A Q, T Q evanescit, pariter angulus A Q T evanescet. II. *Parallaxis S V est mensura anguli parallactici A Q T.* Iungatur enim T V;

Digitized by Google

T V; eritque angulus externus A Q T æqualis duobus internis oppositis Q T V, & Q V T; sed angulus Q V T, sive A V T evanescente A T respectu T V est nullus; ergo angulus parallacticus A Q T æqualis est angulo Q T V, sive S T V, cuius mensura est arcus S V. III. *Manente eadem sideris a centro terræ distantia sinus parallaxium sunt ut distantiæ visæ a vertice, sive ut cosinus altitudinum sideris.* Nam in triangulo A Q T est A T ad Q T, uti sinus parallaxeos A Q T ad sinum anguli T A Q, hoc est ad sinum anguli Z A V sive ad sinum distantiæ visæ Z V a vertice, qui est cosinus altitudinis sideris supra horizontem A h. Sit distantia sideris a centro terræ D; sinus parallaxeos = sin. P. Distantia a vertice Z sit = A; erit A T semid. terræ : D = sin. P: A; & si ponitur D distantia sideris a centro terræ constans; & alia parallaxis p, aliaque distantia a vertice *a*; erit: A T semidiam-terræ: D = sin. p: *a*; consequenter sin. P: sin. p = A: *a*. Hinc sequitur IV. *Si datur parallaxis in aliqua a vertice distantia, ea reperietur in quavis alia.* V. *Sideris in vertice Z constituti parallaxis est nulla*; nam tunc A & a- = o. VI. *Quo maior est sideris a vertice distantia, eo maior est parallaxis; & in horizonte est maxima*; tum enim fit A = 1 sive sinui toti; quare data sideris parallaxi horizontali obtinetur parallaxis cuivis datæ, vel observatæ altitudini respondens; si fiat: ut sinus totus ad cosinum altitudinis datæ, vel observatæ; ita parallaxis horizontalis ad parallaxin altitudinis datæ vel observatæ. VII. *Sinus parallaxium siderum Q, & q in æqualibus distantiis adparentibus a vertice sunt in ratione reciproca distantiarum siderum a centro terræ.* Sit distantia utrinque a vertice = A; sinus parallaxis sideris Q = sin. P, & in sidere q = sin. p; erit A T : Q T = sin. P: A, & q T : A T = sin. p : A; unde fit sin. P: sin. p = q T : Q T. Colliges: *Siderum in eadem altitudine adparente existentium, illius maiorem esse parallaxin, quod minus distat a centro terræ.* VIII. *Parallaxis sidera deprimit*, uti refractio attollit, sive parallaxis veram altitudinem sideris minuit, eiusque a vertice distantiam auget, quod vel inspectione figuræ manifestum est.

Ut

Ut usus observationum parallaxeos exemplo declaretur, sit (F. XVII. T. V.) parallaxis A P T = 8″, 7, *qualis ex observationibus ultimis transitus veneris per discum solis in distantia media solis a terra fuit reperta; erit hic angulus A P T idem, sub quo e centro solis semidiameter telluris spectaretur; hinc vera distantia solis a tellure innotescit; assumta enim A P ceu radio, & A T tangente, est tangens anguli A P T* = 8″, 7 *ad radium seu sinum totum, ut A T semidiameter telluris ad distantiam a sole A P. Quoniam ergo sinus, arcus, tangens anguli* 8″, 7 *sensibiliter non discrepant, duntaxat opus est, ut radius ad secunda minuta redactus per hunc arcum dividatur. Continet autem circulus* 360° = 1296000″. *Ratio diametri ad peripheriam in paucis numeris præ cæteris adcurata est* = 1000 : 3141, 5; *hinc erit radius ad peripheriam* = $\frac{1000}{2}$: 3141, 5 = 1000: 6283. *Fiat* primo 6283 : 1000 = 1296000 : *ad radium in minutis secundis, qui reperitur* = 206270, 889. Secundo *fiat:* 8″,7 : 206270, 889 = 1 : 23709, 29; *quæ est distantia media solis a terra in semidiametris terræ.*

§. CCCIV.

Hypothesis. Ut innumerabilium corporum cælestium ordo quidam determinetur, variique eorum motus, ac phænomena quam facillime explicentnr, sumatur nunc instar hypothesis id, quod ipsa motuum, ac phænomenorum expositione pro thesi, ac genuino systemate habendum esse indubitato constabit. Duas esse corporum cælestium sive globorum totalium classes supra diximus, fixas, & errantes. I. Stellæ fixæ omnes, quarum innumerabilis est multitudo, ad distantiam a nobis adeo immanem sunt positæ, ut ipsa distantia terræ a sole respectu eius distantiæ instar puncti sit, & evanescat. Has (F. XVIII. T. V.) extimus circulus, ubi 12 signa Zodiaci adscripta sunt, denotat. Hæ omnes luce propria fulgent, uti sol, qui ex earum numero est, ita, ut illæ ob eam duntaxat caussam minores sole, & minus lucidæ adpareant, quod a nobis in immensum magis distent. II. Remotis iam stellis fixis unica excepta, nempe sole is collocetur in medio S. III. circa hunc velu-

Digitized by Google

veluti centrum revolvuntur planetæ primarii ſex hoc ordine, Mercurius, Venus, terra, Mars, Jupiter, Saturnus. IV. quidam ex primariis planetis ſuos ſatellites habent, qui circa ipſos revolvuntur, & cum ipſis una circa ſolem; ſunt eiusmodi ſecundarii planetæ 10. Luna ſatelles ſeu comes terræ, quatuor Jovis ſatellites, & quinque Saturni. Accedit annulus circa Saturni globum tenuis, & latus, ab eo circumquaque diſiunctus. V. Ad primarios planetas cometæ pertinent, qui circa ſolem tanquam centrum ita moventur, ut non niſi exigua orbitæ ſuæ parte, quando propius ad ſolem deſcendunt, conſpicuos ſe nobis præbeant, tum ad maximas diſtantias etiam ultra Saturnum iterum recedant. VI. Planetæ omnes primarii & ſecundarii, ac cometæ a ſole potiſſimum lumen accipiunt, ac reflectunt, ſuntque opaca corpora. VII. Admodum probabile eſt, eosdem habere figuram proxime ſphæricam, quod de planetis fere omnibus eſt omnino certum; Jupiter tamen figuram ſphæroidis refert non ita parum compreſſæ. VIII. Convertuntur planetæ circa proprium axem; qui eſt *motus vertiginis* in aliis celerior, in aliis tardior. IX. Motus vero planetarum primariorum, queis orbitas ſuas circa ſolem, conficiunt, omnes fiunt ab occaſu in ortum in planis ad ſe invicem aliquantum inclinatis, in ſpatio cæleſti, ubi nulla, aut fere nulla eſt motus reſiſtentia. Planum illud, in quo movetur tellus, adpellatur Ecliptica, ad quam aliorum plana ſeu orbitæ inclinantur, ita ut puncta, in quibus planum Eclipticæ interſecant, *nodi* vocentur; eſtque *nodus aſcendens*, in quo tranſitur ab hemiſphærio auſtrali ad boreale, alter vero *nodus deſcendens*. Porro ſol una cum planetis primariis, & ſecundariis eo, quo diximus, ordine diſpoſitis, adnumeratis præterea cometis *ſyſtema ſolare*, vel *planetarium* conſtituit.

CA-

Digitized by Google

CAPUT II.

De Gravitate planetarum in solem.

Explicandæ hoc loco sunt regulæ Keplerianæ observationibus, & calculis innixæ; tum Newtoniana gravitatis diductio haud admodum captu difficilis videbitur.

§. CCCV.

Regula I. *Planetæ primarii circa solem volvuntur in orbitis ellipticis, ita, ut singularum ellipsium focum alterum sol occupet.* Nam *primo* planetæ curvas describunt in se redeuntes, quippe qui post certum dierum, vel annorum numerum ad idem cœli punctum, unde ante digressi sunt, reverti observantur. *Secundo.* motus suos peragunt circa solem, quos quidem si concipiamus ex ipso sole nos intueri, facile intelligimus, eos summo & constante ordine ab occusu in ortum peragi, cum iidem e terra spectantibus nobis sæpenumero perturbati videantur. Planetas quidem inferiores, id est, Mercurium, & venerem, circa solem moveri eorundem *phases*, id est, variæ disci partim illuminati, partim tenebris obducti adparentiæ ostendunt. Hi quidem terram suis orbitis non complectuntur; sed ita circa solem circumeunt, ut aliquando longius a nobis, quam sol absint, alias inter nos, & globum solarem transeant; at vero soli nunquam opponuntur, ita ut terra inter ipsos & solem media sit, neque ab eo ultra certæ magnitudinis arcum discedunt, qui *maxima elongatio* dicitur. Planetarum superiorum uti Martis, Jovis, Saturni orbitæ terram suo ambitu constringunt: verum eorum motus ita sunt comparati, ut, si ad tellurem referantur, extra omnes leges Physices vagentur, nullumque secundum principia Mechanices explicatum habeant; nam alias ab occasu in ortum progredi, alias stare eodem prope cœli puncto, aliquando etiam retrogredi videntur; nequit igitur terra eorum motuum centrum constitui. Mars quidem, dum in oppositione est cum sole, septies teste Keillio maior videtur, quam dum coniunctioni adpropinquat, propterea quod priore

ca-

casu, dum est in M multo propior sit telluri T, quam in m (F XVIII.) Similia observantur in Jove, & Saturno, etsi multo minore distantiarum varietate. Posteaquam animadversum erat, planetas circa solem in curvis redeuntibus in se ipsas moveri, species eius curvæ erat determinanda; ac comperit Keplerus post plurimas observationes, ac molestissimos calculos, curvam, quam planetæ circa solem describunt, utrinque ad latera magis compressam esse, quam ad vertices; hinc ellipsin circulo substituit, quo omnes ante eum astronomi utebantur; & sane exploratum dein est, ellipsin motibus & distantiis planetarum explicandis, atque universæ motuum theoriæ omnino congruere. Et quoniam singuli planetæ durante una revolutione tantum semel veniunt ad aphelium, & semel ad perihelium; perspicuum est, solem non posse in centro ellipseos collocari; ibi enim si existeret, dictum phænomenon bis singulis revolutionibus contingeret. Nam essent planetæ bis in aphelio, dum per extrema puncta axis maioris A & a (F XIII. T. V.) transirent, & bis in perihelio, dum extrema axis minoris puncta attingerent.

§. CCCVI.

Regula II. *Planetæ in ellipsibus suis non feruntur motu æquabili; describunt tamen areas temporibus proportionales, æqualibus æquales duplis duplas.* Ex æqualitate arearum æqualibus temporibus descriptarum, & ex variata planetæ a sole distantia facile intelligitur, nec *celeritatem linearem veri motus* per quemvis ellipseos arcum AB, & ab (F. I. T. VI.) nec conversionem angularem circa punctum S, quod est centrum æqualium arearum esse constantem, & æquabilem; cum enim areæ æqualibus temporibus descriptæ æquales sint, necesse est, ut maior amplitudo anguli in foco S, & maior per arcum orbitæ celeritas compensent minorem in distantiis planetæ minoribus productionem ipsius sectoris elliptici.

Qui & hanc regulam, & præcedentem accuratius demonstratam cupit, sequentia adnotet. Primo. *Velocitas* an-

angularis vera corporis est angulus, quem radii vectores arcum dato tempore descriptum intercipientes comprehendunt. Motus medius, seu velocitas angularis media est, quam corpus haberet, si eodem tempore, quo integram revolutionem absolvit, motu semper æquabili progrederetur; invenitur proin motus medius pro dato tempore ex hac analogia: ut tempus revolutionis integræ ad 360°, *ita tempus datum ad motum medium ei respondentem.* Secundo. *Celeritas angularis vera corporis intra exigua tempora æqualia exiguos arcus describentis est in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium; Sint enim bini sectores elliptici, qui temporibus exiguis percursi pro circularibus haberi possunt, S, & s, radii seu distantiæ a centro virium R & r, anguli intercepti A, & a; Si radii æquales ponuntur, eo maior erit sector, quo maior est angulus, ut sit* $S : s = A : a$. *Si autem anguli æquales sint, radii inæquales; erunt iidem sectores circulorum suorum partes similes, proinde in ratione duplicata radiorum, fietque* $S : s = R^2 : r^2$: *Si ergo & radii & anguli differant, erit* $S : s = A R^2 : a r^2$. *Ex hypothesi areæ intra æqualia tempora percursæ, sunt æquales, ut sit* $S = s$; *proinde* $A R^2 = a r^2$, & $A : a = r^2 : R^2$ *hoc est, anguli radiis vectoribus intercepti, sive celeritates angulares sunt reciproce, ut quadrata distantiarum a centro virium. Hinc si observentur velocitates angulares, seu anguli intra exigua tempora ad centrum virium descripti, qui sint e. g.* 500*ma*, *vel* 600*ma*, *pars totius revolutionis periodicæ, ratio distantiarum a centro virium, & proinde figura ipsius traiectoriæ determinari (F. II. T. VI.) potest.* Tertio. *Si corpore quodam ellipsin A N a M describente circa centrum virium S, concipiatur aliud corpus circa idem centrum eodemque tempore circulum M T N percurrere, manifestum est ob æqualitatem temporum periodicorum aream circuli æqualem esse areæ ellipseos, ac velocitatem mediam in circulo & ellipsi esse eandem (ex ipsa notione motus medii) His positis sint (F. I. T. VI.) arcus G g in ellipsi, & R r in circulo eodem tempore descripti; ductis radiis vectoribus, & G o ad S G perpendiculari, sectores G S g, R S r erunt areæ triangulares æquales; hinc ob rationem basium, &*

alti-

altitudinum reciprocam; erit $Rr : Go = SG : SR$; *præterea sunt arcus* $Go : Ru = SG : SR$; *quare compositis rationibus fiet* $Rr : Ru = SG^2 : SR^2$; *sed* Ru *metitur angulum* GSo, *seu velocitatem angularem veram, sicut arcus* Rr *metitur velocitatem mediam; quare velocitas angularis media est ad velocitatem angularem veram in ratione duplicata distantiæ corporis a centro virium ad radium circuli, cuius area ellipseos descriptæ aream adæquat. Uti igitur* SG *fuerit maior, æqualis vel minor, quam* SR, *hoc est, uti arcus fuerit vel extra circulum in arcu* MAN, *vel in punctis* M, N, *vel intra circulum in arcu* MaN; *ita erit* Rr, *seu velocitas corporis media maior, vel æqualis, vel minor velocitate vera* Ru. *Sunt itaque puncta* M, *&* N *termini accelerationis & retardationis motus angularis veri respectu motus medii.* Quarto. *Ex observationibus manifeste deducitur, diametrum adparentem planetarum modo augeri, modo imminui, & velocitates quoque angulares æqualibus temporibus non easdem esse, etsi observationes ex ipso solis centro fierent; quapropter apertissimum est, solem non esse in centro circuli, siquem planetæ describerent; secus & distantia, consequenter diameter quoque adparens, & velocitas constans foret. Sed nec statui potest, planetas in circulis excentricis moveri; Nam* quinto *Sit e. g. Mercurii orbita* $ANaM$ *circulus, (F. II. T. VI.) cuius centrum in* C, *sol & observator in* S. *ducatur per* C *&* S *linea apsidum* ACa: *erit* Sa *minima,* SA *maxima distantia Mercurii a sole: perihelium in* a, *aphelium in* A. *Puncto* S *tanquam centro radio* CA *describatur circulus* $MTNIM$, *cuius area ob æqualitatem radiorum æquatur areæ traiectoriæ a Mercurio descriptæ. Summa, qua fieri potest, adcuratione determinetur ratio rectarum* SA *ex velocitate angulari minima,* Sa *ex maxima,* SN *ex media per num. præc. Sic in Mercurio, si assumitur* $SN = 1000$, *velocitas media intra 4 horas ex tempore integræ revolutionis 87 dierum, 23 h. 15'. 32'' per analogiam num. primo indicatam reperitur = 40'. 55''. 4. velocitas maxima, tempore 4 hor. ex observationibus habetur = 1°, 3'. 55''. fiat: velocitas maxima, est ad velocitatem mediam, uti* SN^2 *ad* Sa^2, *(per num. secundum) atque* *ita reperitur S a = 800. 11. & S A = 1222. 441. quodsi iam vera traiectoria planetæ esset circulus, erit A a = A S + S a = 2 S N; quod observationibus evidenter pugnat; deberet enim esse 2022. 552 = 2000. quare traiectoria planetarum nequit esse circulus; sed cum semisumma rectarum A S + S a sit minor, quam S N, manifestum est, quod curva ad puncta M & N sit magis compressa, quam in A, & a. Atque hoc modo Keplerus inductus est, ut ellipsin circulo substitueret.*

§. CCCVII.

Regula III. *Quadrata temporum periodicorum sunt ut cubi distantiarum mediarum, quas a sole habent.* Id ut intelligi queat, satis est proximas rationes temporum ac distantiarum assumere; Si distantia media terræ a sole, sive semiaxis orbitæ telluris fiat = 10; erit distantia Mercurii ab eodem sole = 4; Veneris = 7. Martis = 15. Jovis = 52. Saturni = 95. fiat: ut cubus distantiæ terræ = 1000 ad quadratum sui temporis periodici = 144 (istuc rotunde per 12 menses exprimendo) ita cubus distantiæ cuiusvis planetæ primarii ad quadratum sui temporis periodici. Hinc reperitur pro

☿ 1000 : 144 = 64 : 9, 216. hinc temp. period. proxime = 3 Mens. seu 88 d.

♀ 1000 : 144 = 343 : 49, 392. = 7. 224 $\frac{2}{3}$

♂ 1000 : 144 = 3375 : 486, 000 = 22. 1. an. 322 d.

♃ 1000 : 144 = 140608 : 20247, 552. = 142. 11. 314 $\frac{1}{2}$ d.

♄ 1000 : 144 = 857375 : 123461,000. = 351. 29. 168 d.

Quamvis inventi numeri observatis periodis non exacte respondeant; id quod tum ex minore rationum assumtarum congruentia, tum ex perturbationibus motus planetarum provenit; satis tamen perspici potest, legem hanc quam proxime in toto systemate planetario observari, ita ut satellites quoque relate ad centrum sui motus, nempe ad primarium planetam, circa quem immediate moventur, eandem sequantur, uti observationes ad calculum reducta exhibent. Newtonus hanc regulam Keplerianam his verbis effert: temporis periodica planetarum sunt in ratio-

Digitized by Google

ne ſeſquiplicata diſtantiarum eorundem; & diſtantiæ illorum in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum; cum enim ſit $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$; *erit* $T, t = D^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}}$. *porro exponens* $\frac{3}{2}$ *exprimit rationem ſeſquialteram, vel ſeſquiplicatam; & quia* $T^2 = D^3$; *erit* $D = T^{\frac{2}{3}}$ *; ratio vero* $\frac{2}{3}$ *dicitur ſubſeſquiplicata.*

§. CCCVIII.

Propoſitio I. *Omnes Planetæ aguntur vi gravitatis in centrum circa quod moventur, nempe primarii in ſolem, ſecundarii maxime in primarios, eaque vis gravitatis eſt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab eodem centro.* Oſtenditur I. *Ex motu lunæ.* Newtonus analyſin naturæ & legum generalium gravitatis inchoavit a gravitate lunæ in terram. Sic enim ratiocinatus eſt: omnia corpora tum in ſuperficie terræ poſita, tum prope eandem in terram conſtanter gravitant, ita, ut gravitas in altiſſimis etiam montium iugis exeratur, ac ne minuatur quidem ſenſibiliter; cur igitur hæc gravitas in maiore diſtantia qualem luna a terra habet, omnino abrumpatur? vidit tamen vir acutus, quod, ſi luna per vim gravitatis curſum ſuum circa tellurem conficiat, ea gravitas in tam magna diſtantia fortaſſis decreſcat reciproce, ut quadratum diſtantiæ augetur, uti idem in planetis circa ſolem circumvolutis in ellipſi fieret; quapropter indagandum ſibi ſumſit, an vis gravitatis ſic decreſcens par ſit lunæ in ſua orbita continendæ, idque reipſa invenit. Comparetur enim gravitas lunæ in terram cum gravitate corporum in ſuperficie terræ poſitorum, ut horum diſtantia a centro ſit ad diſtantiam lunæ 60 ſemidiametrorum terreſtrium, ut 1 ad 60. Quoniam orbita lunaris perparum abludit a circulo, pro circulari in præſens ſumi poteſt, motusque cenſeri æquabilis. Si luna intra minutum primum deſcribit arcum S a (F. IV. T. V.) effectum gravitatis in terram exprimet lineola S m, nempe ſpatium, quo intra 1′ ad terram accedit. Cum motus ponatur æquabilis, certe arcus deſcripti erunt temporibus proportionales; igitur ut arcus S a reperia-

 tur,

Digitized by Google

tur, fiat: ut totum tempus periodicum lunæ ad $1'$; ita tota peripheria ad arcum uni minuto primo respondentem; sive cum tempus periodicum sit $= 27^{d}.\ 7^{h}.\ 43'.\ 12. = 39343',2$ erit $39343,2 : 1 = 360^{o} : \frac{360^{o}}{39343,2} = \frac{3600^{o}}{393432}$; Hæc fractio si redigatur ad minuta secunda, abibit in hanc: $\frac{3600 \times 3600}{393432} = 32'', 966$. Percurret igitur luna minuto *primo* temporis quam proxime $33''$ arcus; quod quidem spatium exprimitur per arculum S a. quærendus igitur est sinus versus huius arcus, seu lineola S m. Ex tabulis radius ad sinum versum arcus $33''$ est, ut 1 00000000000 ad 12798; ponatur hæc ratio $= m : n$. Sit terræ semidiameter $= 19641762$ pedum. Quoniam distantia lunæ seu radius orbitæ ex hyp. continet 60 semidiametros, erit hic radius $= 1178505720'$. igitur fiat: ut se habet m ad n; ita hic radius ad quartum terminum, qui in pedibus exhibebit spatium, per quod luna vi gravitatis versus terram urgetur intra minutum primum; idque subductis rationibus ope logarithmorum reperitur $= 15, 081$ pedibus. Quocirca in comperto est, lunam singulis minutis primis spatio $15, 081'$ per gravitatem suam versus terram accedere. At corpora prope superficiem terræ, sive una tantum semidiametro a centro terræ distantia intra minutum secundum conficiunt 15, 067 ped. Comparentur hi effectus gravitatis inter se, qui quidem proxime æquales sunt. Nempe lunæ concessum est minutum primum, sive tempus sexagesies maius, quam corpori terrestri ad idem spatium conficiendum; hinc cum ex theoria gravium spatia crescant, ut quadrata temporum, deberet effectus gravitatis in luna, si ea par esset gravitati in superficie terræ, crescere ut 60^2. Sicut in eadem ratione effectus prope superficiem terræ crescit; quod cum minime fiat necesse est, ut vis gravitatis in eadem ratione

tione decrescat, sive ut tanto minor sit in luna, quanto maius est quadratum distantiae, quam luna a terra habet; *Vis igitur gravitatis lunae in terram est in ratione inversa duplicata distantiarum a centro terrae.* Sit gravitas corporis in superficie terrae V; gravitas lunae u; spatium utrinque idem $= 1$; tempus, quo corpus in superficie terrae 15 pedes conficit, sit $T = 1''$. tempus, quo luna idem conficit spatium $= t = 60''$ nempe 1 minut. prim. quoniam ex formula (§. XCV.) $V : u = \frac{S}{T^2} : \frac{s}{t^2}$ erit hoc casu $V : u = 1 : \frac{1}{60^2} = 60^2 : 1$. Vicissim si assumitur lex gravitatis agentis in ratione inversa duplicata distantiarum, facile invenitur, effectum gravitatis lunae intra minutum primum, & alterius corporis prope superficiem terrae intra minutum secundum esse aequalem; cum enim sit $S = V T^2$, & ex hyp. $V = \frac{1}{D^2}$, intelligendo per D distantiam a centro, in quod tenditur; erit hoc modo $S = \frac{T^2}{D^2}$. Sit spatium, tempus, distantia corporis prope superficiem terrae S, T, D, in luna s, t, d; erit $S : s = \frac{T^2}{D^2} : \frac{t^2}{d^2} = 1 : \frac{60^2}{60^2}$; quae est ratio aequalitatis; *Si ergo gravitas est reciproce ut quadratum distantiae a centro, in quod gravitatur, eadem est lunae, & corporis cuiuscunque terrestris gravitas, ipsaque adeo luna ad terrestria corpora pertinet.*

Ex tertia regula Kepleriana (§. CCCVII) si plura corpora volvuntur circa idem centrum, cubi distantiarum sunt ut quadrata temporum periodicorum. Si quod corpus terrestre in distantia a centro terrae $=$ 1, in qua gravitatem suam retinet, volveretur circa terram, tempus periodicum esset $= 5068''$, uti supra invenimus (§. CCLXXVI. n. IX.) distantia lunae $= 60$.

 fiat

Digitized by Google

fiat $1^3 : 60^3 = (5068)^2 :$ ad quadratum temporis periodici lunaris $= 60^3 \times (5068)^2 = 5547878784000$; radix huius numeri proxime est $= 2355402$; quod est tempus periodicum lunae in minutis secundis, efficitque $27^{d}.\ 6^{h}.\ 16'.\ 42''$. quod quidem cum tempore ex observationibus cognito valde convenit, quantum fieri in eiusmodi calculis omnino potest, ubi elementa satis adcurata haud sunt. Vicissim etiam demonstravi §. CCLXXIV. quod assumta hac Kepleriana regula vis gravitatis corporum circa idem centrum circulos describentium sit reciproce, ut quadratum distantiae ab eodem centro.

§. CCCIX.

II. *De Planetis primariis.* Ex lege secunda Kepleri Planetae primarii circa solem describunt areas temporibus proportionales; Porro omne corpus, quod hac lege arearum suam orbitam describit, urgetur vi centripeta versus ipsum centrum istiusmodi arearum; quae est propositio inversa corollarii III. §. CCLXVII. summo rigore demonstrata. Hanc vim gravitatis in eadem orbita variari reciproce ut quadratum distantiae a centro virium, adcurate ostendimus §. CCXC. de motu in ellipsi. Eadem lex gravitatis ex tertia Kepleri lege manifesto ac necessario derivatur; cum enim in diversis ellipsibus diversorum planetarum primariorum, quas circa eundem focum, nempe solem describunt, quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum, vires eorundem in focum necessario ut quadrata distantiarum inverse se habent. Nam areae A, quae in diversis ellipsibus cummuni tempusculo describuntur, eo maiores sunt, quo maior est area totalis, & quo brevius est tempus periodicum T. cum igitur areae totales ellipsium sint uti rectangula ex semiaxibus (§. CCLXXXVIII. n. 2.) erit F. XIII. T. V. $A = \frac{AC \times CB}{T}$; & proinde $8A^2 = \frac{8AC^2 \times CB^2}{T^2}$. & cum in quovis el-

lipseos

ellipseos puncto vis centripeta seu V sit $= \frac{1}{PS^2} \times \frac{8A^2 \times AC}{2CB^2}$ n. 5. §. CCXC. substituendo pro $8A^2$ valorem æqualem, fiet $V = \frac{1}{PS^2} \times \frac{8AC^3}{2T^2}$. Ex hyp. autem quadrata temporum periodicorum seu T^2 sunt ut cubi distantiarum mediarum seu AC^3; hinc quantitas $\frac{8AC^3}{2T^2}$ constans est, & unitati æquipollet; restat igitur $V = \frac{1}{PS^2}$. Vicissim assumta iam lege virium agentium in ratione reciproca duplicata distantiarum ad legem tertiam Keplerianam pervenitur. Sint enim bini planetæ A & B, quorum distantiæ mediæ, tempora periodica, vires gravitatis sint, in A ut D, T, V; in B ut d, t, u. Quoniam singuli eodem semper tempore singulas revolutiones absolvunt per sese, & præscindendo a perturbationibus motuum, motus eorundem quoad integram revolutionem non aliter fit, ac si in circulo perageretur; hinc concipi potest, eodem tempore T, quo planeta percurrit ellipsin, ab alio quodam corpore in distantia D describi circulum, & tempore t, quo alter B ellipsin suam absolvit, in distantia d pariter describi circulum; erit §. CCLXXII. $V : u = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$. Ex hyp. est $V : u = \frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}$; igitur ob similitudinem rationum $\frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2} = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$: unde prodit $D^3 : d^3 = T^2 : t^2$, quæ est ipsissima lex Kepleriana, & considerata hypothesi æque binis planetis, ac corporibus assumtis convenit.

Digitized by Google

§. CCCX.

III. *De Satellitibus planetarum primariorum.* De Luna, quæ eſt ſatelles terræ, paullo ante diſſerui. De Jovis autem & Saturni ſatellitibus compertum eſt, easdem illas leges, quas in primariis planetis Keplerus detexerat, ab ipſis quoque ſatellitibus relate ad ſuos primarios obſervari; ac tertia potiſſimum lex manifeſtius in iis ſeſe prodit; nam priores duæ ob ingentem diſtantiam orbitarum, quæ perquam exiguæ nobis adparent, minus adcurate explorari poſſunt, cum focorum diſtantia, & diſcrimen orbium a forma circulari non ita ſub ſenſus cadit, uti diſtantiarum integrarum, & temporum periodicorum ratio determinari poteſt. Nihil igitur opus eſt ſingulatim demonſtrare, ſatellites eadem gravitatis lege in ſuos primarios urgeri, cum id ex analogia, & ex ipſa lege tertia Kepleriana neceſſario conſequi, indubitatum ſit.

§. CCCXI.

IV. *De cometis.* Conſtat ex obſervatione motus cometarum eos in regionem planetarum, atque adeo infra ipſos planetas deſcendere, ac circa ſolem moveri, ita, ut, ſi obſervationes præſto ſint, eorundem motus perinde ac primariorum planetarum determinari poſſit. Certe Newtonus, poſtquam obſervationes tres a Flamſtædio factas obtinuiſſet, ex legibus vis proiectilis & gravitatis univerſalis complura planetæ loca determinavit, inter quæ, & loca ex obſervationibus cognita exiguum prorſus diſcrimen repertum eſt. Idem ab aliis aſtronomis ſucceſſu admodum felici ſæpius iam præſtitum eſt. Nequit etiam in dubium revocari, cometas peracta revolutione, iterum reverti, adeoque in lineis curvis in ſe ipſas redeuntibus moveri. Eodem ergo effectu dato, qui in planetis aliis obſervatur, eandem adſignari cauſſam neceſſe eſt; effectuum enim eiusdem generis eædem ſunt cauſſæ. Sed quod maxime ad hunc locum pertinet, ductis ex ſole tanquam centro virium in cometas radiis vectoribus deprehenſum eſt, radium um vectorem eorundem describere areas temporibus proportionales; quod manifesto indicio est, eos vi gravitatis in solem agi, uti alii planetæ aguntur. Sed de cometis adcuratius tractabo alio loco.

§. CCCXII.

Declarantur Quædam Dubia.

I. *Inito calculo non reperitur exacta ratio quadrati distantiarum in effectu gravitatis terrestris & lunaris; igitur diductio gravitatis ex motu lunæ sat firma, & adcurata non est* R. Ratio gravitatis & distantiarum ex illo calculo exacta reperiri non potest; nec sane opus est ad rem præsentem; neque enim elementa calculi adcuratissima sunt; nam luna reipsa non in circulo sed in ellipsi movetur, eiusque a terra distantia, uti in calculo sumebatur, non penitus respondet eius distantiæ veræ; præterea plures aliæ correctiones neglectæ sunt, uti quod motus lunæ actione solis perturbetur. Hæc igitur diligenter considerare debuissent non nulli, qui Newtonum carpunt idcirco, quod non adcuratissimam inveniant rationem quadrati distantiarum in effectu gravitatis lunæ, & corporum terrestrium. Lex tamen gravitatis ex inventa propinqua ratione, & consensu innumerabilium phœnomenorum satis inde deduci potest.

II. *Intelligi non potest, cur, si areæ sint temporibus proportionales propterea vis gravitatis variari debeat reciproce ut quadratum distantiæ a centro virium; nulla enim inter areas, & hanc gravitatis legem connexio deprehenditur.* R. Si de eodem corpore in ellipsi incedente agitur, spectanda quoque est variatio distantiarum eiusdem a centro virium; ea vero oritur vel ex angulo virium componentium, vel ex ratione celeritatis proiectilis aut tangentialis ad vim centripetam, vel ex utraque pendet, uti supra indicatum est. Si igitur distantia planetæ a suo centro est variabilis, & areæ sint temporibus proportionales, necesse est ut in minore distantia describatur arcus maior, & in maiore arcus minor, quia æquales areæ triangulares rationem recipro-

cam

Digitized by Google

cam baſium, & altitudinum habent. Porro ſi eadem eſt arcuum curvatura, uti e. g. in aphelio, & perihelio, & ſi præterea arcus æquali tempore deſcripti ſunt inæquales, opus eſt, ut, ubi arcus maior deſcribitur, ceu in perihelio, vis gravitatis pariter maior ſit; quia alterum extremum talis arcus magis a tangente recedit, proindeque vis maior requiritur, ut eodem tempore ad orbitam detorqueatur planeta, quam ſi arcus deſcriptus minor foret. Ex his quidem generatim intelligitur, cur gravitas variari debeat, ſi diſtantia planetæ a centro varietur, & tamen areæ temporibus proportionales ſint. Ut vero lex huius variationis perſpicue exponatur, ſit minima diſtantia planetæ dimidia maximæ; ac tum is in minima diſtantia duplam celeritatem habebit illius, quæ datur in diſtantia maxima ob æqualitatem arearum, ac baſium, & altitudinum rationem reciprocam. Igitur in minima diſtantia intra 1″ percurretur arcus æqualis illi, qui in diſtantia maxima intra 2″ conficitur, & tantundem planeta in priore caſu intra 1″ deflectet a tangente, quantum in poſteriore deflecteret intra 2″. Quare cum ex theoria virium acceleratricium (§. XCV.) ſit $V = \frac{S}{T^2}$; ſi ſpatium, quo a tangente receditur, utrinque ponatur æquale, erit $V = \frac{1}{T^2}$, hoc eſt, in hypotheſi, quod ratio minimæ & maximæ diſtantiæ ſit 1:2, ratio virium erit $1 : \frac{1}{4} = 4 : 1$; eodemque modo, ſi ratio diſtantiarum ſit 1:3, ratio virium erit 9:1; cumque id de quavis multipla, vel ſubmultipla ratione diſtantiarum pateat eodem modo, erit gravitas in hypotheſi arearum temporibus proportionalium, & diſtantiæ variabilis reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro virium.

III. *Inter legem Kepleri tertiam, & gravitatis legem Newtonianam mutua connexio eſt, ita, ut altera ex altera conſequatur* (§. CCCIX.) *at vero is nexus qualis ſit, & unde proveniat, ægre perſpici poteſt.* R. Is nexus tum ex inæquali in diverſis orbibus celeritate, ac proin-

proinde etiam inæquali tempore periodico, tum ex magnitudine, flexu, & curvatura eorundem orbium pendet. Quem in finem nota *primo*: ea regula Kepleri perinde obtinet, ſive planetæ in ellipſibus, ſive diverſis circulis moveantur, ſiquidem idem habeant centrum virium; ſemperque concipi poteſt, dum quidam planeta orbitam ellipticam vertit, alium eodem tempore motu æquabili deſcribere circulum. *Secundo* ſi ratio diſtantiarum in binis planetis ſit $1:4$ ſeu $D:d$, erit celeritas vicinioris ad celeritatem remotioris, ut $2:1 = \frac{1}{\sqrt{D}} : \frac{1}{\sqrt{d}}$ Nempe in ratione reciproca ſubduplicata diſtantiarum a centro virium (CCLXXV.) Hiſce poſitis nexus inter Kepleri legem tertiam, & legem gravitatis Newtoni intelligi quodam modo poteſt; nam tempora periodica pendent a celeritate motus & ſpatio percurrendo ſeu magnitudine orbium, qui ſunt uti diſtantiæ a centro virium ac circuli; cum magnitudine autem diverſa pariter diverſa earundem curvatura connexa eſt, cui reſpondere debet vis gravitatis diverſa. In poſito caſu diſtantiarum ac celeritatum, in primis gravitas planetæ vicinioris in centrum quadrupla eſſe debet gravitatis, quæ eſt in remotiore, quia vires ſpectatis ſolis celeritatibus creſcunt ut quadrata earundem, quod diſtincte expoſui (§. CCLXXVI. n. III.) deinde quia radius minoris orbitæ quater contineri ponitur in radio remotioris, neceſſe eſt, ut in minore orbita curvatura, & declinatio a tangente ſit quadruplo maior, quam in remotiore, ut proinde hoc etiam ex capite gravitas planetæ vicinioris in centrum quadrupla eſſe debeat gravitatis illius, quæ eſt in remotiore; quando igitur inæqualis celeritas, & inæqualis curvatura orbitæ coniunctim ſpectantur (cum his autem tempora periodica, ac diſtantiæ neceſſario connexa ſunt) haud ægre intelligitur, gravitatem vicinioris decies ſexies maiorem eſſe gravitate remotioris, in hypotheſi, qua ratio diſtantiarum eſt $1:4$; eodemque modo de quavis multipla, vel ſubmultipla diſtantiarum ratione demonſtratur, gravitatem poſita Kepleriana lege tertia variari reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro virium. Viciſſim po-

ſita

sita hac lege gravitatis, Kepleriana lex eruitur. Nam tempus periodicum in motu circulari æquabili pendet a celeritate, & spatio seu peripheria percurrenda, quæ est ut radius seu distantia a centro virium. Hinc si celeritas vicinioris & remotioris corporis par foret, planetæ remotioris tempus periodicum tantum cresceret, quanto maior est eius a centro virium distantia secundum formulam $T = S = D$. Quia vero assumta ea lege gravitatis celeritates sunt reciproce, ut radices distantiarum; hinc si planeta remotior quadruplo magis distet, erit celeritas eius duplo minor, quam in viciniore; cum igitur spatium percurrendum sit directe ut distantia, & celeritas reciproce ut distantiæ radix, necessario sequitur ea temporum ac distantiarum ratio, quam tertia Kepleri lex exprimit. Omnem obscuritatem tollent formulæ; $T = \frac{S}{C}$, & $S = D$, $C = \frac{1}{\sqrt{D}}$; igitur $T = D\sqrt{D} = \sqrt{D^3}$.

CAPUT III.

De Legibus Attractionis Universalis.

Ex Analytica investigatione gravitatis illud iam consequimur, ut eiusdem leges quædam non ex mera hypothesi confictæ, sed ex phænomenis naturæ collectæ stabiliri queant; etsi eædem ex consensu aliorum phænomenorum, quæ deinceps examinanda sunt, mirum in modum commendentur, ac firmentur. Adpellatur autem hæc attractio universalis, *quia ad universum mundi systema, eiusque harmoniam & ordinem conservandum pertinet; sunt enim pro varia elementorum coniugatione aliæ attractiones particulares, aliæque earum leges, quas phænomena particularium corporum, si recta methodo examinantur, passim exhibent, uti in Physica particulari palam fiet.*

§. CCCXIII.

Definitio. *Attractio* secundum ideam illam, quam phœnomena naturæ nobis ingerunt, est determinatio,

quam

Digitized by Google

quam singula puncta corporum acquirunt accedendi certa lege velocitatis ad aliud punctum, seu ad aliam massam, quæ instar centri consideratur. Sic dicimus esse attractionem solis in planetas, quatenus singula elementa vel puncta planetarum acquirunt determinationem accedendi certa velocitatis lege, quam mox declarabimus, ad solem, qui est centrum eiusmodi accessus, vel determinationis ad accessum. Attractioni solis in planetas respondet *gravitas* planetarum in solem, uti attractioni terræ in lapidem, aliudve terrestre corpus respondet gravitas lapidis in terram; quamquam attractionis, & gravitatis vocabula passim, uti fit, confundantur; quod dissimulari potest, modo ne deceptrices ideas, & a toto attractionis systemate aberrantes quisquam inde concipiat, & gravitatem, seu gravitationem, non nisi per tendentiam ad centrum, quod fortassis non nisi imaginarium est, sibi repræsentet, nulla distantiæ, nulla massæ, in quam tenditur, habita ratione. Duplex est modus, quo hæc attractio, & gravitas concipi & explicari solet. Dum enim e. g. luna gravitat in terram, vel attrahitur a terra, atque idcirco ad terram accedit, ratio huius accessus vel inhæret in ipso corpore seu luna accedente, vel inest in corpore, ad quod acceditur, nempe in ipsa terra. Hoc posteriore sensu attractio vim vocabuli proprie retinet; quia quævis molecula aut quodvis punctum materiæ instar centri consideratur, quod per amplissimam suæ activitatis sphæram in omnes alias moleculas intra eandem contentas certa lege agat attrahendo, seu impellendo easdem versus se, atque ista concipiendi ratione facile intelligitur, eo maiorem fore hanc in alias moleculas actionem, quo maior est molecularum, aut punctorum in centro existentium numerus; nam quodvis punctum centrale in aliud quodvis per sphæram suam dispersum agit; ex collectione igitur plurium punctorum agentium, seu attrahentium maior fit actio, seu attractio; crescet igitur hæc vis directe ut massa attrahens, sive ut massa, in quam tenditur, quemadmodum reipsa in toto systemate planetario ista lex obtinet. Huic conceptui respondent verba Caillii in animadversionibus ad systema physicum Astronomiæ: „ *Omnia phœnomena motus corporum vel*

„ *invi-*

„ *invitos cogunt, ut agnoscamus, omne corpus, vel po-*
„ *tius omnem materiæ moleculam esse veluti centrum sphæ-*
„ *ræ cuiusdam in infinitum extensæ, cuius quivis radius*
„ *sit directio vis constantis, & uniformis per totam ra-*
„ *dii longitudinem, quæ seu impellat, seu trahat versus*
„ *centrum omnem materiæ in hoc radio existentis molecu-*
„ *lam, & actionem huius vis esse semper in ratione re-*
„ *ciproca duplicata distantiæ moleculæ illius a centro.* „
Secundum alterum concipiendi modum attractionis vox minus proprie pro accessu, vel nisu accedendi sumitur; sic enim aiunt, cum de attractione terræ in lunam, seu de gravitate lunæ in terram differunt: singula puncta lunæ gravitant in singula puncta terræ; hinc si concipitur tota massa terræ compenetrata in unicum punctum, vis, qua urgetur quodvis punctum lunæ in quodvis punctum terræ, erit æqualis summæ virium æqualium, quibus tendit in singula puncta terræ, adeoque eiusmodi vis proportionalis est numero punctorum massæ, in quam tenditur; ut si (F. III. T. VI.) punctum L repræsentet lunam, vel potius lunæ punctum quoddam, quod in singula puncta terræ a, b, c gravitet vi æquali ut 1. Si hæc tria puncta concipiantur in uno puncto T compenetrata, vis, qua punctum L in singula gravitat, erit ut 3, nempe ut numerus punctorum massæ, in quam tenditur.

Qualem ex his conceptibus arripias, mihi quidem perinde est; nec enim otium, nec voluntas est de intima natura elementorum disceptandi præsertim phænomenis gravitatis nondum plane expositis. Tractationibus quidem physicis prima concipiendi ratio haud parum videtur adcommodatior; distinctas enim vires concipimus eas, ex quibus curvilineus circa centrum motus componitur; nec facile captu est, quomodo idem punctum vi naturæ suæ simul per tangentem, simul dispari directione versus centrum abire nitatur; contra cum vi inertiæ, qua nititur pergere uniformiter in directum, vis, qua adversum alia puncta agit eodem tempore, haud ægre coniungi posse intelligitur.

S.

§. CCCXIV.

Lex I. Attractionis. *Attractio Corporum seu materiæ est universalis, mutua, omnibusque corporibus, & corporum elementis communis.* Ostend. 1. Partes planetæ cuiusdam secundarii, ceu satellitis Iovis, aut Saturni, gravitant in suam sphæram, quam constituunt; haud secus ac lapides gravitant in sphæram telluris; secus enim non intelligitur, quomodo in sua sphæra perpetuo maneant, aut figuram globosam conservent; at eædem partes, quæ in planetam suum primarium gravitant, simul gravitant in solem; est enim hæc proprietas absoluta, quæ non ex combinatione materiæ oritur, sed ipsis elementis competit. Similiter de Luna disserendum, quæ gravitat in terram, sive attrahitur a terra, cum vicissim terra gravitet in lunam, uti ex maris æstu comprobabimus: uti vero motus planetarum circa solem eorundem in solem gravitatem aperte prodit: ita perturbationes motuum cælestium, de quibus proxime agemus, planetas non modo in solem, sed in se mutuo gravitare ostendunt; atque eiusmodi perturbationes, quarum in quovis alio systemate ratio reddi nulla potest, cum lege gravitatis mutuæ & universalis adeo consentiunt, ut, quod spectatis caussis generalibus, ac principiis physicis turbatio motus videretur, id anomaliis ex attractione mutua necessario provenientibus in primis serviat explicandis. Denique cum hæc mutua gravitas in tam multis corporibus tam longe, lateque a se invicem disiunctis obtineat, analogiæ naturæ & rectæ philosophandi methodo maxime consentaneum est, ut ea pro generali materiæ proprietate assumatur; unde per sese liquet, eandem esse mutuam.

Vis igitur gravitatis, quam homines imperiti solius terræ propriam iudicant, ad omnia planetarii saltem systematis corpora transferenda est; nec ea instar nisus accedendi ad punctum terræ imaginarium, nempe centrum, concipi debet, sed instar nisus partium singularum accedendi ad se mutuo; etsi dein demonstrabimus, punctum in sphæram mole diffusam, eiusque singulas partes non aliter

Digitized by Google

ter gravitare, ac si omnes sphæræ partes in centro essent collectæ.

§. CCCXV.

Lex II. *Vis acceleratrix gravitatis paribus distantiis est proportionalis massæ attrahenti, seu massæ, in quam gravitatur.* Utrovis enim ex binis conceptibus supra in sectione explicatis utare, necessario ad hanc legem pervenies; quam maxime consensus phœnomenorum & harmonia totius systematis solaris confirmat; planetæ enim, & cometæ magis in solem, quam alios planetas gravitant, propterea quod ob maiorem massam maiore vi attrahendi sol polleat. Indidem ex hac lege pendent variationes gravitatis terrestris in diversis terræ locis. Quapropter ut motus cælestium corporum, qui gravitate eorundem in solem peraguntur, recte explicari possint, massa solis in primis ad calculum revocanda est; ac si perturbationes motuum incidunt, pariter massa corporis motum perturbantis expendenda est. Etsi enim attractio & gravitatio sit universalis, ac mutua; tamen illuc potissimum tendent corpora, quorsum a massa quapiam maiore, & cæteris prævalente trahuntur. Plumula iuxta turrim decidens non adhærescit muro, etsi a muro attrahatur, sed in terram, nisi quid obstat, labitur, quia massa telluris, a qua trahitur, si cum muro comparetur, sine comparatione maior est; intellecta igitur hac lege, pronum est multa solvere, quæ Newtonianis obiiciuntur a nonnullis seu ex imperitia, seu cavillandi gratia. Est aliud prætera consectarium hoc loco adnectendum; Cum *singula puncta* corporis terrestris ceu lapidis, a *tota massa telluris* attrahantur, vis acceleratrix, paribus distantiis, in singulis punctis, proinde etiam in omnibus corporibus eadem est; hinc ubi medium nullum resistit, quævis corpora æquali celeritate, & ex æquali altitudine æquali tempore decidunt; nam celeritas pendet ex attractionis quantitate; hæc vero in æquali (absolute, vel quam proxime) distantia ab eadem massa attrahente æqualis est; consequenter sollicitatio ad motum, seu vis acceleratrix in singulis punctis est eadem, & pari celeritate movebitur unica auri particula, qua centum particu-

la-

Digitized by Google

larum millia; & leviſſima pluma non minore celeritate, quam nummus aureus; uti noviſſimum in vacuo Boyleano experimentum oſtendit (§. XVIII.)

§. CCCXVI.

Lex III. *Gravitatis vis motrix eſt ut vis acceleratrix ducta in quantitatem materiæ, ſeu in maſſam, quæ in aliquod centrum tendit.* Nam ſingula puncta maſſam gravem conſtituentia trahuntur æqualiter; igitur gravitas totius maſſæ, quæ *pondus* dicitur, æqualis eſt ſummæ gravitatis minimorum punctorum, hoc eſt, vi acceleratrici, quæ in ſingulis punctis eadem eſt, ductæ in numerum punctorum ſeu in maſſam, quæ attrahitur, vel in centrum tendit. Si maſſa attrahens, ac proinde etiam vis acceleratrix conſtans, uti proxime fit reſpectu corporum terreſtrium in eodem terræ tractu, corporum pondera ſunt proportionalia quantitati materiæ, ſeu denſitati, quam habent. Cum vero non ſciamus ullius corporis partium minimarum numerum, nec ullum reperiatur abſolute denſum, ſeu poris, & vacuo carens, quocum cætera ſub eodem volumine comparari poſſint; hinc nequit abſolute adfirmari, quantum materiæ in ullo corpore contineatur, ſed duntaxat *reſpective*, id eſt, comparando inter ſe bina eiusdem magnitudinis, & voluminis. Atque hinc orta eſt diviſio in corpora ſpecifice graviora, aut leviora, quatenus, ſi ſub eodem volumine inter ſe comparentur, alterum altero gravius eſt, ſeu præponderat; de qua re tractavimus alio iam loco.

§. CCCXVII.

Lex IV. *Vis acceleratrix gravitatis corporum eſt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro maſſæ attrahentis.* Satis hanc legem demonſtravimus toto capite præcedente.

Sumſimus adhuc, punctum quoddam aut corpus ab alio attrahi ita, ac ſi & maſſæ attrahentis, & attractæ puncta omnia in centris eſſent collecta, ſingulæ maſſæ in ſingulis. Nec id aliter reipſa ſe habet. At enim hoc peculiari demonſtratione eget; ſi enim maſſæ diffuſæ in mo-

lem maiorem sumantur, qualis est Solis, ac Jovis massa, imo omnium corporum totalium, puncta propiora trahunt, & trahuntur magis, quam si in centro massæ sphæricæ essent posita, & remotiora minus; quæ sunt ad latera, trahunt oblique, ut proin earum directio ad mediam sit reducenda; Nec sufficit dicere, si omnia sphæræ puncta in centrum confluant, tantundem augeri propiorum punctorum distantiam, quantum distantia remotiorum inde minuitur; valet hæc quidem demonstratio ex theoria centri gravitatis desumta, si vires sint in ratione simplice distantiarum; at siquis idem ad hypothesin virium in ratione inversa duplicata distantiarum agentium transferre velit, sine dubio in paralogismum imprudens incidet. Quapropter alia methodus exhibenda est computandi vim, qua massa molem occupans tendit in massam itidem diffusam per molem aliquam; ut colligatur summa virium inæqualium ex singulis punctis massæ utriusque reductarum ad directionem eandem. Etsi autem hæc demonstratio maioris esse moliminis videatur; tamen ea prætermitti non debet, cum primarium quendam articulum theoriæ Newtonianæ contineat.

§. CCCXVIII.

Propositio. *Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione a punctis: dico, quod corpusculum vel punctum extra sphæricam superficiem constitutum attrahatur ad centrum sphæræ vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.* Sint (F. VII, & VIII. T VI.) A H K B, a h k b æquales duæ superficies sphæricæ, centris S, s, diametris A B, a b descriptæ, & P, p puncta seu corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a punctis lineæ P H K, p h k; tum aliæ prioribus infinite propinquæ P I L, p i l, auferentes a circulis maximis A H B, a h b æquales arcus H K, h k, & I L, i l; & ad eas demittantur perpendicula S D, s d; S E, s e; I R, i r, quorum S D, s d secent P L, p l in F & f. Demittantur etiam ad diametros perpendicula I Q, i q. Evanescentibus angulis D P E, d p e coincident puncta F, & E, f & e, eritque P E = P F; p e = p f; præterea est D F = d f, cum

sint

sint differentiæ æqualium D S & s d, S E, & se. His ita conſtitutis

1. ob R I, D F, r i, d f parallelas, erit

$$PI : PF = RI : DF$$
$$pf : pi = df \text{ vel } DF : ri$$

compoſitis rationibus $PI \times pf : PF \times pi = RI : ri = IH : ih$; nam triangula R H I, r h i ſimilia ſunt ob angulos ad R & r ex conſtr. rectos, & æquales angulos ad H, & h per chordas æquales H K, & h k & arcus minimos I H, i h, qui pro tangentibus in H & h uſurpari poſſunt, interceptos; hinc erit R I ad r i, ut arcus I H ad arcum i h.

2. Triangula P Q I, P E S ob angulos ad Q & E rectos, & in P communem ſimilia ſunt; pariter triangula p q i, p e s ſimilia.

igitur $PI : PS = IQ : SE$
$ps : pi = se \text{ vel } SE : iq$

conſequenter $PI \times ps : PS \times pi = IQ : iq$

compoſita hac & ſuperiore ratione fiet

$$PI^2 \times pf \times ps : pi^2 \times PF \times PS = IH \times IQ : ih \times iq.$$

3. Factum $IH \times IQ$ exhibet ſuperficiem circularem, quam arcus I H rotatione ſemicirculi A K B circa diametrum A B deſcribit; hac enim rotatione arcus I H generat annulum circularem; cuius ſuperficies, cum ſit æqualis ſuperficiei cylindri infinite parvæ altitudinis, erit ut latus I H ductum in peripheriam, per quam rotatur; eſt autem ea peripheria ut radius I Q; ſimiliter de facto $ih \times iq$ differendum.

4. Vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt puncta P, & p, ſunt ut ipſæ ſuperficies directe, & ut quadrata diſtantiarum inverſe; rationem ſuperficierum exhibet prima ratio ultimæ analogiæ n. 2.

igitur vires ſunt ut $\dfrac{PI^2 \times pf \times ps}{PI^2} : \dfrac{pi^2 \times PF \times PS}{pi^2}$

$= pf \times ps : PF \times PS.$

 5. Quo-

5. Quoniam hæ vires ad obliquas superficierum partes concipiuntur resolutæ, nempe vis P I in P Q & I Q vis p i in p q & i q; vires autem I Q, & i q viribus oppositis T Q, & t q extinguuntur; Hinc ut inveniantur vires P Q, & p q in centra tendentes, fiat ut P I ad P Q, ita vis directione P I, quæ est ut $pf \times ps$ ad quartum terminum, seu ad vim directione P Q; sive quoniam est P I; P Q = PS: P E = P F, fiat

$$PS : PF = pf \times ps : \frac{PF \times pf \times ps}{PS}$$

ac similiter $ps : pf = PF \times PS : \dfrac{PF \times PS \times pf}{ps}$

Erunt igitur vires in centra tendentes, ut $\dfrac{PF \times pf \times ps}{PS} : \dfrac{PF \times PS \times pf}{ps} = \dfrac{ps}{PS} : \dfrac{PS}{ps} =$ $ps^2 : PS^2$.

Simili ratione vires omnium superficierum circularium, in quas utraque superficies sphærica distingui potest, ac proinde totarum superficierum in puncta P & p exercitæ semper sunt reciproce ut quadratum distantiæ a centro. Quamobrem sphæra, quæ ex infinitis eiusmodi superficiebus coalescit, si constat materia homogenea, quæ in eadem a centro distantia eandem habeat densitatem, utcunque in diversis distantiis diversa sit densitas, quodvis punctum extra ipsam non aliter attrahet, ac si omnis sphæræ materia esset collecta, & compenetrata in centro eiusdem.

§. CCCXIX.

Corollarium I. Si binæ ponantur sphæræ, quarum puncta se mutuo trahant in ratione reciproca distantiarum, ac in pari a centris distantia circumquaque habeant singulæ eandem densitatem quamvis; etiam altera ab altera ita trahetur, ac si omnis materia in suo utriusque centro compenetrata coiret; quamobrem

Digitized by Google

rem in hac gravitatis lege globi integri ingentes eandem servant legem, quam particulae minimae sive singulae, nimirum itidem reciprocam duplicatam distantiarum, quod non item in quavis alia lege contingeret. Hinc Maupertuisius censet, hanc perfectissimam esse legem, & ab auctore naturae debuisse aliis anteponi. At enim contra eiusmodi necessitatem, quam Deo adfingunt, creandi ea, quae in se ipsis spectata perfectiora nobis videntur, disputavimus in Theologia naturali. Dein cur ista censeatur perfectissima lex, in qua globi eandem habent legem virium, quam puncta, quaeque in globis duntaxat, non item in reliquis figuris habet locum? praesertim cum ea non nisi in globis continuis perfectis, & in pari a centro distantia homogeneis obtineatur; quales globi omnium consensu nulli sunt in rerum natura.

§. CCCXX.

Corollarium II. Si bini sint globi *homogenei*; quorum proinde massae M & m sunt ut volumina, sive in ratione triplicata radiorum D & d, ac in eorum superficiebus collocentur bina puncta; erunt vires V, & u, quibus in globos gravitant, ut radii eorundem globorum. Si enim utriusque materia coiret in centro, remanentibus punctis ubi prius erat superficies, erit $V : u = \frac{M}{D^2} : \frac{m}{d^2} = \frac{D^3}{D^2} : \frac{d^3}{d^2} = D : d$. Idem ad omnes figuras similes solidas extendi potest, in quarum superficie, si capiantur bina puncta homologa, & in iis collocentur bina puncta attracta hac lege virium $V = \frac{1}{D^2}$, erunt vires in singula eiusmodi solida, ut latera eorundem. Nam si utrumque solidum dividatur in eundem numerum particularum perquam exiguarum similium & similiter positarum, erit in singulis massa, ut sunt tota solida, sive in ratione triplicata laterum homologorum, distantia autem binorum punctorum erit in ratione simplici eorundem laterum, ut ex similitudine solidorum perspicuum est; Quapropter ratio compoſita ex directa ſimplici maſſarum, & reciproca duplicata diſtantiarum, erit æqualis rationi compoſitæ ex triplicata directa, & duplicata reciproca laterum homologorum, hoc eſt, erit ratio ſimplex eorundem laterum. Quapropter ſi fiant duæ ſphæroides ellipticæ ex converſione circa proprios axes homologos binarum ellipſium ſimilium, & collocentur puncta gravitantia in punctis homologis ſuperficierum earundem ſphæroidum, erunt vires compoſitæ, quibus ad medium tendunt, in ratione directa ſimplici diſtantiarum a centro, quia eæ ſphæroides ſunt ſolida ſimilia, proinde maſſæ earundem in ratione triplicata laterum homologorum, & diſtantiæ punctorum homologorum a centro ſunt latera homologa.

§. CCCXXI.

Corollarium III. Dictum eſt ſupra in propoſitione, quod, ſi ex altera parte Diametrorum A B, a b capiantur arcus æquales A T = A I, a t = a i, & arcus T u = I H, t u = i h, vires obliquæ & æquales I Q, & T Q, i q, & t q ſibi mutuo opponantur, nullumque motum in corpuſculo vel puncto p producant; Similis virium oppoſitarum & æqualium extinctio contingit, ſi punctum Z cuius vires ad ſingula ſuperficiei ſphæricæ puncta decreſcunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab iisdem, intra ſuperficiem in Z conſtituitur. Nam agantur per Z ad ſuperficiem ſphæricam lineæ duæ c n, o m arcus quam minimos c o, m n, intercipientes; erunt triangula c Z o, m Z n ſimilia; Quia præter angulos ad vertices oppoſitos etiam anguli o c n, n m o eidem arcui o n inſiſtentes æquantur; arcus enim minimi o c, n m inſtar chordarum ſunt; hinc erit c o : m n = o Z : Z n : h. e. arcus c o, m n erunt diſtantiis proportionales; & hinc ſi ad ſuperficiem ſphæricam per punctum Z ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quam minimos c o, m n terminatæ, rectæ illæ figuras ſolidas (pyramides vel conos) ſimiles formabunt; vires autem puncti Z erunt ut baſes earundem directe, & ut quadrata diſtantiarum reciproce, hoc eſt, quia baſes ſunt

in

Digitized by Google

in ratione duplicata laterum co, mn, vires erunt ut $\frac{co^2}{oZ^2}$ ad $\frac{mn^2}{Zn^2}$ est autem $oZ : Zn = co : mn$, proindeque $oZ^2 : Zn^2 = co^2 : mn^2$ consequenter vires erunt ut $\frac{co^2}{co^2}$ ad $\frac{mn^2}{mn^2}$; Quæ est ratio æqualitatis; & simili argumento attractiones omnes per totam superficiem sphæricam a contrariis actionibus destruentur; proinde punctum vel particula Z nullam in partem his attractationibus impelli potest.

CAPUT IV.

De Motu planetarum expositis legibus in se gravitantium.

Ut motus cœlestium corporum, totaque harmonia systematis planetarii recte explicetur, in primis massæ planetarum ad calculum revocandæ sunt, tum quæ generatim de proiectione massarum in se gravitantium demonstrari solent, ad hunc locum, quorsum unice pertinent, sunt adplicanda.

§. CCCXXII.

Lemma I. *Massæ corporum, circa quæ tanquam centrum virium alia corpora volvuntur, sunt in ratione triplicata distantiarum mediarum corporum gyrantium, & reciproca duplicata temporum periodicorum.* Sit enim massa solis, circa quem planetæ primarii volvuntur M, distantia media cuiusdam planetæ D, tempus periodicum T; erit ex legibus attractationis vis gravitatis planetæ in solem seu $V = \frac{M}{D^2}$; & quoniam in quavis orbita elliptica planetarum bina sunt puncta M & N

(F. II. T. VI.) in quibus celeritas ac vis planetæ perinde se habet, ac si radio $SM = R$ eodem, quo ellipsin, tempore verreret circulum, adhiberi ex theoria virium in circulo potest formula $V = \frac{R}{T^2}$ (§. CCLXXII.) erit igitur $\frac{M}{D^2} = \frac{R}{T^2}$, & $M = \frac{RD^2}{T^2}$; cumque radius R & distantia media perparum differant, habebitur $M = \frac{D^3}{T^2}$. Hac igitur methodo eorum corporum, circa quæ alia instar satellitum convertuntur, massas habebimus; inventæque sunt sequentes earum rationes:

	Solis	Jovis	Saturni	Terræ
Massæ	173314	159, 93	32, 87	0, 515.
sive	1	$\frac{1}{1084}$	$\frac{1}{5272}$	$\frac{1}{336532}$

Cæteri planetæ quoad massam in hunc modum circiter æstimari solent, ut Mars sumatur $\frac{1}{8}$ *telluris, Venus eidem æqualis, Mercurius* $\frac{1}{8}$. *Si massæ Jovis, Saturni, ac terræ in summam colligantur, erit ea ad massam solis in minore ratione, quam*, 194 *ad* 173314, *hoc est, in minore ratione, quam* 1 *ad* 893. *Quodsi reliquorum planetarum, Martis, Veneris, Mercurii massæ ponuntur terræ æquales, summa omnium sex massarum ad massam solis minorem rationem habet, quam* 1 *ad* 889.

§. CCCXXIII.

Lemma II. *Si binæ massæ mutuis viribus in se agentes secundum expositam gravitatis legem ad se accedant, vires, quibus utraque movetur, æquales sunt; centrum vero commune gravitatis quiescit, id est, in eodem puncto rectarum centra massarum coniungentium manet.* Sint enim (F. IV. T. VI.) binarum massarum A & B vires mutuæ V & u; distantia communis D; erit vis acceleratrix massæ A directe ut massa B, in quam tenditur & reciproce ut quadratum distantiæ; vis acceleratrix mas-

Digitized by Google

fæ B ut maſſa A, in quam a B tenditur, & reciproce ut quadratum diſtantiæ; vis autem motrix habebitur, ſi per maſſam, quæ in aliam tendit, multiplicetur vis acceleratrix; erit igitur $V : u = \frac{A \times B}{D^2} : \frac{A \times B}{D^2}$; quæ eſt ratio æqualitatis. Si folæ vires acceleratrices binarum maſſarum in ſe mutuo tendentium ſpectentur, eæ ſunt reciproce ut ipſæ maſſæ. Ac ſi concipiatur corpuſculum a tellure noſtra ſeparatum, erit eius gravitas acceleratrix in terram ad mutuam gravitatem acceleratricem terræ in corpuſculum, uti eſt ipſa terra ad corpuſculum illud. Si iam V & u deſignent ſolas vires acceleratrices, quæ in lapſu vel mutuo acceſſu corporum maxime ſpectantur, erit $V : u = B : A$ ac ſi gravitatis centrum earundem maſſarum ſit in C; unde deſumtæ diſtantiæ cum maſſis reciprocant, erit $V : u = B : A = AC : CB$, hoc eſt vires mutuæ ſunt, uti diſtantiæ a centro gravitatis, & ſpatiola AE, Be, quibus ad ſeſe accedunt intra æquale tempuſculum, uti vires acceleratrices, ſive itidem ut diſtantiæ a centro gravitatis; quapropter etiam ſpatia reſidua EC, Ce erunt ut diſtantiæ AC, CB, ſive in ratione maſſarum reciproca; hinc commune centrum gravitatis in eodem puncto C quieſcit.

§. CCCXXIV.

Corollarium. Hoc igitur modo centrum gravitatis inter maſſas mutuis viribus in ſe tendentes communi methodo reperiri poteſt, quia & diſtantiæ a centro gravitatis, & celeritates elementares ſunt in ratione maſſarum reciproca; Ac ſi omnes planetæ collocentur ex una parte in directum, denturque eorum maſſæ, ac diſtantiæ a ſole, centrum commune gravitatis facile reperitur (§. CXXXI.) Aſſumatur enim planum per centrum ſolis tranſiens, ut huius diſtantia, & factum ex maſſa ſolis in diſtantiam ab aſſumto plano ſit = O. Tum diſtantiæ maximæ planetarum a ſole, quæ dantur in ſemidiametris terræ, ducantur in maſſas eorundem; ſumma factorum dividatur per ſummam maſſarum; ac obveniet centrum commune gravitatis hinc inter planetas

tas omnes ex una parte, inde inter ſolem. Ac ſi Martis, Veneris, ac Mercurii maſſæ ponantur terreſtri pares, reliquorum maſſæ, uti ſupra indicavimus; diſtantiæ vero in ſemidiametris terræ pro Mercurio = 10272. pro Venere = 16029. pro terra 22370. pro Marte = 366301 pro Jove = 119900. pro Saturno = 122870; erit ſumma factorum ex ſingulis maſſis in ſuas a centro ſolis diſtantias maximas, proxime = 23258273. Summa autem maſſarum omnium proxime = 173509. inde facta diviſione prioris ſummæ per poſteriorem diſtantia centri gravitatis a centro ſolis reperitur = 134. 04'; ac ſi radius ſolis 50 contineat ſemidiametros terræ, centrum gravitatis a ſuperficie ſolis aberit 84, 04 ſemidiametris terræ, hoc eſt proxime $\frac{5}{6}$ partibus diametri ſolaris.

§. CCCXXV.

Lemma III. *Si duæ maſſæ viribus mutuis in ſe tendentes proiiciantur in plagas oppoſitas A F, B f directionibus parallelis & velocitatibus maſſarum reciprocis, commune centrum gravitatis quieſcit.* F. IV. T. VI. Nam cum ex hyp. ſit AF: Bf = B: A = AC: CB; & AF ad B f parallela, triangula AFC, BCf ſunt ſimilia, & FCf una linea recta: porro & FC: Cf = AC: CB; præterea AE: AC = Be: BC (Lemm. præc.) ſeu completis parallelogrammis FD: fd = AC: BC = FC: Cf; hinc & triangula FDC, fCd ſimilia ſunt, & puncta D, C, d in eadem recta. Atqui maſſa A per vires AF, AE coniunctas erit in fine motus in D, & maſſa B in d; itaque centrum gravitatis manebit in C; cum ſit DC: Cd = FC: Cf = AC: CB = B: A.

§. CCCXXVI.

Corollaria. I. Areolæ ACD, BCd ob angulos ad C æquales, & latera proportionalia ſunt ſimiles; id quod de omnibus areolis omnibus tempuſculis confectis ſimiliter patet. Proin curvæ, quas maſſæ hiſce viribus deſcribunt, conſtant ex baſibus minimorum triangulorum ſimilium, & ſimiliter poſitorum; conſequenter & ipſæ ſimiles ſunt. Quamobrem in dicta hypotheſi *maſſæ*

circa

Digitized by Google

circa centrum commune gravitatis immotum curvas similes eodem tempore describunt. II. Cum sit AC : CB = DC : dC ; erit etiam AC + CB (AB) DC + Cd (Dd) = AC : DC , & $AB^2 : Dd^2 = AC^2 : DC^2$. Quapropter *si vires, quibus eiusmodi corpora in se mutuo agunt, etiam mutatis distantiis sint in ratione reciproca duplicata distantiarum a se, $Dd^2 : AB^2$; erunt quoque in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro gravitatis $DC^2 : AC^2$.* III. *Quare si duo corpora proiiciantur directionibus parallelis, & oppositis, celeritatibus massarum reciprocis, quæque minores sint, quam quæ descensu in commune centrum gravitatis C acquiri possint, & si præterea ea corpora viribus mutuis agentibus in ratione reciproca distantiarum a se (vel quod perinde est, a centro gravitatis) sollicitentur, describent circa centrum gravitatis ellipses similes.* Removeamus animo & cogitatione ex systemate planetario omnes reliquos planetas, soli telluri, ac lunæ retentæ istiusmodi vires mutuas dicta lege agentes (quæ ipsis revera competunt) ac vim proiectionis ea celeritate, ac directione, quam supra posuimus, tribuamus; ac perspicuum erit, quomodo terra ceu planeta primarius cum suo satellite motum in ellipsi peragat, ac in spatiis cælestibus omni impedimento sensibili vacuis semper continuare debeat. Similiter de quovis alio planeta primario cum uno pluribusve satellitibus differendum est. Ut porro intelligatur, quomodo eiusmodi corporum circa centrum commune gravitatis suas orbitas describentium systemata moveantur circa tertiam quandam massam, ceu terra cum suo satellite, seu luna, Jupiter cum lunis quatuor, Saturnus cum quinque lunulis reipsa movetur circa solem, præmitti oportet

§. CCCXXVII.

Lemma IV. *Si binæ massæ mutuis viribus in se agentes dicta lege, proiiciantur velocitatibus, quæ nec congruant cum directione virium, nec sint parallelæ & æquales ad easdem partes, eæ simul describent curvas similes, simul coniunctim una cum communi centro gravitatis progredientur via recta æquabiliter.* Dem. Fiat proiectio

(F. V.

Digitized by Google

(F. V. T. VI.) secundum A F, B f; iungantur massarum centra in iis positionibus, quas vi proiectili obtinerent initio & fine primi tempusculi per rectas A B, F f. Secentur eædem in C & H in ratione reciproca massarum; per C ducatur recta D d parallela ad F f; in qua sumantur partes CD, C d æquales segmentis H F, & H f, ac ductis F D, D A, item f d, B d resolventur vires A F, B f in duas partes, quarum binæ A G, B g parallelæ, & ad easdem partes æquales sunt, nam ex Constr. F f, & D d sunt æquales, & parallelæ; igitur rectæ F D, f d, quæ easdem iungunt, pariter æquales, & parallelæ erunt, consequenter completis parallelogrammis etiam rectæ A G, B g. His præmissis patet, vim A F, B f utrinque resolvi *primo* in vires A D, B d, per quas proiectæ massæ circa commune centrum gravitatis curvas similes describent, ut ante explicatum est; sunt enim hæ vires ad partes contrarias, & inter se parallelæ, ac massarum reciprocæ; quia triangula A C D, B C d similia sunt, cum rectæ C D & C d, rectis H F & H f æquales sint massarum reciprocæ, quemadmodum rectæ A C, C B. *Secundo* data vis A F, B f resolvetur in vires A G, B g; quæ, cum sint æquales, & parallelæ ad easdem partes, nihil turbant comparativos massarum motus, sed totum systema una cum centro gravitatis via recta C H provehere debent æquabiliter, uti si corpora navi imposita certos inter se motus habeant, simul omnia coniunctim, sive totum eorum systema, totaque navis via recta provehi potest.

§. CCCXXVIII.

Corollarium. Ponatur nunc præter massas A & B tertia quædam S, eaque admodum vasta & ingens respectu A & B, & ab his ita remota, ut distantia reliquarum A B ad illius distantiam comparata perquam exigua sit. R commune sit centrum gravitatis omnium trium massarum; ac habeat massa S proiectionem directione S h contraria & parallela directioni C H, ad quam sit, ut A + B, ad S; ut adeo tanto maior sit in massis A & B celeritas proiectionis, quam in S, quanto massa S maior est summa massarum A + B. Gyrabit igitur

ex

Digitized by Google

ex iisdem principiis circa R commune centrum gravitatis hinc massa S, inde systema A + B, quod salvo motu comparativo circa C, eodem tempore circa R ita convertetur, ut iam massa A, iam massa B versus S iaceat; Atque hic ipse est casus, qui in rerum natura obtinet, dum partialia systemata ex planeta quodam primario cum secundario uno vel pluribus circa solem volvuntur. Sit enim S sol, B terra, A luna. Fiet omnino, ut eodem tempore, quo terra & luna circa commune centrum gravitatis C volvuntur, simul utraque, sive totum systema earundem circa R sive centrum gravitatis ipsis simul, & soli commune transferatur; quia terra & luna, ipsumque earum centrum C adeo vicina inter se sunt respectu distantiæ C S, ut totum systema earundem pro unico puncto haberi queat; atque idcirco, si debita ponatur celeritas proiectionis, describet hinc S, inde punctum illud, sive earum centrum gravitatis C circa R ellipsin. Hoc quidem modo non tam terra, quam commune centrum gravitatis C terram inter & lunam orbitam suam circa solem describet, & in ecliptica movebitur; is tamen motus telluri tribuitur, a cuius centro haud adeo multum abest centrum gravitatis C. Si enim massa terræ ad massam lunæ ponatur ut 70 ad 1, & distantia lunæ a terra = 60 semidiametris terræ, reperietur methodo §. CCCXXIV, & §. CXXXI. indicata distantia centri gravitatis a centro telluris = 0, 845 semid. ut adeo illud intra superficiem terræ adhuc cadat.

§. CCCXXIX.

Propositio I. *Motus periodicus planetarum circa solem componitur ex vi centripeta agente in ratione inversa duplicata distantiarum a centro solis, & vi proiectili seu tangentiali, qua in quovis puncto orbitæ secundum rectas tangentes abire nituntur.* Dem.

I. Planetis omnibus ac cometis vis gravitatis in solem, ac versus se mutuo dicta lege agentis, uti supra indubitato ostensum est, competit; Si ea vis sola iisdem inesset, ad se mutuo accederent celeritatibus massarum reciprocis, ac in centro communi gravitatis coniungeiungerentur; nec ea haberemus motuum phœnomena, quæ obſervantur re ipſa. Sol ipſe, ſi omni vi proiectionis careret, uti copernicani ponebant, ita ad planetas accederet, ut ſtatus centri gravitatis communis identidem mutaretur, donec aucta attractione ſolis ob imminutam eius diſtantiam totius ſyſtematis harmonia interiret. Nunc vero ſi cæteris planetis tantiſper ſepoſitis telluri ac ſoli vim proiectionis ineſſe concipiamus, ambo circa commune centrum gravitatis curvas deſcribent, quæ pro varia directione & virium coniugatione etiam in ſe ipſas redire poſſunt. Quoniam vero ob maſſæ ſolaris exceſſum commune gravitatis centrum a centro ſolis non multum diſtat, eadem erunt phœnomena, ac ſi circa ſolem iudicio ſenſuum quieſcentem terra moveretur, ſimiliter de reliquis planetis, cometisque differendum eſt. Si enim terra cum ſua luna, Iupiter & Saturnus cum ſuis ſatellitibus proiiciantur certa lege, ſimul circa commune centrum gravitatis primarium inter & ſecundarium ſuas orbitas deſcribent, ſimul totum ſyſtema vim proiectionis, qua eorum centrum æquabiliter progrediatur, conſervat; ſi igitur ſol hoc ſyſtema attrahat, fieri debet, ut id circa ſolem moveatur, ita ut is motus, qui reipſa centro gravitatis competit, ipſi planetæ primario tribuatur, quia centrum gravitatis in ſyſtemate partiali a centro planetæ primarii non multum diſtat.

II. Quemadmodum ex motu curvilineo circa centrum, quo deſcribuntur areæ temporibus proportionales, recte infertur vis gravitatis in centrum; ita non poteſt non vis tangentialis ex eodem pariter intelligi. Nam (F. III. T. V.) motus per EH, ſi in E agit vis EF, haberi non poteſt, niſi in E pariter ſit vis tangentialis per EG.

III. Conſtat corpora in ſuperficie terræ proiecta in curva deferri, quæ ad parabolam accedit, cum vi duplici urgeantur, altera proiectionis, altera gravitatis; cur planetæ ellipſin potius, quam aliam curvam deſcribant, id non niſi ex ratione, & directione virium componentium pendet; ac oſtendimus ſupra, a gravi terreſtri, ſi debita celeritate proiiceretur, neque reſiſtenſtentiam atmoſphæræ ſentiret, circulum circa terram deſcribi poſſe, ac debere; ſimiliter igitur de planetis circa ſolem revolutis cogitandum eſt, cum effectuum ſimilium, atque eiusdem generis ſimiles, atque eædem cauſſæ ſint ſtatuendæ.

Ex his quidem cauſſa phyſica periodici planetarum motus, quem in ſua orbita quisque peragunt, penitus perſpicitur; At iidem præterea motu vertiginis adficiuntur, id eſt, convertuntur æquabiliter, certaque ſinguli celeritate circa axes ſuos; quod quidem in terra, venere, luna, marte, iove atque etiam ſole ex macularum, quæ in eorum ſuperficie notantur, motu colligitur; Saturno, ac Mercurio, in quibus ob nimiam aut diſtantiam, aut viciniam ſolis is motus obſervari nequit, ob analogiam iure tribuitur. Ut igitur cauſſa & natura rotationis, ſeu revolutionis diurnæ circa axem intelligatur, diſpiciendum eſt, quæ impreſſio in ea corpora totalia cum primo creata, atque ad debitas a ſole diſtantias collocata ſunt, fieri debuerit, ut ſimul motu rotationis, ſimul progreſſivo gauderent; qua quidem in re a vi centripeta ſeu gravitate eorum in ſolem primo abſtrahamus animum, ſola relicta vi inertiæ, poſtea gravitatis quoque rationem habituri.

§. CCCXXX.

Propoſitio II. *Siquod punctum globi A* (F.VI.T.VI.) *recipiat quamvis impreſſionem directione K A per centrum non tranſeunte; duplex in globo motus uniformis conſequetur, alter progreſſionis in recta B C b ad directionem K A k parallela; alter rotationis circa axem perpendicularem ad planum circuli maximi D K B c b, quod quidem planum per directionem K A determinatur.* Dem. Quoniam omnes globi particulæ inter ſe cohærent, patet, impreſſionem in punctum A factam in omnes propagari, & omnes directione ad K k parallela impelli debere. Concipiatur iam in plano D K B c b circuli maximi diameter D c ad chordam K k & diametrum B b normalis, & intelligatur ſegmentum totum K D k in centro gravitatis H, uti & ſegmentum K c b k in centro gravitatis G collectum. Habebitur vectis H A G in cu-

C c ius

ius puncto A impressio facta est. Manifestum est, eo maiorem celeritatem massæ H, quam massæ G communicari, quo & illa hac minor est, & quo minus illa, quam hæc a centro percussionis A distat. Itaque tempusculo infinitesimo describet massa H maius spatiolum H h, & massa G minus G g; quo finito diameter D C c erit translata in E h g c, & globus totus D B c b erit in E I d. Unde patet, & diametrum & globum habuisse motum rotationis circa punctum C, ita ut angulus D c E velocitatem illius angularem exprimat. Secus enim diameter E o c maneret ad D C c parallela: centrum globi C abiit in o via C o ad K k parallela. Sequentibus autem tempusculis ob vim inertiæ, si nulla alia accedat vis, idem motus centri globi C permanebit, & massa H continuo prævertens alteram G, diametrum D c cum circulo maximo D K B c b, ac integro globo circa centrum C, & axem ad dictum circulum maximum normalem circumagere perget.

§. CCCXXXI.

Corollarium I. *Quanto magis directio K A, secundum quam fit impressio, a centro globi distat, tanto velocior erit motus rotationis*; nam eo minor erit massa H, quam G, & eo minus quoque massa H a puncto percussionis A, quam G distabit, & proinde eo maior erit in massis H, & G differentia celeritatum.

Joannes Bernoullius Tom. IV. operum inito calculo reperit, ad celeritatem revolutionis diurnæ in tellure nostra obtinendam, distantiam, quam centrum percussionis A habere debuit a telluris centro, esse $\frac{1}{150}$ semidiametri eiusdem; in Marte eandem distantiam esse $\frac{1}{418}$ semidiametri huius planetæ; in Iove $\frac{7}{19}$ semidiametri eiusdem.

§. CCCXXXII.

Corollarium II. Si directio impressionis transeat per centrum, aut si omnes globi moleculæ secundum eandem directionem æqualibus viribus impellantur; manifestum est, nullum rotationis motum sed progressionis dunta-

Digitized by Google

taxat, quo centrum globi uniformiter moveatur, consequi; eo ipso, quod vis tota æqualiter distribuatur per totum vectem, & proin per utrumque hæmisphærium, ut adeo neutrum alterum prævenire possit. Unde intelligitur *primo*. Cum vis centripeta ob maximam distantiam omnes fere globi planetarum partes æque adficiat, per eam motus rotationis haud perturbari, sed duntaxat motus progressionis centri gravitatis in curvilineum mutari potest. *Secundo* ob eandem rationem effectus variationis virium centralium aut aliarum perturbatricium in planetis in eo tantummodo consistet, quod describant traiectorias curvilineas inæqualibus celeritatibus, manente earum revolutione diurna prorsus uniformi. *Tertio* Quoniam quodvis materiæ punctum vi inertiæ motum impressum uniformiter conservat, donec ad mutandam sive celeritatem sive directionem aliunde determinetur; idcirco partes globi motum vertiginis circa axem, quem facta impressione, ipsaque inter se cohærentia primo concipiunt, perpetuo retinebunt, nisi caussa quæpiam ad celeritatis vel directionis mutationem illas determinet.

SECTIO VII.

De Synthetica Deductione Gravitatis Universalis.

Newtoniana methodus philosophandi in eo maxime sita est, ut leges naturæ per observationes, atque experimenta analytice investigentur: tum ex iisdem posteaquam inventæ sunt, ceu ex principiis tuto assumtis explicatio aliorum præterea phœnomenorum, quæ cum iisdem legibus connexa videntur, synthetica ratione deducatur. Eam methodum cum adhuc ſequi conatus ſum, ſepoſitis plane inutilibus, certe intempeſtivis de natura primorum elementorum diſputationibus, illud iam hac parte explicandum reſtat, quomodo ex legibus attractionis analytice inveſtigatis connexa phœnomena pendeant, qualia ſunt, quæ ad perturbationes motuum cæleſtium, ac præcipue lunæ, æſtum maris, figuram telluris, ac verum mundi ſyſtema pertinent. Quarum rerum tractationem recte, ni fallor, *ſyntheticam gravitatis univerſalis deductionem* inſcripſi.

CAPUT I.

De Perturbationibus motuum cæleſtium.

Quoniam planetæ non modo a ſole, ſed a ſe mutuo quoque attrahuntur, eorum motus penitus regulares, & orbitæ fixæ & in eodem conſtanter plano eſſe non poſſunt. Quare cauſſam habemus minime dubiam motuum irregularium, qui reipſa obſervantur in omnibus, & ſingulis, quæ, cum certis legibus adſtricta ſit, & calculo utut difficili, ac tædii pleno ſubiici poſſit, ſatis ſe ipſam commendat ceu genuinam, & minime dubiam. Indicabo autem hoc loco, quæ potiſſimum perturbationes, & qua ratione ſecundum attractionis leges fieri poſſint, ac debeant; nam calculos tractare nec huius loci eſt, nec inſtituti.

§. CCCXXXIII.

Obſervatio. Planetæ non intra idem temporis intervallum, quo ad eandem poſitionem reſpectu fixarum redeunt, etiam ad eandem poſitionem reſpectu aphelii ſui, vel apogæi, vel ad eandem poſitionem reſpectu nodi aſcendentis regrediuntur. Hinc orbitæ eorundem mutationem ſubeant; neceſſe eſt; quod quidem ita concipi poteſt, & ſolet, ac ſi planeta in eadem quidem orbita motum ſuum continuaret, ſed ita, ut ipſum orbitæ planum circa focum moveatur, ſive dein eædem maneant orbitæ dimenſiones ſive etiam iſtæ varientur.

Ex

Digitized by Google

Ex eo autem orbitæ motu facile intelligitur poſitionem aphelii, atque etiam nodum, imo & inclinationem ad eclipticam mutari & moveri poſſe. Unde ex hoc apheliorum, & nodorum motu profluxit diſcrimen inter tria genera converſionum, quas in planetis aſtronomi conſiderant. *Converſio periodica* eſt ea, qua planeta regreditur ad eandem poſitionem reſpectu fixarum; converſio *anomaliſtica*, qua regreditur ad eandem poſitionem reſpectu aphelii, & converſio *ſynodica*, qua regreditur ad eandem poſitionem reſpectu nodi aſcendentis. Quamquam in Luna ſynodicam converſionem communius adpellant eam, qua regreditur ad eandem poſitionem reſpectu ſolis, ut a novilunio ad novilunium. Relate ad motum telluris ſive motum adparentem ſolis, *annus periodicus ſive ſidereus*, hoc eſt, tempus, intra quod terra ad eandem poſitionem reſpectu fixarum regreditur, eſt $= 365^{d}.\ 6^{h}.\ 9'.\ 22''$. Hoc anno ſidereo maior eſt annus anomaliſticus, & minor annus tropicus. Nam annus anomaliſticus ſive tempus, quo terra ad eandem apſidem revertitur, reperitur $= 365^{d}.\ 6^{h}.\ 15'.\ 24''$. annus vero tropicus, quo nimirum ſol regreditur ad idem punctum Eclipticæ computatum ab initio arietis, ceu ad eundem tropicum, vel æquatorem, proxime cenſetur $= 365^{d}.\ 5^{h}.\ 48'.\ 54''$. Hinc converſio anomaliſtica terræ maior eſt ſiderea ultra $6'$ temporis: annum vero tropicum ſuperat $26\frac{1}{2}'$.

§. CCCXXXIV.

Problema I. *Exhibere, quomodo actione mutua planetarum apſides eorundem moveri poſſint, ita, ut converſio anomaliſtica a periodica ſive ſiderea neceſſario diſcrepet.* Reſolutio problematis habebitur, quantum ad propoſitum ſcopum ſatis eſt, ſi oſtendatur, quomodo planetæ cuiusdam circa ſolem gyrantis vis centripeta aut tangentialis perturbetur actione alterius planetæ pariter

 circa

Digitized by Google

circa solem moti, & quomodo mutatis ac perturbatis iis viribus motus apsidum consequi debeat. Igitur

I. Sit (F. IX. T. VI.) T terra circa solem S mota, P planeta quidam extraneus vim telluris perturbans e. g. Jupiter in eodem cum reliquis plano. Notandum in primis, si & terra & sol a planeta extraneo P vi *æquali* & *parallela* traherentur, nulla motus perturbatio orire-tur, sed duntaxat systema terræ ac solis, sive commune eorum centrum gravitatis versus eum planetam ferretur, terra autem suam orbitam secundum omnes leges imperturbate describeret. Quapropter differentia virium, quibus & terra, & sol trahitur, spectanda est; & si tractiones TP, SP non sunt in eadem linea, nec parallelæ, ad resolutionem virium more solito confugiendum est. In proposito casu vis gravitatis TP resolvitur in vim TS, & TG facto parallelogrammo TSPG; unde TG = SP, eidemque opposita, vis autem TS gravitatem telluris versus solem auget, eiusque motum necessario perturbat. Et quoniam perturbatio fieri nequit, nisi vis centripeta, aut tangentialis, vel utraque mutetur; hinc etiam vis TG ita resolvenda est, ut una componentium radio vectori, altera vero tangenti arcus circularis, quem tellus minimo tempusculo describere concipitur, respondeat. Producto igitur radio ST indefinite, & in illum demisso ex G perpendiculo GH, erit completo parallelogrammo GHTK, vis TG resoluta in duas, quarum una TH immutat vim telluris centripetam, altera TK adficit tangentialem. Ex quibus luculento patet, quomodo actione planetæ extranei vis centripeta, & tangentialis alterius planetæ perturbari queat. Reliquum est, ut ostendatur, quomodo perturbatis hisce viribus motus apsidum consequatur.

II. Si a planeta extraneo vis centripeta minuitur, vel tangentialis augetur, linea apsidum promovetur versus eam partem, in quam planeta motu proprio tendit: si autem vis centripeta augetur, aut tangentialis minuitur, linea apsidum removetur in partem contrariam. Sit enim (F. X.) planeta in P, ubi vi tangentiali PT, & centripeta PL circa focum suum S arcum infinitesimum PQ a tangente PT nihil differen-

tem

Digitized by Google

tem percurrit. Ductis radiis P S, P F anguli T P S, t P F æquales erunt, iidemque manere concipi possunt in puncto Q. Verum accedat iam vis perturbatrix, quæ minuat vim centripetam P L, vel augeat vim tangentialem: utroque casu planeta a foco S recedet, crescet radius vector S Q, & fiet e. g. S O; igitur si orbita manet elliptica, sequi debet focus F cum radio F P in illam partem, in quam nova orbita cadit, ita, ut anguli radiorum cum tangente utrinque æquales maneant. Movebitur ergo cum plano orbitæ linea apsidum A B versus partem, in quam planeta P tendit, & acquiret situm a b. Atque crescente ob vim perturbatricem distantia planetæ a foco etiam tempus conversionis anomalisticæ crescat, necesse est; sunt enim quadrata temporum, ut cubi distantiarum; unde ulterius sequitur, axem quoque, seu lineam apsidum a b non iam eiusdem magnitudinis esse, sed crescere debere, & orbitam dilatari, quia eadem lex vel maxime distantiam in axe respicit. Contrarium omnino contingit, si vis perturbatrix augeat vim centripetam, aut minuat tangentialem; quo casu vicissim planeta magis accedet ad focum S, e. g. usque ad n: contrahetur ergo orbita, tempus periodi anomalisticæ decurtabitur, & positio lineæ apsidum a β erit in partem contrariam, ut proin planeta citius ad aphelium perveniat. Quodsi vires perturbatrices mutentur per vices, linea apsidum hac, illac nutabit, neque ultra certos limites progredietur, nisi ex una parte vis perturbatrix maior sit, quam ex altera.

§. CCCXXXV.

Problema II. *Exhibere quomodo ob vires perturbatrices nodi alicuius orbitæ in ecliptica directe, vel retrograde moveri possint, ac debeant, id est secundum, vel contra seriem signorum.* Concipiatur, ut antea, ob vires perturbatrices totum planum orbitæ moveri, sintque (F.XI.) duæ planetarum orbitæ A B, C D se intersecantes in N, & Eclipticam E L in M, & P, una sub maiore inclinationis angulo A P L, altera sub minore D M L. Trahat planeta in D inferior alterum superioperiorem vi A q. manifestum est, orbitam A B ita inclinatum iri, ut, dum nodus ex N regreditur in n, simul etiam intersectio eclipticæ P ad eandem partem recedat in p; Quapropter cum planeta ex A versus B secundum seriem signorum concipiatur moveri, intelligi sane potest, *nodos orbitæ, quæ maiorem habet angulum inclinationis ad eclipticam ab omnibus planetis, quorum orbitæ minorem ad eclipticam angulum inclinationis habent, ad motum retrogradum determinari.* At vero si superior planeta A (F. XII.) trahat inferiorem vi D q; iterum patet, nodum N occursurum planetæ A in n; quo fit, ut intersectio orbitæ cum ecliptica præcedat in m, & motus nodi in ea directus fiat, cum respectu orbitæ C D nihilominus retrogradus maneat. Unde patet, *nodos orbitæ, quæ minorem habet inclinationem ad eclipticam, a planetis maioris inclinationis ita moveri, ut in ecliptica directe progrediantur.*

§. CCCXXXVI.

Corollarium. Nodi planetarum, quorum orbitæ ad eclipticam sive orbitam telluris aliter atque aliter inclinatæ sunt, observantur mutari, & quidem ita, ut retrograde sive contra seriem signorum moveantur, nodos Jovis si excipias, qui moventur directe, sive SSS, h. e. secundum seriem signorum. Ac si planetæ eo ordine ponantur, quo orbitarum anguli inclinationis crescunt, primus erit Juppiter, qui minimam habet 1°. 20′. Sequetur Mars 1°. 51′. Saturnus 2°. 31′. Venus 3°. 27′. Mercurius 6°. 59′$\frac{1}{2}$. Hinc nodi Jovis ab omnibus planetis, excepta sola terra directe sive in consequentia promoventur præsertim a Saturno, qui eidem & proximus est in coniunctione, & reliquis omnibus maiorem massam habet. Reliquorum nodi ex una parte a Mercurio & Venere pariter directi fiunt, sed cum a cæteris, & maxime a Jove, cuius massa incomparabiliter maior est, hæ vires elidantur, retrogradi fiunt. Similiter concipi potest nodos orbitæ lunaris, quæ ad eclipticam sub angulo 5° inclinata est, actione solis in Ecliptica existentis ad motum retrogradum nempe versus occasum determinari; imo etiam inclinationem ipsius orbitæ perpetuis mutationibus obnoxiam esse.

Digitized by Google

§. CCCXXXVII.

Corollarium II. Si iam concipiantur quotvis lunæ circa terram revolvi in orbitis ad eclipticam inclinatis, ac lunarum numerus eo usque augeri, ut tandem se contingant, solidumque circa terram annulum efficiant, huius quoque annuli nodi, sive puncta, in quibus eclipticam secat, itidem retrogradi erunt. Quoniam igitur ex observationibus ac dimensionibus figura telluris sphæroidica est, protuberans sub æquatore, circa polos compressa, materiæ portio sub æquatore extans instar annuli est terram ambientis & in plano æquatoris constituti, qui proinde, uti æquator eclipticam in duobus punctis intersecat; hæc igitur intersectionum puncta motu retrogrado feruntur, efficientque, ut terra, antequam integram periodum absolvat, punctum æquinoctiale, quod interea recessit, attingat, eritque tropica telluris conversio brevior, quam periodica. Atque hoc est *præcessio æquinoctiorum*, cuius ratio in solo Newtoniano systemate secundum naturæ leges reddi potest. Sit enim ecliptica (F. XIII.) E C, axis O P, polus P. Æquatoris terrestris planum Æ Q, axis O B, polus B. Si iam nodi ex M in m, & ex N in n regrediantur, necessario sequetur polus axeos ex B in b, ita ut si nodi longissimo annorum intervallo circulum E c conficerent, polus B sive axis æquatoris circa polum eclipticæ P circellum B b D describeret. Hac igitur nodorum terræ regressione versus occasum fit, ut stellæ omnes motu contrario & apparente per circulos eclipticæ parallelos versus ortum progredi videantur, etsi is progressus perquam exiguus sit, & intra annum non nisi ad 50″, 30‴ secundum longitudinem pertingat. Hæc præcessio æquinoctiorum in caussa est, cur Astronomi distinctionem Zodiaci in rationalem, & adparentem adhibeant. *Adparens*, seu quem oculis cernimus, constat 12 signis supra enumeratis, quorum primum est signum arietis, postremum, piscium. *Rationalis* autem, quem tantum mente concipimus, eundem locum occupat totus, & totidem signa continet iisdem nominibus designata; sed divisionis initium fit ab ipsa se-

Digitized by Google

ctione verna, seu puncto aequinoctiali verno. Quare cum id punctum regrediatur in occidentem lentissimo illo motu, omnia astra respectu ipsius progrediuntur in orientem, & iam per bis mille annos, ex quo nomina sunt imposita, ita processerunt, ut aries adparens sit in tauro rationali, taurus in geminis, gemini in cancro atque ita porro, piscibus occupantibus priscam arietis sedem.

§. CCCXXXVIII.

Corollarium III. Quoniam planum aequatoris terrestris non modo ad planum eclipticae, in quo sol existit, sed etiam ad planum orbitae lunaris inclinatum est; idcirco praecessio aequinoctiorum tum actioni solis, tum etiam, ac multo magis actioni lunae (ob minorem eius a terra distantiam, adeoque maiorem vim) tribuenda est. Cum igitur planum orbitae ob motum nodorum perpetuo mutetur, adeoque actio lunae in sphaeroidem terrestrem in uno casu notabiliter maior, in alio minor fit; fieri non potest, quin in ipso axe terrestri libratio sive *nutatio* quaedam oriatur; ob quam in positione fixarum variationes quaedam contingant, quae reipsa observatae sunt, ita, ut periodus illarum annorum circiter 18 & 7 mensium spatio concludatur, quantum est tempus unius revolutionis nodorum lunarium.

CAPUT II.

De praecipuis perturbationibus motus lunaris.

Si luna a terra duntaxat attraheretur vi $= \frac{1}{D^2}$, *orbitam regularem circa eandem constanter describeret. At vero assumta lege generali gravitatis universalis, ac mutuae, quae a distantia & massa attrahente pendet, fieri non potest, quin eius motus varie pertur-*

turbetur, quia non modo a terra, sed a sole quoque attrahitur, ita, ut solis in lunam actio secundum attractionis leges perquam sensibilis fiat, propterea quod & massa solis admodum ingens sit, & distantia lunae a sole non multo maior, imo aliquando etiam minor, quam distantia terrae ab eodem. Si dein terra & luna, dum circa commune centrum gravitatis moventur in sua orbita, a sole constanter urgerentur viribus aequalibus, & parallelis, motus earum respectivi nil turbarentur omnino: posita vero inaequalitate virium, & obliquitate directionum perturbationes existant, necesse est, quarum praecipuas, hoc loco indicabimus.

§. CCCXXXIX.

Problema. *Datis distantiis terrae ac lunae a sole, exhibere vires, quibus sol motum lunae perturbat.* Resolutio. F. XIV T. VI Sit S sol; T terra; L vel l luna in orbita FHEK; Sit HTK arcus orbitae telluris, cui recta SL producta occurrat in C, & Sl in c. Quoniam mensis lunaris a novilunio numeratur, erit id in F, ubi luna & sol in coniunctione sunt respectu terrae T, & facies lunae a sole illuminata ipsi soli, non telluri obvertitur. Inde emenso primo quadrante erit in H quadratura; in E oppositio cum sole relate ad terram intermediam in T; denique in K quadratura altera. Coniunctio & oppositio *Syzygiae* vocari solent. Ut igitur vis perturbatrix motus lunaris intelligatur, sit *primo* luna in arcus citerioris puncto quodam L. Secundum leges attractionis gravitas terrae in solem est ad gravitatem lunae, ut $LS^2 : TS^2$ vel CS^2. Ponatur haec ratio $= SC : SB$, ut SC seu ST exprimat gravitatem terrae in solem, SB gravitatem lunae. Ducta BA parallela ad LT, productaque ST in A, ac completo parallelogrammo ABMS, vis obliqua lunae BS resolvitur in vim BA, & BM seu $AS = AT + TS$. vis TS, cum telluri aeque ac lunae communis sit, nil turbat motum ac statum comparativum horum corporum; relinquitur ergo vis perturbatrix BA, & AT; & quoniam hae vires adplicatae sunt lunae in L existenti; vis BA parallela ad LT lunam urget versus T, eiusque in terram gravitatem auget: vis AT in L adplicata lunam a plano HTK & a terra distrahit. *Secundo.* Si luna est in arcus ulterioris quodam

puncto

Digitized by Google

puncto l, erit gravitas terræ ad gravitatem lunæ in solem, ut $lS^2 : TS^2$ seu cS^2. Fiat hæc ratio = cS : bS, ut cS exprimat gravitatem terræ, bS gravitatem lunæ in solem. Vis bS decomponi potest in vim ba, & aS. Vis ba parallela ad lT lunam in l positam versus terram urget, eiusque in terram gravitatem iterum auget. Vis aS est = TS — Ta. est autem vis TS telluri communis, ac parallela; remanet igitur vis aT negative sumenda, quæ lunam in l positam contraria directione a sole distrahit; perinde est enim, sive luna habeat sólam vim aS versus solem, sive habeat vim TS, uti tellus, sed ita, ut lunæ in l positæ addatur vis aT augmento addito contraria. Hæc igitur vis aT lunam etiam in arcu ulteriore HEK a plano HTK & a terra distrahit, & quidem in syzygiis F & E eam directe a centro telluris urget. Hactenus vires perturbatrices obtinuimus in arcu citeriore BA, & AT, in ulteriore ba & aT. Porro vis AT, & aT lunam a terra distrahens proxime æqualis est 3CL. Nam ob ingentem solis a terra distantiam, & exilitatem anguli LST rectæ BL, & AT proxime parallelæ sunt, & sicut TS, ita & BS pro normali ad HK sumi potest; hinc ABLT est parallelogrammum, & AT = BL = 3CL, quia LC, CD, DB ab æqualitate non discedunt sensibiliter. Quapropter vires perturbatrices sunt BA vel LT, & 3CL. Atque ex his explicatio perturbationum motus lunaris deducitur.

§. CCCXL.

Corollarium I. *Celeritas lunæ in sua orbita a syzygiis ad quadraturas, hoc est, in primo & tertio quadrante minuitur: a quadraturis ad syzygias, hoc est, in secundo & quarto quadrante augetur.* Nam F. XV T. VI in primo & tertio quadrante vis 3 CL vel cl lunam a terra distrahens resolvitur in vim CN vel IL (de qua postea dicemus) & vim CI vel NL, ci vel nl, quæ directioni lunæ versus H & K progredienti opponitur, eiusque celeritatem minuit: in secundo & tertio quadrante (F. XVI.) vis CL resoluta

luta in C I vel N L conſpirat cum directione lunæ, adeoque eius motum accelerat.

§. CCCXLI.

Corollarium II. *Gravitas lunæ in terram a ſyzygiis ad quadraturas per aliquod ſpatium minuitur, a quadraturis verſus ſyzygias per aliquod ſpatium augetur.* Vis quidem L T (F. XIV) ſeu B A & b a tam in citeriore, quam ulteriore arcu gravitatem lunæ in terram auget; ſed quoniam altera vis perturbatrix C L etiam reſolviturF. XV in C N, vel I L, quæ vi L T in omnibus quadrantibus oppoſita eſt; hinc vis L T & augmentum gravitatis iterum diminuitur. Quoniam igitur eſt C L ad I L; ut 3 C L ad 3 I L; hoc eſt, ſi vis perturbatrix æquatur 3 C L, vis diminuens gravitatis augmentum L T erit = 3 I L; & ſiquo caſu 3 I L fit = L T, *vires gravitatem lunæ perturbantes* ſeſe elident, eaque integra manebit; id quod inito calculo fit in iis orbitæ punctis, ubi diſtantia a quadraturis eſt = 35°, 16′, & a ſyzygiis = 54°. 44′. Inde vero ab eo puncto verſus ſyzygias decreſcit gravitas lunæ, verſus quadraturas creſcit; nam cum I L ſit ſinus anguli L C I = L T C, qui metitur diſtantias lunæ a quadraturis, creſcet vel decreſcet recta I L ut ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis; is autem ſinus verſus ſyzygias progrediendo creſcit, verſus quadraturas decreſcit; itaque recta I L eodem modo; conſequenter a puncto F & E vis 3 I L ſemper maior erit, quam vis L T per 54°, 44′; in quo puncto erunt æquales; inde per 35°, 16′ utrinque circa quadraturas vis 3 I L minor eſt vi L T. Quamobrem ſpectatis omnibus viribus gravitatem lunæ adficientibus dicendum: *decrementum gravitatis lunæ in terram utrinque a ſyzygiis verſus quadraturas ſe extendit per 54°, 44′: augmentum vero eiusdem utrinque a quadraturis per 35°, 16′. Quatuor autem orbitæ lunaris puncta, in quibus vires gravitatem lunæ perturbantes ſe ſe elidunt, utrinque a ſyzygiis per 54°, 44′ diſtant.*

§.

Digitized by Google

§. CCCXLII.

Corollarium III. *Decrementum gravitatis lunae in terram in syzygiis proxime duplum est incrementi eiusdem in quadraturis.* Nam rectae L T, C L, C T, in primo & tertio quadrante sunt ut radius, sinus, & cosinus anguli C T L, seu distantiae lunae a quadraturis: in secundo autem, & ultimo quadrante, ut radius, cosinus, & sinus eiusdem anguli; Hinc vis L T est ad 3 C L, ut radius ad triplum sinum distantiae a quadraturis, vel ut radius ad triplum cosinum distantiae a syzygiis. Porro in quadraturis evanescente sinu ac vi C L manet duntaxat prima vis perturbatrix aequalis radio H T vel T K, quae gravitatem lunae in terram auget in secundo, & ultimo quadrante: vis 3 C L uti cosinus distantiae a syzygiis continenter crescit, & in ipsis syzygiis evanescente sinu fit cosinus aequalis radio ut 3 C L fit = 3 L T; quoniam vero luna ob primam vim perturbatricem urgetur versus terram vi = L T, erit residua vis perturbatrix distrahens lunam a terra = 3 L T — L T = 2 L T; unde patet consectarii veritas.

Hoc augmentum gravitatis lunae in terram, quale ex actione solis in quadraturis oritur, secundum Newtonum aequale est $\frac{1}{178}$ illius vis, qua luna a terra attrahitur. Praeterea animadvertendum: si decrementum gravitatis in syzygiis ad calculum diligenter revocetur, vis perturbatrix in coniunctione paullo maior reperitur, quam in oppositione. Illud autem longe a veritate abhorret, vim gravitatis lunae in oppositione crescere debere, ut quidam opinantur, propterea quod in eo situ, dum luna est in E, terra in T, sol in S (F. XIV) directiones actionum terrae & solis conspirent. At enim, quod saepe monui, non est vis absoluta solis in terram & lunam consideranda, sed inaequalitas duntaxat virium, sive excessus actionis solaris, qui in oppositione in terram, non in lunam exeritur, terramque a luna distrahit. Profecto haud difficulter intelligi posse arbitror, eundem necessario effectum consequi, sive nitatur sol in coniunctione lunam

Digitized by Google

a terra, sive in oppositione terram a luna distrahere. In resolutione problematis & terræ & lunæ in oppositione vel in arcu ulteriore tribuimus vim T S, vel C S; sed lunæ dein vim oppositam a T adiecimus, quæ eam a terra distrahat, & compenset, id quod demonstrationis gratia adiectum fingitur. Sunt aliæ præterea motus lunaris perturbationes circa tempora periodica, diversam orbitæ curvitatem, diversam a terra, ac terræ una & lunæ a sole distantiam: de quibus ut differamus præfixi limites haud concedunt. Lunam circa proprium axem converti intra id tempus, quo suam circa terram periodum absolvit, vel ex eo colligi potest, quod eandem constanter faciem nobis obvertat. At observatum est, novas aliquando in orientali vel occidentali disco maculas conspici antea non visas; quam mutationem vocant librationem lunæ in longitudinem, si similis mutatio in parte disci septentrionali, vel meridionali contingit, ea dicitur libratio in latitudinem. Prior ob diversam lunæ celeritatem in sua orbita, altera ob diversam latitudinem, sive distantiam ab Ecliptica, & inclinationem axis contingit. De motu lineæ apsidum, & nodorum satis pro instituto nostro egimus capite præcedente.

CAPUT III.

De Maris æstu.

Ex iis, quæ de legibus attractionis dicta a nobis, & de motu lunæ breviter indicata sunt, phenomena æstus maris haud difficulter explicantur. Qua quidem re ipsa attractio mutua & universalis mirifice commendatur.

§. CCCXLIII.

Observatio. Æstus maris duobus oppositis constat motibus, qui in amplo oceano potissimum conspicui sunt, ubi maris aquæ per horas circiter sex versus litora

tora fluentes in medio ſubſidunt, perque horas totidem refluentes iterum intumeſcunt in medio. Horum motuum primus dicitur *fluxus*, alter *refluxus*. triplex huius æſtus variatio, ſeu periodus obſervatur, diurna menſtrua & annua.

Periodus diurna hæc eſt. Mare ſingulis diebus bis elevatur, bis deprimitur. Maxima altitudo aquarum datur plerumque poſt adpulſum lunæ ad meridianum ſive ſuperiorem, ſive inferiorem: maxima depreſſio poſt ortum lunæ, & occaſum, ſic tamen, ut tempus æſtus maximi etiam pendeat a ſitu comparativo lunæ ad ſolem. Periodus igitur diurna abſolvitur horis ſolaribus 24 & 48′; quod ipſum eſt intervallum temporis inter tranſitum lunæ per meridianum, & reditum ad eundem.

Periodus menſtrua in eo ſita eſt, quod æſtus ſint maximi ſingulis menſibus paullo poſt ſyzigias ſolis & lunæ, & decreſcant in tranſitu lunæ ad quadraturas, & paullo poſt illas fiant minimi. Ratio aſcenſus maximi ad minimum eiusdem menſis ſecundum quasdam obſervationes eſt, ut 9 ad 5, aliquando etiam maior. Cæteris paribus æſtus fit maior, ſi minor eſt diſtantia lunæ a terra: item maior, cum luna in æquatore eſt, quam ſi ab eodem declinet.

Periodus annua cenſetur, ſi ſyzygiæ in dies æquinoctiales incidant; ac tum maximi ſunt æſtus: in quadraturis autem eo caſu minores ſunt, quam in aliis lunationibus. Contra ſi diebus ſolſtitialibus ſyzygiæ celebrentur, æſtus minores ſunt, quam in lunationibus aliis; at in quadraturis dein maiores ſolito æſtus contingunt. Hæc fere ſunt phænomæna regularia æſtuum, quæ ipſa pro diverſa locorum latitudine, & ſitu reſpectu oceani, unde derivantur, non eadem ſunt in locis omnibus. Sunt præterea complura alia phænomena prorſus irregularia, de quibus infra adnotabimus non nulla.

Ut porro intelligatur, quomodo iſtiusmodi phænomena actione luminarium, id eſt, ſolis ac lunæ efficiantur, in memoriam revocetur: primo *ex* §. *CCI. ſi tellus fluido perfecte homogeneo conſtaret, ac præterea motu vertiginis* ca-

careret, ea in sphæram perfectam se conformaret, partibus eiusdem æquali undique gravitate libratis. Secundo. *Si singulæ telluris partes, a sole & luna vi æquali & directione parallela traherentur, tota quidem globi massa moveri, partium vero situs respectivus nihil immutari posset.* Tertio. *Vis attractiva, quatenus in centra globorum tendit, eaque coniungere nititur, ita se habet, ac si omnes massarum partes in centris essent collectæ. Hanc attractionis vim Newtonus vocat* absolutam; *per quam massæ integræ ita in se mutuo tendunt, ac si earum centra in se se agerent; consequenter intelligi non potest, quomodo vi absoluta attractionis, cuius unica inter duo centra est directio, respectivus partium situs eiusdem globi immutari queat. At enim concipi præterea debet alia vis attractionis* respectiva, *quæ in alias atque alias partes eiusdem globi alia atque alia esse potest, & vero etiam debet; cum enim distantia singularum telluris partium eadem non sit, neque eædem sint directiones, secundum quas diversæ partes trahuntur; idcirco orietur attractionum differentia, & inæqualitas, quæ figuram fluidi, quod terram ambit, immutet, etsi illa sphærica ponatur esse, uti in præsenti negotio citra errorem poni potest.*

§. CCCXLIV.

Problema. *Ostendere, quomodo attractionum inæqualitate seu vi respectiva luminarium figura sphærica maris in punctis oppositis utriusque hemisphærii mutetur.* Resol. Sit (F. XVII. T. VI.) circulus F M E N figura sphærica telluris maribus circumfusa, sitque luna in L. Quia partes in F propiores sunt lunæ, quam circa N, ab eadem magis attrahuntur. Præterea partes F trahuntur directe in lunam, partes N oblique; vis hæc obliqua L N secundum leges mechanicas resolvitur in vires N T, & N Q, vis N Q = T L ipsi etiam centro telluris competit; vis autem N T accrescit gravitati partium circa N in terram, eandemque auget; quapropter partium circa N gravitas in terram maior est, quam partium circa F existentium, tum quia hæc ob maiorem viciniam magis trahuntur a luna, magisque distrahuntur a centro, in quod tendunt, tum quia trahuntur directe, cum e contrario obliqua tractio partium in N gravitatem earundem potius augeat.

2. Secundum attractionis leges partes in F lunæ propiores, & directe oppositæ maiore vi attrahuntur, quam centrum terræ, & centrum similiter vi maiore, quam partes in E hemisphærii oppositi. Quemadmodum igitur fluidum in F magis versus lunam tendit, quam centrum tendat, ob eamque caussam a centro distrahitur; ita centrum vi maiore, quam partes in E, tendit in lunam, pariterque ab iis partibus distrahi debet. Quoniam igitur ob actionem lunæ differentia quædam virium, & diminutio gravitatis relate ad centrum in punctis oppositis F & E simul contingit; aliarum vero partium circa M & N gravitas in terram nihil minuatur, sed augeatur potius actione lunæ ob vim NT, hinc secundum leges æquilibrii, & fluidorum mobilitatem partes minus graves in F & E elevari, in N & M deprimi debent; cumque diurna revolutione lunæ aliæ atque aliæ partes marium magis directe subiiciantur lunæ, eamque mutationem gravitatis subeant; idcirco & figura sphærica undarum identidem mutari, & alterna elevatio, & depressio oriri debet, in qua maris æstus consistit.

§. CCCXLV.

Corollaria. I. Vis solis in figura maris mutanda similem effectum, longe tamen minorem, quam luna præstat; etsi enim sol ob maiorem massam magis attrahat terram, quam luna; tamen differentia attractionum, quibus aliæ atque aliæ telluris partes a sole adficiuntur, longe minor est, quam quæ a luna oritur; tum quia directiones ex N & F versus solem ob enormem distantiam prope parallelæ sunt, tum quia differentiæ quadratorum in numeris maioribus minores sunt, quam in numeris minoribus; quare cum vires attractivæ sint ut quadrata distantiarum, in distantiis maioribus minor erit virium differentia, quam in minoribus.

II.

Digitized by Google

II. Differentia attractionum, quas sentiunt diversæ telluris partes, *actio luminarium* in hoc efficiendo motu adpellatur; & si actiones luminarium, nempe & solis, & lunæ conspirant, spectanda est *summa virium* ad mare turbandum; si vero actiones solis & lunæ ob diversum inter se situm pugnent, ita, ut sol aquas elevet, ubi luna deprimit, sumenda erit *virium differentia*.

III. Ex resolutione problematis perspicuum est: *aquas non elevari tota vi absoluta luminarium, sed respectiva, seu inæqualitate attractionum.* Quapropter nec leges attractionum, nec mentem Newtonianorum recte perspiciunt, qui putant, elevatis aquis in F seu in meridiano superiore, aquas in E seu hemisphærio opposito deprimi debere, propterea quod linea E F coniungens puncta opposita, versus L, id est, versus lunam tendat. Sed hoc quidem a veritate tam alienum est, ut nihil magis. Sit enim circulus F M E N orbita lunæ, T terra, sol in L. Ex dictis capite præc. patet, gravitatem lunæ in terram minui in syzygiis tam in coniunctione F, quam oppositione E; quod extra controversiam est. At secundum illorum opinationem gravitas lunæ in E oppositione existentis crescere deberet, quia directiones terræ & solis attrahentis conspirant, & linea E T F versus solem deberet accedere; quod maxime falsum est. Recte igitur Jacquier ait: *in eo situm est Cartesianorum sophisma, quod nempe fingant aquas attolli tota attractione lunæ, cum attollantur duntaxat attractionum differentia, nempe differentia inter attractionem totam, & illam attractionem, quam luna in centrum telluris exercet.* Concipiatur terra cessante omni alia vi in solem, & sublata cohærentia partium telluris versus lunam decidere: manifestum est, quod partes in F lunam directe respicientes maiore velocitate caderent, quam centrum, utpote maiori attractioni obnoxiæ, partes vero in E celeritate minore, quam centrum; hinc illæ centrum aliquantum desererent, has desereret ipsum centrum, ut adeo sphæra telluris necessario in sphæroidem oblongam abiret, cuius maxima diameter lunam respiceret. Aut fingatur primo gravitatem versus lunam in F, T, E eandem & æqualem esse; tum addatur parti-

Digitized by Google

bus in F alia vis gravitatem versus lunam augens, & partibus in E vis opposita gravitatem minuens; quo intellecto non potest non intelligi, sphæram in sphæroidem desituram.

IV. Recta e f coniungens puncta maximæ altitudinis aquarum in oppositis hemisphæriis dicitur *diameter maxima sphæroidis*; cum igitur motu diurno lunæ, aliæ atque aliæ partes marium attollantur, idcirco diameter maxima sphæroidis motum lunæ potissimum sequetur, & sphærois terrestris identidem mutabitur. Quoniam autem vis lunæ maior est in eas partes, quibus magis directe, & verticaliter imminet; ideo diameter maxima sphæroidis, sicut & luna, extra tropicos non multum egredietur. Sit F. XVIII. tropicus cancri DA; capricorni BC, æquator ÆQ. in L vel I luna. Æstus, qui in uno hemisphærio fit in tropico cancri A, eodem tempore in puncto opposito tropici capricorni in B continget, atque exundatio diurna, & diameter maxima sphæroidis utrumque terræ tropicum eo die percurret. Atque hinc si concipiatur locus supra tropicum situs in I, ut in nostro climate, exundatio respectu eius loci maior fiet, si diameter maxima sphæroidis terminetur in A, seu in tropico cancri eiusdem hemisphærii, quam si terminetur in puncto C tropici capricorni. *Universe quo vicinior est locus illi puncto, in quo diameter maxima sphæroidis terminatur, eo maior cæteris paribus æstus illuc propagabitur.* Inde fit, ut, si declinatio lunæ est borealis, æstus in regionibus circa I positis maior habeatur luna, transeunte per meridianum superiorem, minor, si per inferiorem transit. Ex A enim copiosius propagatur æstus versus I, quam ex C, in quo puncto diameter maxima terminatur, si luna ad D meridianum inferiorem pertingit. Contrarium fit, si declinatio lunæ est australis, uti patet. Quotiescunque igitur luna ab æquatore declinat, extremitates diametri maximæ, & consequenter maximæ exundationes aquarum diversos terræ circulos percurrunt: at si luna in æquatore versetur, diameter maxima sphæroidis, utpote semper per centrum transiens, utrinque in æquatoris circulo terminabitur, & propterea fieri debet, ut

Digitized by Google

ut secundus tumor maximus ad idem punctum redeat, in quo primus fiebat, eidemque æqualis sit; & quia tum luna æquali tempore supra & infra horizontem moratur, inter initium, & finem æstuum æquale tempus interiacet, ut adeo in eodem circulo intra æquale temporis intervallum post maximum tumorem maxima depressio aquarum fiat; unde oscillatio aquarum oritur, quæ actionem lunæ adiuvat, earumque altitudinem auget, haud secus ac in pulsando ære campano fit, in quo si nova per funem motus impressio incidit in manubrium descendens, facile augetur, & conservatur oscillatio; at siquis funem trahat, dum manubrium ascendit, oscillationem perturbat, minuitque.

§. CCCXLVI.

Explicantur Phoenomena Aestus.

I. *Eidem loco intra 24, & 48 æstus bis contingunt;* nam luna intra hoc tempus utrumque hemisphærium peragrat, atque æstus eodem tempore in punctis oppositis utriusque hemisphærii contingit.

II. *Elevatio aquarum in eodem etiam loco plurimis variationibus obnoxia est tum quoad tempus, tum quoad ipsam etiam magnitudinem.* Pendet enim ea ab actione & solis & lunæ; & pro vario situ comparativo luminarium, & positione ipsius loci modo summa, modo differentia virium sumenda est; hinc magnitudo æstuum necessario variatur. Deinde cum maris aquæ non minus, ac alia corpora vi inertiæ polleant, fieri non potest, ut momento temporis eam positionem acquirant, quam æquilibrium, & mutatio gravitatis poscit; sed opus est tempore quodam continuo, ut ad motum concitentur, atque ii motus impressi dein perseverant aliquo tempore, uti penduli pondus ascendit velocitate iam concepta, licet dein gravitas per totum ascensum ipsum retro urgeat. Atque ob hanc caussam phœnomena ab æquilibrio pendentia serius accidunt, quam sine hac inertiæ vi acciderent; & decrescente etiam vi luminarium aliquamdiu perseverant, atque etiam incre-

Digitized by Google

mentum capiunt. Huius retardationis exempla in aliis etiam virium generibus suppetunt: sic maximum calorem non ipso meridie observamus, licet solis vis tunc maxima sit, sed aliquanto serius, nec in ipsis solstitiis aestivis, sed tardius. Nequit tamen maxima elevatio adcurate ad calculum revocari, cum ea a variis insuper aquarum motibus, litorumque diversis positionibus pendeat; id generatim statui solet, *maximam altitudinem aquarum haberi duabus vel tribus horis post adpulsum lunæ ad meridianum: maximam vero depressionem pariter post eius ortum, vel occasum*, ut adeo motus aquæ ascendentis, & descendentis perduret, donec luna dimidio fere quadrante a meridiano, vel dimidio quadrante ultra 90 gradus provecta sit. Si igitur luna hora 12 diei transit per meridianum dati loci; æstus maximus in utroque hemisphærio erit circa tertiam vespertinam respectu dati loci; si dein circa horam 12 noctis meridianum inferiorem transit, æstus maximus in utroque hemisphærio circa tertiam matutinam recurret. Et quoniam luna non plane intra 24 horas ad meridianum redit, sed 48′ tardius; idcirco tardiores erunt sequentis diei æstus, poscente id theoria, & confirmante experientia. Si aquæ gyro indigent, ut ad locum quempiam deriventur, hora æstus maximi alia atque alia in diversis locis, vel portubus esse debet.

III. *Æstus alii sunt in syzygiis, alii in quadraturis.* Nam in syzygiis cum sol & luna in directum iaceant, actiones luminarium conspirant, atque æstus fit summa virium, proindeque crescit cæteris manentibus iisdem; In coniunctione quidem, ubi sol & luna respectu terræ ex eadem parte consistunt, conspiratio virium facile intelligitur: sed quoniam in oppositione utrumque luminare aquas in punctis oppositis simul distrahit, etiam tum conspiratio virium, atque æstuum incrementum concipi debet. In quadraturis, ubi sol a luna 90° distat, actiones luminarium quoad aquas elevandas, & deprimendas inter se pugnant; igitur æstus fit sola differentia virium, estque minor, quam in aliis casibus; & quia ob hanc rationem a quadraturis ad syzygias æstus continenter crescunt, vespertini maiores erunt matutitutinis: contra vero, quia a syzygiis ad quadraturas decrescunt, matutini maiores sunt vespertinis. Etsi autem actiones luminarium in ipsis syzygiis maxime conspirent: in ipsis quadraturis maxime pugnent; tamen altitudo maxima & minima aquarum aliquantum post syzygias & quadraturas eveniet ob rationem n. præc. indicatam. Præterea quoniam vis lunæ soli prævalet, maxima altitudo aquarum in quadraturis sub luna erit, non sub sole. Universe autem si extra syzygias & quadraturas concipiantur rectæ ex terra in solem & lunam ductæ, diameter maxima sphæroidis iacebit inter acutos angulos, quos eæ rectæ comprehendunt, multo tamen propius accedet ad rectam, quæ in lunam ducta est. Si sol lunam præcedat, fieri potest, ut maxima altitudo aquarum etiam præcedat transitum lunæ per meridianum loci. At si sol sequatur lunam, etiam maxima altitudo transitum lunæ per meridianum subsequetur. Ex quo adparet, quomodo tempus æstus maximi pendeat a situ comparativo luminarium.

IV. *Si syzygiæ incidunt in dies æquinoctiales, æstus fit maior*, quia & sol & luna tum versatur in eodem æquatoris plano, adeoque utriusque coniuncta actio mare agitat, cietque eo loco, ubi maxime cieri potest. *In syzygiis solstitialibus æstus minores sunt*, quia neutrum luminare in æquatore existit, & exundatio aquarum diversos terræ circulos percurrit.

V. *Æstus, qui contingunt sole versante in tropico, & luna in quadraturis, maiores sunt iis, qui fiunt sole in æquatore, & luna in quadraturis existente*; nam in primo casu luna est in æquatore, in secundo est in alterutro tropico; & quoniam æstus plus pendet a luna, quam a sole; hinc maior fieri debet tum, cum efficacia lunæ maior est. Et quia sol terræ vicinior est hyeme, quam æstate; maiores erunt æstus post æquinoctium autumnale, & ante vernum. Ex quo phœnomeno perspicuum est, solem non omnino nihil agere in ciendo mari; etsi enim eius actio minor sit actione lunæ; tamen, cum non penitus nulla sit, ea nunquam efficacius se prodit quam in syzygiis, nunquam minus, quam in quadraturis; ubi actiones luminarium inter se pugnant.

Digitized by Google

VI. *Post syzygias in solstitiis celebratas æstus quadraturarum maior est, minor post syzygias in æquinoctio celebratas.* Patet ex n. præc. nam priore casu sol in tropico, luna in æquatore est: posteriore sol in æquatore, luna in tropico.

VII. *Duo æstus maximi non possunt alter alterum continuo sequi.* Cum enim ex variata lunæ distantia maior æstus variatio oriatur, quam ex variata distantia solis; hinc si altera syzygiarum, in quibus æstus menstrui maximi sunt, in perigæo lunæ contingit, altera in apogæo fiet; proinde in priore casu æstus maior, in posteriore minor erit.

VIII. *In hyeme tempore syzygiarum æstus matutini maiores sunt vespertinis: At in æstate æstus vespertini maiores sunt matutinis.* In hyeme enim sol versatur circa tropicum capricorni BC; ac si præterea sit in meridiano inferiore ut respiciat punctum B, & luna in coniunctione ex eadem parte, vel in oppositione ex parte opposita, ut respiciat punctum A, diameter maxima sphæroidis terminabitur in B & A; & circa horam tertiam matutinam in A fiet æstus, indeque versus locum I facilius propagari potest, quam ex loco C existente sole in meridiano superiore, & circa tertiam vespertinam æstum efficiente. Similiter ostenditur, contrarium fieri debere tempore æstivo.

§. CCCXLVII.

Propositio I. *Etsi certum ponatur esse, æstum, ac variationes regulares eiusdem ab actione luminarium pendere; tamen possunt, ac debent plurimæ æstuum anomaliæ existere.* Probatur. Ex resolutione problematis perspicuum est, ad æstum regularem requiri *primo*, ut mare ampliore tractu ab ortu in occasum, & saltem 90° pateat; æstus enim fit differentia attractionum; in exiguo autem tractu notabilis differentia vel distantiarum a luminaribus, vel directionum, secundum quas agunt, dari nequit. *Secundo* ut motus aquarum liber sit, neque insulis, aliisve obstaculis impediatur. *Tertio* ut ea sit latitudo loci, in qua vel actio luminarium, vel

com-

communicatio æstuum sensibilis esse queat. Cum enim luminaria fere intra tropicos coerceantur, actio eorundem magis directe, & verticaliter non exercetur, nisi in aquas intra tropicos existentes: aucta magis magisque latitudine æstus duntaxat habentur per actionem luminarium valde obliquam, & per communicationem ex aliis locis, quorum minor est latitudo; eiusmodi obliqua actio & communicatio in magnis ab æquatore distantiis parum sensibilis esse potest. Porro hæ conditiones, quæ ad regularem æstum necessariæ sunt, plurimis locis semper, & in multis sæpenumero deficiunt; igitur anomalias oriri necessum est, quarum adcurata ratio adferri non potest, nisi singulæ locorum, aliorumque obstaculorum circumstantiæ sint exploratæ; exempli caussa commemorabo aliquas anomalias, ex quibus de aliis coniectura fieri potest.

I. Ut actio luminarium, & vis respectiva attractionis effectum sortiatur mare valde extensum sit oportet. Hinc in mari pacifico maiores sunt æstus, quam in atlantico, & in locis quibusdam zonæ temperatæ maiores, quam in angusto spatio zonæ torridæ inter Americam, Africam. Latus occidentale Europæ in oceano Atlantico lunæ directius subiacet, & communicationem ex partibus inferioribus marium admittit; idcirco ex parte Lusitaniæ, Hispaniæ, Galliæ, qua occidentem respiciunt, magna exundatio observatur.

II. In portubus Galliæ observatum est, aquas celerius affluere, quam refluere. Nam procurrens Africa retardat primo affluxum ex oceano magis orientali. Quando dein aquæ versus eas partes demum affluunt, luna interea versus occasum magis progressa, aquas in mari inter Africam, & Americam septentrionalem positas attollit; unde hæ quoque illuc affluent. Celeriter ergo altitudo aquarum increscit; eaque dein longiore tempore perdurat, propterea quod refluxui obstet America, nec partes aquarum versus occidentem satis libere exonerari possunt. Habet igitur id portus Galliæ singulare, neque, ut quidam existimarunt, inter regularia phænomena æstuum id recensendum est; cum teste Boscovichio nuspiam alibi legatur, præterquam in obſervationibus per galliæ oras habitis, quæ oceano conterminæ ſunt.

III. In locis verſus polos ſitis ultra 65 grad. latitudinis nullus aut unicus duntaxat intra 24 hor. obſervatur æſtus. Nam ut paulo ante diximus, actio luminarium valde obliqua, & communicatio æſtus in maiore ab æquatore diſtantia denique vix ſenſibilis eſſe poteſt; eiusmodi diſtantiæ merito cenſentur, quæ ab æquatore ultra 65 grad. recedunt. Enim vero ſi luminaria perpetuo in æquatore verſarentur, nulla ſub polis aquarum agitatio fieret in locis polo propinquis admodum exigua, præſertim quia enormes glacies motibus aquarum plurimum obſiſtunt. Ponatur iam luna verſus boream declinare, & concipiatur locus intra polum & lunam ſitus. Si luminare hoc meridianum ſuperiorem tranſit, aquas in dicto loco poterit ciere, quia diſtantia maximæ diametri ſphæroidis a dato loco deficit a 90°. At ſi luna meridianum inferiorem attingit, diameter maxima ſphæroidis terminabitur reſpectu dati loci in partibus auſtralibus; unde tanto ſpatio verſus boream æſtus ſenſibilis propagari nequit; cumque vis ſolis multo minor ſit ad mare ciendum, unicus intra 24 horas æſtus notabitur.

IV. Mare nigrum, Caſpium & Balthicum nullos aut prope nullos patiuntur æſtus. Sunt enim veluti lacus quidam, qui cum oceano nihil aut non niſi per anguſtum fretum communicant; parvi autem æſtus a ventis aliisque cauſſis turbari poſſunt. Accedit, quod mare Balticum ab æquatore plurimum diſtet. In mari mediterraneo æſtus perexigui ſunt, propterea quod eius cum oceano communicatio valde anguſta ſit, & ipſum non extendatur ultra 60°. In ſinu veneto, etſi is amplus non ſit, æſtus tamen manifeſtus & regularis obſervatur; aquas enim altius conſtringit, & ad aſcenſum cogit. Univerſe ſi aqua ſatis cietur, ea in locis interclusis, & ſinuoſis altius adſurgit, quia poſt intumeſcentiam nequit diffluere ad latera. In parva autem maris extenſione, ſi deſit apta communicatio, magnus æſtus fieri non poteſt, quia is non niſi ex aquis ad quadrantem telluris refluentibus affluit. Hinc maria

Digitized by Google

ria terris incluſa, & anguſta nullo propemodum æſtu laborare diximus, niſi cum alio mari ſatis communicent. Per fretum Herculeum & oreſundicum affluit quidem aqua in mare mediterraneum & Balticum; hic tamen modicus influxus non ſufficit æſtui regulari inducendo. In ipſo freto herculeo æſtus admodum varius eſt, cum illuc plures aquæ ex oceano & mari mediterraneo allapſæ confundantur.

V. Si flumina quædam, aut putei non nulli patiantur æſtum; is maxime irregularis & incertus eſt, & occultæ communicationi cum mari adſcribi poteſt. Euripi veriſimiliter oriuntur ex colliſione aquarum, & directione undarum in latentes rupes, inſulas, litora impingentium.

VI. Si aquæ per plures ductus affluentes inter ſe colliduntur, elatio aquarum maxima fieri debet, ut inter Belgium, & Brittaniam accidit. In inſulis multum diſſitis a continentium litoribus exigui contingunt æſtus. Quantum enim fere ex uno latere ad ripas inſulæ attollitur; tantum ex altero defluit. In inſula S. Thomæ, quæ ſub ipſo æquatore ſita eſt, mare vix ad 4 pedes aſſurgit; in Moluccis, & Philippinis vix ad duos tresve pedes; ratio mox indicata ſufficere videtur ſi præſertim in conſiderationem veniat, regularem æſtum, quatenus præciſe actioni luminarium debetur, non niſi $6\frac{1}{2}$ ped. eſſe debere, uti paullo poſt indicabo. Ad litora & freta anguſta, motus vehementior & maior altitudo obſervatur, quam in aperto mari. Dum enim undarum affluentium motus obiecto quodam obſtaculo ſiſtitur: aliæ autem, atque aliæ aquæ identidem ſuccedunt; aquæ neceſſario ultra modum attolli debent, præſertim ſi litora haud præcipiti deſcenſu ad mare apertum ſpectant. In quibusdam portubus (ait Boſcovichius in diſſ. de Maris æſtu) aliqua anni tempeſtate nullus obſervatur æſtus, ut in portu Tunquinenſi Bathſam luna exiſtente in æquatore, vel quia, ut Newtonus explicavit, in eum portum ex una parte tum advenit æſtus, cum ex alia recedit; vel quia; ut notavit Eulerus, in tractu maris extenſo a borea in auſtrum certo quodam limite, luna ac ſole

in

Digitized by Google

in æquatore sitis, nullus æstus ad marginem borealem haberi debet, quia aqua, dum sub æquatore detumescendo subsidet, se effundit in illud maius australe intervallum. Similem ob caussam potest aliquando in eodem portu unicus haberi æstus singulis diebus, & possunt etiam plures, aqua per diversas vias diversis temporibus eo delata. Dum enim æstus ab oceano ad eundem portum per freta diversa propagatur, & per alia citius & facilius transit, quam per alia; tum idem æstus in duos, vel plures succedentes divisus novos motus diversorum generum potest efficere.

§. CCCXLVIII.

Peopositio II. *Phænomena regularia æstuum maris actioni luminarium tanquam veræ & genuinæ caussæ adscribi debent.* Ostenditur. I. Caussæ rerum naturalium non plures admitti debent, quam quæ & veræ sunt, & phænomenis explicandis sufficiunt; quæ quidem Newtoniana philosophandi lex nequit ulli exceptioni obnoxia esse. Porro *veræ* censentur caussæ, quarum existentia potissimum experimentis, & observationibus innotescit. Atque legem attractionis mutuæ & universalis, ex qua actio luminarium provenit, in natura existere reipsa, & per totum systema solare late dominari, nemo credo, rerum physicarum, & mathematicarum peritus dubitare iam ausit. Eandem actionem luminarium esse sufficientem phænomenis regularibus æstus producendis, post Newtonum plures mathematici præstantissimi initis calculis exhibuerunt, ita, ut in maribus liberis atque apertis aqua ob vim lunæ ad $4\frac{2}{7}$ pedes, & binis viribus luminarium conspirantibus ad $6\frac{1}{2}$ ped. elevari possit, ac debeat, nec nisi ob naturalem inertiam undarum fit, ut in libero mari ordinaria fluxuum altitudo sit 8 pedum; quæ ob litorum positiones, variasque reflexiones in portubus, sinubus ac fretis multo maior evadit.

II. Est alia præterea philosophandi lex, eaque tutissima, ut, quoties effectus aliquis ex una parte semper, eodemque modo habetur, quando eædem circumcumſtantiæ concurrunt; & ex altera parte quædam cauſſa apta, proportionata adparet ad eum effectum in iis circumſtantiis producendum, hæc ipſa illius effectus cauſſa cenſeatur; Cum igitur inter triplicem æſtus periodum, & varias poſitiones ac motus luminarium conſtans, & plane mirificus conſenſus intercedat, ita, ut creſcente actione luminarium æſtus creſcat, decreſcente decreſcat; dubium eſſe non poteſt, hanc & veram & ſufficientem æſtuum cauſſam eſſe. Neque anomaliæ obſunt; nam finge modo, dari attractionem mutuam, & univerſalem, ex qua luminarium actio pendet; atqui poſita ea attractione nihilominus anomaliæ æſtuum evenire poterunt ac debebunt; uti ex præc. Propoſitione perſpicuum eſt. Quid igitur ex illis anomaliis contra actionem luminarium concludes denique? nihil ſane, niſi me omnia fallant. Nec refert, ſi ratio cuiusvis anomaliæ celeriter adferri nequit; Quis enim neget, ſuſpenſionem mercurii in barometro a preſſione aeris oriri; & tamen cauſſas mutatæ altitudinis minutim explicare quis poterit?

Conſideranti hanc theoriam de maris æſtu, quæ vix dubio locum relinquit, facile in mentem veniet, eosdem motus reciprocos ab actione ſolis & lunæ in atmoſphæra quoque terreſtri effici debere, cum actio luminarium, antequam ad maris aquas perveniat, neceſſario per atmoſphæram tranſmittatur. Cl. Paullus Friſius rem hanc prolixiore calculo examinandam ſibi ſumſit, & in Prop. XXXVIII. Coroll. III & IV L. II. de gravitate omnium particularum reperit, differentiam altitudinum aeris homogenei eſſe minorem differentia altitudinum maris in ratione 2 : 5 proxime, ita nimirum ut differentia ſummæ altitudinis aeris ſit $1\frac{13}{15}$ ped. ob vim lunæ, & ob vim ſolis pollicum $9\frac{1}{5}$. Habita vera ratione inertiæ neceſſario fit, ut particulæ aquæ & aeris velocitate fluendo acquiſita ultra limites æquilibrii excurrant, & maior utrinque elevatio prodeat, quam vis luminarium depoſcat; quamquam hæc quidem cauſſa in maris aquis maius altitudinis incrementum efficere debeat, quam in aere, ob poſitionem litorum maris, a quibus aquæ intumeſcentes copioſius reflectuntur, & accumulantur; id

quod

Digitized by Google

quod in libero aere non fit. Differentia altitudinum mercurii in barometris ob gravitatem aeris actione luminarium perturbatam ex Frisii calculis maior non est, quam $\frac{1}{108}$ lin. ob vim solis, & $\frac{1}{48}$ lin. ob vim lunae; quae sane quantitas notabilis haud est. Idem auctor deprehendit, velocitatem venti ex actione luminarium, non nisi exiguam, & insensibilem oriri posse, ventumque, siquis inde oritur, potissimum lunae motum comitari debere. Quare cum orientalis ventus, qui intra tropicos continuo spirat, satis sit validus, nullamque directionem continuam habet (uti recentissimae observationes ostendunt) nisi raro tantum, & quae variae declinationi solis ab aequatore ac loco in ecliptica respondeat, ratio ipsius ex vi perturbatrice solis ac lunae nequaquam repeti potest, sed a potioribus caussis derivandus est, videlicet a calore solis & alterna aeris rarefactione. Sunt, qui ita differunt: si actio luminarium commovendo vasto mari par est, etiam aliorum corporum gravitas, & inprimis pendulorum oscillationes eadem perturbari debent; Sed Eulerus inito calculo, numeros oscillationum eiusdem penduli pro casu maxime auctae & imminutae gravitatis non magis differre, quam hosce duos numeros 4666667 & 4666666. Quae sane differentia inter alias penduli & horologiorum inaequalitates percipi haud potest. Sed similia recurrent sequenti capite.

CAPUT IV.

De figura telluris, & caussis diversae gravitatis in diversis terrae locis.

Ex observationibus ope theoriae de pendulorum motu §. CCLIII. deduximus, non eandem corporum terrestrium gravitatem in diversis terrae tractibus esse. Eius rei ratio nunc indicanda est; quo quidem loco etiam de figura telluris, quantum instituti nostri fert ratio, differemus.

§.

§. CCCXLIX.

Hypothesis. *Siquis in dato loco metiatur altitudinem stellæ polaris; dein sub eodem meridiano versus polum accedat, vel ab eo recedat tamdiu, donec ea stella uno gradu altior supra horizontem, aut uno gradu depressior adpareat; idque intervallum respondens uni gradui meridiani cœlestis in terra sive meridiano terrestri metiatur, colliget sequentia:*

I. Quoniam meridianus cœlestis & terrestris in eundem numerum graduum homologorum dividitur, inventum intervallum etiam continet *unum* gradum latitudinis loci in meridiano terræ.

II. Si terra esset sphærica, ex invento gradu, eiusque longitudine ambitus totius meridiani terrestris, & circuli maximi haberetur. Sit enim numerus hexapedarum n, qui uni gradui respondet, ac fiat: $1^{\circ} : 360^{\circ} = n : n \times 360^{\circ}$, quartus terminus exprimet ambitum meridiani terrestris.

III. Siquis in diversa latitudine metiatur gradum meridiani terrestris uni gradui meridiani cælestis respondentem, & intervallum inæquale reperit, terra secundum eam partem non est sphærica; uti patet. Ac quo minus est intervallum uni gradui respondens, tanto maior in eo loco telluris convexitas, seu curvedo est: quo autem maius est intervallum, quod uni gradui respondet, eo minor est curvedo terræ; sive quo loco minor est gradus meridianus, ibi terra magis protuberat: ubi maior est gradus meridiani, ibi est magis complanata, seu compressa. Ex binis enim arcubus circularibus similibus, sive quorum uterque eundem numerum graduum continet, is, qui maiorem mensuram in pedibus habet, maioris radii est; & qui minorem, minoris; curvitates autem sunt reciproce ut radii ex Elem.

§. CCCL.

Propositio I. Figura terræ ad polos compressa est: ad æquatorem vero protuberat. Dem.

I.

I. *Ex dimensionibus geometricis.* Gradus meridiani terrestris ad hexapedas redacti ope dimensionum maiores sunt versus polos, quam in Galliis, & hic maiores, quam sub æquatore; igitur ad polos minima est curvedo superficiei terrestris, maior in Galliis, maxima sub æquatore. Conclusio ex præc. §. n. III. patet: antecedens ex subiecta Tabella.

Meridiani gradus.	Latitudo loci.	Gradus observati in Hexap.
Peruvianus	0	56753.
Africanus	33°. 18'.	57037.
Italicus prior	43. 1.	56979.
Gallicus prior	43. 31.	57048.
Alter Italicus	44. 44.	57069.
Germanicus	47. 40.	57091.
Alter Gallicus	49. 23.	57074½
Brittanicus	53. 0.	57300.
Lapponicus.	66. 20.	57400.

Tabellam recenset Cel. Frisius L. II. de gravit. omn. Partic. Observ. II. Inter has aliasque observationes, ac dimensiones, quæ nostra ætate institutæ sunt, memorabitur semper expeditio, quæ a Regia Parisiensi Academia ad æquatorem & Polarem circulum decreta est. Peruvianum gradum anno 1736 *dimensus est Bougerius. Maupertuisius eodem anno in Lapponia dimensus est Lapponicum, eumque aliter definivit, quam loco ultimo a nobis positus est; sed adhibitis correctionibus, factaque æstimatione errorum talem, qualem posuimus, censet Frisius, cit. loco. Si primum, ac ultimum, id est, Peruvianum, & Lapponicum gradum inter se compares, mox intelliges, ad polos esse gradus longiores, proindeque terrestrem superficiem planiorem, quam circa æquatorem. Gallicum gradum, quem ordine latitudinis locorum* priorem *dixi, in lat.* 43°. 31'. *Cassinus & Caillius determinarunt. Alterum Gallicum Picartus iam dimensus erat, statuitque hexap.* 57060. *Maupertuisius dein post reditum a polari circulo, correctis astronomicis observationibus Picarti statuit hexaped.* 57183. *Cassinus vero, & Caillius Anno*

1740,

1740, in basi a Picarto assumta deprehenso errore, qui compensabat fere errorem alium astronomicarum observationum, meridianum gradum in lat. 49°. 22′ esse voluerunt 57074½ hexap. ut in Cassini opere de meridiana linea videre est. Et quidem correctio hæc baseos quinquies repetita est mensuris intra paucos digitos convenientibus: & cum in suspicionem iterum adducta esset, anno 1756 a Clar. Monnierio, aliisque Academiæ sociis recognita, & confirmata est. Africanum gradum prope promontorium bonæ spei, & in latitudine australi 33°. 18′ itidem Clariss. Caillius dimensus est. Italicus prior in lat. 43°. 1′ debetur Boscovichio & Mairio, qui eam determinationem fuse exposuerunt in opere de expeditione literaria per ditionem Pontificiam. Alterum Italicum ante paucos annos determinavit Clar. Beccaria in lat. 44°. 44′. Germanicus a Clar. Liesganing in Stiria determinatus sepositis inæqualitatibus censetur 57091 in lat. 47⅔°. Denique in Anglia secundum observationes a Nervoodo factas gradus meridiani in lat. 53 censetur hexap. 57300.

II. *Ex motu vertiginis terræ.* Cum terra motu diurno circa axem agatur, uti adhuc posuimus, ac sequenti capite ostendemus, corporum gravitas in æquatore maxime ob maiorem rotationis celeritatem, ortamque vim centrifugam minuitur; quapropter aquæ illic assurgere, circa polos vero dehiscere debent, ut æquilibrium tueantur. Igitur figura telluris nequit esse sphærica, sed sub æquatore protuberans, sub polis compressa. Ac concepit primo Newtonus figuram telluris sphæricam, totamque fluidam; tum vero adiecto motu vertiginis facile vidit, secundum mechanicas leges sphæram in sphæroidem abire debere. "Quod autem
„ telluri, inquit Mac-laurin. Expos. Phil. Newt. L. IV.
„ C. 6. contingeret, si tota fluida esset; id etiam nunc
„ in ea locum habet, etsi alia sit eius conditio. Ete-
„ nim si firma, ac solida illius portio expolita figura
„ destitueretur, & globosa tantummodo esset; oceanus
„ per totum undique tractum sub æquatore diffusus re-
„ giones polares pluribus passuum millibus supra aqua-
„ rum superficiem eminere sineret: cum tamen eas

Digitized by Google

„ non magis supra libellam oceani attolli videamus, „ quam continentes partes æquatori subiectas. „

Newtonus vim centrifugam sub æquatore ad vim gravitatis terrestris ait esse, ut 1 : 289. quæ ratio parum discrepat a nostra. §. CCLXXVI. n. X. Diametrum vero æquatoris ad axem vult esse ut 230 ad 229; alii ut 231 : 230. Gradum per polos transeuntem statuunt hexap. 57493; cuius differentia a Peruviano sive primo post æquatorem meridiani gradu est 740 hex. gradus æquatoris censetur hex. 57247; unde ambitus æquatoris facta multiplicatione per 360, fit 20608920 hex. radius æquatoris 3280108 hex. sive milliarium Italicorum 4293$\frac{1}{3}$, milliari unicuique tribuendo hexapedas 764. Denique semiaxis minor hex. 3265909, & differentia altitudinum terræ supra centrum sub polis & æquatore erit hexap. 14199, sive milliarium 18$\frac{3}{5}$.

§. CCCLI.

Propositio II. *Anomaliæ gravitatis corporum terrestrium, quæ in diversis locis observantur, a lege attractionis mutuæ & universalis, & proxime a figura, & constitutione telluris pendent.* Ostenditur.

I. *Ex figura terræ.* Tellurem ad polos compressam esse, circa æquatorem magis elevatam, supra ostendimus; ac demonstravit primus Mac-laurinus, fluidum homogeneum, cuius particulæ se invicem attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum, si gyret circa proprium axem, debere induere figuram sphæroidis ellipticæ, in qua idcirco gravitas ab æquatore ad polos necessario crescat. Porro hoc incrementum gravitatis ab æquatore ad polos ex longitudine pedis horarii versus polos crescente intelligitur, uti subiecta tabella exhibet concinnata a Cel. Frisio L. II. de gravit. omn. particul. obs. V.

Locus

Digitized by Google

Locus observationis.	Latitudo loci.	Longitudo pend. in lin.	Longitudinis incrementum.
Sub æquatore.	0	439. 21.	0.
Ad Portobello	9°. 34′.	439. 30.	0. 09.
Ad Petit-goave	18. 27.	439. 47.	0. 26.
Ad Prom. B. S.	33. 18.	440. 14.	0. 93.
Romæ.	44. 54.	440. 38.	1. 17.
Parisiis.	48. 50.	440. 67.	1. 46.
Londini.	51. 31.	440. 75.	1. 54.
Petropoli.	59. 56⅔.	441. 23.	2. 02.
Pelli.	66. 48.	441. 27.	2. 06.

Ex his generatim constat, gravitatem corporum terrestrium versus polos crescere, quemadmodum & longitudo pedis horarii crescit; id quod attractioni terræ eam, quam diximus, figuram habentis conforme est.

II. *Ex constitutione telluris.* Etsi textus partium telluris prope superficiem sit inæqualis, nec de interno textu satis constet, utrum non constet orbe interius cavo, aut nucleo uno vel pluribus diversæ fortassis figuræ, positionis, & densitatis, ut adeo incrementum gravitatis satis tuto ex sola figura telluris derivari nequeat, & ad certam continuamque legem revocari; tamen nec quævis texturæ diversitas *sensibilem* gravitatis, & pedis horarii mutationem valet, & reipsa nonnullæ inæqualitates cum lege attractionis universalis cohærentes observantur; uti nunc recensebimus. 1. Observatum est, ipsum situm verticalem penduli a montibus circumpositis turbari posse, & turbari reipsa. Cel. commentatores Principiorum Newtonianorum T. III. p. 44. ostendunt, pendulum ad montis radices positum, cuius massa telluri homogenea, capacitati sphæræ diametri unius leucæ marinæ æqualis est, a directione sua magis, quam unius minuti intervallo vi montis illius retrahi debere. Hæc aberratio sine dubio minuitur, si pendulum ab aliis montibus circumpositis in contrarias simul partes retrahitur, vel si interna constitutio montis, magnis cavernis distincta, aut pyramidalis eiusdem figura, vel aliæ circumstantiæ impediunt, quo minus eiusmodi penduli aberrationes sensibiles fiant. Bougierius & Condaminius, cum propter dimensionem gradus terrestris circa æquatorem inter altissimos, & prægrandes regni Peruviani montes versarentur, capto in Chimboraci monte experimento sensibilem penduli deviationem deprehenderunt. Sæpe etiam catena montium circumpositorum præsto est, quæ situm penduli perturbet: 2. In locis præaltis ob maiorem a telluris centro distantiam minor deprehenditur gravitas, minorque est pedis horarii longitudo. Quiti, quæ urbs 1466 hexap. supra libellam maris attollitur, pes horarius est 438. 88 lin. in vertice montis Pichincha hexapedis 2434 supra eandem libellam, lin. 438. 69. 3. Sub eadem fere latitudine minor observatur gravitas ad litora maris, & maiore adhuc cum discrimine in minoribus insulis, quam in locis terræ firmæ a mari valde remotis, teste P. Georg. Kraz in diss. de gravit. & distant. lunæ. Addit: licet Hafniæ in insula Zelandiæ latitudo latitudinem Lutetiarum septem fere gradibus superet; eodem tamen utrobique horologio oscillatorio adhibito nullum omnino gravitatis discrimen fuit deprehensum: quæ quidem gravitatis anomaliæ aliunde verisimilius peti profecto nequeunt, nisi ab ipsa inæquali partium terræ densitate; prout etiam res ipsa se habet, quando nimirum aqua marina minoris est densitatis, quam partes terræ solidæ, inter quas iterum quoad densitatem datur inæqualitas; unde mirum non est, quod in insulis, & ad litora maris, præsertim si declivitate valde præcipiti in mare descendat, cæteris paribus minor sit gravitas, quam in aliis regionibus terræ firmæ; cui præterea accedit, quod regiones, ex quibus flumina per magnum tractum vehuntur, donec in mare se exonerent, notabiliter ultra libellam maris sint elevatæ; atque hoc ipso anomaliæ gravitatis existere possint.

Exercitationis loco adnectam I. Comparationem vis centrifugæ sub æquatore, & gravitatis corporum ibidem. Ex tempore revolutionis diurnæ, quæ æquabilis est, & ambitu æquatoris invenitur eiusdem arcus, qui intra 1'' per meridianum transit. Inventi arcus quadratum

per

per diametrum æquatoris diviſum exhibet effectum vis centrifugæ (§. CCLXXVI. n. VIII. conſect. 2.) Ex pede horario ſub æquatore in tabella indicato reperitur ſpatium ver vim gravitatis, quæ ſub æquatore eſt, intra 1'' lapſu libero conficiendum ſecundum methodum §. CCLIV. indicatam. Hoc ſpatium ſi comparetur cum effectu vis centrifugæ, rationem inter hanc, & gravitatem ſub æquatore exhibebit. Sit igitur tempus revolutionis diurnæ $23^h.\ 56'.\ 4''. = 86164.$ Ambitus æquatoris = 20608920 hexap. ſive 123653520 pedum. Fiat: ut totum tempus revolutionis ad totum ambitum; ita minutum ſecundum, ad arcum intra id deſcriptum, qui reperitur 1435 ped. quadratum huius arcus (2059225) diviſum, per diametrum æquatoris exhibet eiusdem ſinum verſum ſive effectum vis centrifugæ intra 1''. Quoniam radius æquatoris eſt 3280108 hexap. erit diameter ſi ad pedes reducatur, = 39361296: Igitur facta diviſione erit ſinus verſus & effectus vis centrifugæ intra 1'' = 0. 05232 ped. ſive 7. 537 lin. Reliquum eſt, ut etiam effectus gravitatis terreſtris ſub æquatore, ſive ſpatium intra 1'' conficiendum quæratur. Fiat: ut peripheria 355 ad diametrum 113; ita tempus unius oſcillationis ſive 60''' ad tempus deſcenſus per dimidium pedem horarium ſub æquatore ſeu ad 219, 60. Erit igitur hoc tempus = $19\frac{35}{355}$ ſive $19\frac{7}{71}$. Dein fiat: ut quadratum huius temporis ($\frac{1838236}{5041}$) ad dimidium pedem horarium ſub æquatore (219160) ita quadratum unius minuti ſecundi ſeu 3600''' ad ſpatium eo tempore per gravitatem ſub æquatore confectum, quod reperitur = 2167. 37 lin. Eſt igitur gravitas terreſtris ſub æquatore ad vim centrifugam ut 2167. 37 ad 7. 537 ſive ut 2167370 ad 7537 = 287 : 1 proxime ut reperi §. CCLXXVI n. X.

II. Putant non nulli, ſi omnia corpora in ſe mutuo gravitant, omnia pariter, quæ nos circumſtant, ad ſe invicem accedere, & in cumulum coire debere. Utinam attractionis hoſtes calculos pluſculum adamarent, quam imaginando rem quamvis definirent. Quam celeriter animadverterent levitatem eiusmodi argumentorum, & imaginationis ac præiudiciorum ludibria! ineamus igitur

 ea

ea de re calculum admodum facilem, collocemus in superficie terræ prorsus horizontali, & perfecte lævi binos globos æquales, itidemque perfecte læves eiusdemque, ac tellus nostra habet densitatis; secludamus animo quamvis aeris resistentiam; & comparemus vim, a qua ob attractionem in se mutuam ad accessum determinantur cum vi, qua gravitant in tellurem. Hæ vires sunt directe ut massæ attrahentes, & reciproce ut quadrata distantiarum a centro sphæræ attrahentis; massæ autem globorum homogeneorum sunt ut cubi radiorum ex Elem. Sit igitur radius terræ in æquatore $R = 19680648$ *ped. radius globorum* $r = 1$ *ped. distantia centrorum* $b = 10$ *ped. Vis gravitatis in terram* V; *vis mutua globorum* u; *erit* $V : u = \frac{R^3}{R^2} : \frac{r^3}{b^2} = R : \frac{r^3}{b^2} = 19680648 : \frac{1}{100} = 1968064800 : 1.$ *Quantula est hæc vis mutua globorum relate ad gravitatem in terram! & quantum tempus requiritur, ut motus ea vi genitus sub sensus cadat! Accedat iam inæqualitas superficiei, & asperitas: accedat resistentia aeris; & omnis effectus eiusmodi vis elisæ evanescet. Apposite igitur canit Stayus L. IV. a v. 1701. in hanc sententiam; ineptus sane sit, qui hoc modo censeat impugnari posse gravitatem mutuam generalem, ut esset is, qui muscam non esse gravem in terram censeret ob eam caussam, quod crassum & bene tensum funem, aut tenacem ramum nihil ad sensum videret deprimi ipsa ad eum musca advolante. Sed quæratur tempus, quo eiusmodi globi vel uno pede singuli moverentur seposita omni motus resistentia. Ex §. XCV. n. II. spatia vi acceleratrice diversa intra certum tempus confecta exprimuntur hac formula* $S = VT^2$; *consequenter* $T^2 = \frac{S}{V}$. *Virium valorem supra invenimus; sit spatium* S *gravitate terrestri in æquatore intra* $1''$ *confectum* $= 2167.37$ *lin.* $= 15.051$ *ped. Spatium a globo in mutuo accessu confectum* $S = 1.$ $T = 1''$. *Fiat igitur* $\frac{S}{R} : \frac{s b^2}{r^3}$

=

$$= 1 : \frac{s h^2 R}{S r^3} = \frac{1968064800}{15,051}.$$ *Quartus terminus reperitur* = 130759737, *& exprimit quadratum temporis in minutis secundis computati, quo bini globi uno se utrinque pede accedunt: proinde tempus erit proxime* 11435″, *quod superat horas tres.*

CAPUT V.

De Vero mundi Systemate.

Uti Systema quodvis ex collectione, ordine ac nexu plurium illud constituentium coalescit: sic genuina, ac distincta systematis cognitio non nisi ex cognitionibus singularum partium, ordinis, ac nexus earundem exsurgit. Quapropter si quis recte percepit, quæ de situ ac motu siderum, de mutuis viribus, ac phænomenis inde pendentibus exposita sunt, in ferendo de veritate systematis iudicio haud magnopere loborabit. Quod igitur instar hypothesis primo assumsimus, id ad veram thesin transferri debere nunc ostendemus, ita, ut primo physica argumenta, atque ex ipsa natura, & legibus naturæ petita simus commemoraturi: postea vero, quid respondendum sit auctoritate sacrorum codicum utentibus contra systema terræ motæ, perquisituri simus haud perfunctorie, eum maxime in finem, nequi homines imperiti, & moleste pii atque anxii celeberrimos nostræ ætatis astronomos & mathematicos, viros bonos, ac veritatis studiosos, reique physicæ amplificandæ intentos, cum terram moveri reipsa statuunt, temere iudicent, & condemnent ceu negligentes divinæ auctoritatis, & in invidiam apud plebem, & vulgus literatorum vocent; qua quidem re multo gravius certiusque contra naturalem caritatis legem peccant, quam ii, qui retento systemate terœ motæ verbis scripturæ commodam, aptamque interpretationem adhibere conantur.

§. CCCLII.

Propositio I. *Systema terræ motæ pro vero, ac genuino systemate, quod reipsa obtinet in natura, tenendum est.* Ostenditur. Sine dubio illud præ cæteris systema pro vero ac genuino tenendum est, quod cum uni-

univerſali ac perpetuo operandi modo, & velut nativa indole totius naturæ: quodque cum generalibus eiusdem legibus, & cum peculiaribus phænomenis ita conſentit, ut oppoſitum ſyſtema cum his omnibus minime conciliari queat. Atqui ſyſtema terræ motæ cum operandi modo & indole totius naturæ, cum legibus eiusdem & peculiaribus phænomenis ita conſentit, ut ſyſtema terræ quieſcentis cum his conciliari haud queat: igitur ſyſtema terræ motæ pro vero ac genuino ſyſtemate, quod reipſa obtinet in natura, tenendum eſt. Singula propoſitionis aſſumtæ membra deinceps exponemus.

§. CCCLIII.

I. *conſenſus ſyſtematis terræ motæ cum univerſali, ac perpetuo operandi modo, & velut nativa indole totius naturæ.* Operandi modus, ac indoles naturæ maxime in ſimplicitate ſita eſt; id quod §. l. ceu princeps philoſophandi lex, a me fuit expoſitum: Natura enim nihil agit fruſtra: nec rerum ſuperfluis cauſſis luxuriat; dicunt utique philoſophi: fruſtra fit per plura, quod fieri poteſt per pauciora. In ſyſtemate terræ quieſcentis, fruſtra, id eſt, ſine ſufficiente ratione, & contra naturæ ſimplicitatem plura ſtatuuntur centra motuum cœleſtium, nimirum terræ, quæ ſit centrum motus lunæ, ac ſolis, imo innumerabilium ac vaſtiſſimorum ſolium nempe omnium fixarum: dein ſol tanquam centrum reliquorum planetarum, cometarumque. Siquis numerum, diſtantiam, vaſtitatem tot ſolium ſive fixarum comparet cum parvitate noſtræ telluris; nunquam inducet animum, tot tantaque corpora tantis intervallis diſſita circa punctum aliquod, quale terra noſtra reſpectu horum corporum recte habetur, intra 24 horas celeritate incredibili converti. At in ſyſtemate terræ motæ ſimpliciter ac plane contingunt omnia; ſi enim terræ tribuuntur legitimi motus, ii motum adparentem inducunt in omnes fixas, cometas, planetas. Ac *primo* ob motum *diurnum* terræ ab occaſu in ortum circa proprium axem, qui fit tempore $23^{h}.\ 56'.\ 4''.$ omnia extra tellurem ſita adparent motu contrario translata

ab

ab oriente in occidentem circa eundem axem, quem productum concipimus usque ad immensæ sphæræ superficiem; qui axis cum sit inclinatus ad planum eclipticæ, astra omnia diurno motu adparent translata ab oriente in occidentem in circulis inter se parallelis sed inclinatis ad planum eclipticæ. Sola igitur axis terrestris libratione motus diurnus innumerabilium, maximorumque corporum circa tellurem nostram tollitur. *Secundo.* Si terra instar alterius planetæ e. g. Martis vi projectionis & gravitatis in solem circa eundem movetur, (qui dicitur *motus annuus* telluris) apertissime intelligitur, cur sol motu annuo in ecliptica videatur moveri. Si enim reipsa terra movetur in ecliptica, locus geocentricus solis, sive is, in quo sol e terra visus conspicitur, semper & necessario oppositus est telluris loco heliocentrico, sive loco, quem terra occupat e sole visa. Hinc uti annuo motu hic telluris locus mutatur; ita pariter mutatur & ille; ac sol nobis videtur describere ellipsin æqualem illi, quam terra describit circa solem, sed positam situ, contrario ita ut terra in principio arietis existente sol adpareat in libra, eaque per 30 gradus ad taurum progressa, sol in scorpione conspiciatur; atque ita porro; cumque sol non in centro, sed in foco ellipseos a terra descriptæ versetur, ac telluris motus sit inæquabilis; intelligi potest, cur ab æquinoctio verno ad autumnale plures sint dies, quam ab hoc ad æquinoctium vernum; sol igitur longiore tempore in signis borealibus, quam australibus conspicitur, propterea quod terra in his longiore tempore versetur, tardiusque incedat, quam in illis. Discrimen temporis æstivi ab hyberno est 8 dierum. *Tertio.* Quoniam axis terræ in ecliptica progredientis proxime parallelus manet seclusis perexiguis motuum perturbationibus, idemque ad eclipticam est inclinatus, vicissitudines tempestatum, quas observamus, & incrementum, ac decrementum dierum, noctiumque necessario consequuntur. Sit enim (F. XIX.) Sol in S; circa quem in orbita elliptica periodum annuam conficiat tellus. Sit huius axis P p, qui in diversis orbitæ punctis sibimet maneat parallelus: P sit polus borealis, & p australis: æ q sit æquator: C D, E F circuli æquatori paralleli, alter respondens tropico cancri, alter tropico capricorni. Ponatur terra in signo libræ ♎; adparebit sol in ariete ♈ principio veris, & in ipso æquatoris æ q plano, & illuminabit hemisphærium P q p. Si iam terra in eo situ rotetur circa axem P p, dies noctibus ubique terrarum æquabuntur. Terra progrediente in signum capricorni ♑ sol conspicietur in solstitio æstivo, & signo cancri ♋, simulque ad perpendiculum incumbet tropico cancri in D, ac collustrabit hemisphærium m P n, diesque versus boream longissimos, versus austrum brevissimos efficiet; quod facile intelligitur, si tellus in eo situ concipiatur converti circa axem P p. Hinc digressa tellure in signum ♈ sol videbitur in signo libræ ♎, & æquinoctio autumnali, in quo, perinde ut in verno, dies noctibus æquales erunt. Demum si attingit signum cancri ♋, adparebit sol in signo opposito capricorni ♑, & solstitio hiberno, cumque in ea positione ad perpendiculum incumbat tropico australi in C, versus polum australem dies longissimos atque æstatem, versus borealem brevissimos, & hiemem efficiet. *Quarto* denique in Systemate terræ motæ haud ægre intelligitur, cur in tellure versantibus nobis planetæ tam superiores, quam inferiores nunc directe progredi in orbita, nunc stare aliquamdiu nunc etiam contra seriem signorum regredi videantur, etsi iidem reipsa semper directi sint. Neque eorum orbitæ in varias complicatasque spiras, uti in systemate terræ quiescentis, conformandæ sunt. Eiusmodi adparentes stationes, & retrogradationes planetarum generatim pendent ex combinatione motus, quem habent circa solem, cum motu, quo tellus nostra circa eundem transfertur; cum enim tellus longiore tempore, quam inferiores planetæ, ac breviore quam superiores periodum annuam conficiat, eosdem nunc præcedit, nunc sequitur, ac vario respectu eorum situ nunc ad hoc, nunc ad aliud cæli punctum refert. Quæ quidem res obvio schemate passim demonstrari solet.

§.

Digitized by Google

§. CCCLIV.

II. *Consensus systematis terræ motæ cum generalibus legibus naturæ.* Legem attractionis mutuæ, & universalis, itemque Keplerianas regulas in toto systemate solari obtinere, tot tantisque argumentis constat, ut de ea re nemo peritus dubitare iam queat. Quid igitur? solane tellus hac gravitate carebit, tellus inquam, nostra, in qua eandem reipsa præsto esse, maris æstus luculentissime demonstrat? si autem tellus in planetas, & in solem maxime attrahitur; qua ratione eidem vis proiectionis denegabitur, quæ in systemate copernico-Newtoniano ne a sole quidem abesse potest? Si terra vi proiectionis caret, & in solem gravitat; quid retinet eandem, quo minus dudum in solem delapsa sit? quis non videt; aut convellendam esse attractionis legem, quæ experientia & matheli, id est, firmissimo, & inconcusso fundamento nititur; aut terræ motum annuum esse tribuendum. Regula Kepleriana tertia, vi cuius quadrata temporum periodicorum in corporibus circa idem centrum revolutis, sunt ut cubi distantiarum, quas habent singula ab eodem centro, omnino generalis est, & perinde a planetis secundariis respectu sui primarii, quam a primariis respectu solis observatur. Hæc autem regula sublato motu annuo terræ invita natura tollitur. Moveatur enim non modo luna, verum sol quoque circa terram, sitque tempus periodicum lunæ = 27 dies; eius quadratum 729; tempus periodicum solis 365 d. Quadratum 133225. Distantia lunæ a terra 60 semid. Fiat secundum regulam Keplerianam: ut quadratum temporis periodici lunæ (729) ad quadratum temporis periodici solis (133225) ita cubus distantiæ lunæ a terra (216000) ad cubum distantiæ solis 39474074; cuius radix ipsam solis distantiam exhibens nequidem 350 semidiametros efficit; cum tamen distantia solis ultra 20 millia semidiametrorum ascendat. Similiter si assumta solis distan= 20000, & distantia lunæ = 60 semid. & huius tempore periodico = 27 d. quæratur secundum regulam Kepleri tempus periodicum solis; id eiusmodi reperi-

ritur

Digitized by Google

ritur, quod a veritate longissime abhorret; fiat enim: ut 216000 ($= 60^3$) ad 8000000000000 (20000^3) ita 729 (27^2) ad quadratum temporis periodici solis $= 27000000000$; cuius radix exprimens tempus periodicum solis in diebus computatum proxime est $= 164316$; quod ultra 450 annos efficit. Patet igitur, quantopere systema, vel potius hypothesis terræ quiescentis, & solis circa terram moti a generalibus naturæ legibus alienum sit; contra motum terræ instar alterius planetæ primarii gyrantis circa solem cum iisdem penitus consentire, supra demonstratum abunde est.

§. CCCLV.

III. *Consensus systematis terræ motæ cum peculiaribus phænomenis naturæ. Peculiaria phænomena* appello, quæ Astronomia adcuratius exculta primum detecta sunt, vel quorum explicationem desperavit antiquitas. Cuiusmodi sunt *primo* adparentes quidam Fixarum motus, qui a præcessione æquinoctiorum, & *nutatione* axis terrestris pendent, & cum motu terræ ac systemate attractionis connexi sunt. *Secundo* perturbationes motus planetarum, uti motus nodorum, apheliorum &c. qui explicatum non habent, nisi etiam telluri vis attractiva concedatur. *Tertio* inæqualitates lunæ, quæ cum nulla hypothesi ab astronomis ante excogitata complanari potuerit, sola attractionis lege certis calculi legibus adstringuntur. *Quarto* æstus maris, cuius explicationem cum infeliciter, & plane irrito conatu ante Newtonum inquisiissent Philosophi, ipsi Philosophiæ, ut Mac-laurinus inquit, imbecillitatem exprobrare videbantur; sed quæ ab illustri hoc viro ex inæquali gravitatione partium terræ in lunam ac solem summa cum evidentia deducta est. Deprehensa autem hac terræ gravitate in solem & lunam, quo iure, aut quo doctrinæ ordine eiusdem motus annuus negari, vel etiam in dubium vocari possit, haud sane video. *Quinto* denique inter peculiaria phænomena maxime censenda est aberratio annua fixarum, quæ non nisi in systemate terræ motæ aptam & cohærentem rationem habet. Deprehensæ nimirum sunt in stellis fixis diversis

anni

anni temporibus obſervatis quædam loci mutationes, quarum explicationem, & theoriam ex ſucceſſiva luminis propagatione, & motu annuo terræ Bradleius prodidit cum phænomenis mirum in modum conſentientem. Feratur (F. XX.) radius ad A directione L P A; & ſit B A ad P A, ut eſt celeritas oculi ad celeritatem luminis, ut B A ſpatium ſit confectum ab oculo, P A ſpatium intra idem tempus confectum a radio. Ducta P Q parallela & æquali rectæ B A compleatur parallelogrammum B A P Q. Motus P A radii reſolvetur in P Q & P B, vel Q A; prior motus P Q; cum ſit æqualis & parallelus motui ſpectatoris B A, percipi non poteſt; Sola igitur celeritas radii per Q A expreſſa ſenſibilis evadet, ita ut radius ad oculum ſpectatoris ex B in A delati pertingat directione Q A. Unde is ſidus, cuius radium percipit, ad extremitatem lineæ A Q referet, idque in O exiſtere iudicabit. Diſtantia directionis veræ radii a directione viſa, erit angulus L A O, qui *angulus aberrationis*, vel *aberratio luminis* dicitur, & aliquando ad 20 minuta ſecunda pertingit. Quam certum eſt hoc aberrationis ſiderum phænomenon; tam apte, arcteque cum motu annuo terræ id cohærere conſtanter deprehenditur.

Hæc ſunt momenta ſyſtematis terræ motæ; quod copernicanum vulgo dicitur: rectius copernico - Newtonianum *vocatur. Copernicus enim ſolem fixit immotum in centro: Newtonus huic quoque vim proiectionis tribuit; ſed quæ ſenſibilem mutationem poſitionis vix inducere valet, cum centrum commune gravitatis a ſolis centro haud longe abſit. Argumenta phyſica, quæ contra telluris motum allata ſunt, tam parum ponderis habent, ut ea vel recenſere prope pigeat. Aiunt: ſi terra circa axem volvitur in ortum, nubes viderentur contraria directione ferri in occaſum: aves ex nidis avolantes tellure interea converſa eosdem poſtea reperire haud poſſent. At enim is motus omnibus corporibus in eius ſuperficie poſitis, ipſique atmoſphæræ ambienti, ac nubibus vel avibus in ea exiſtentibus communis eſt, neque comparativum eorum corporum ſitum immutat: uti in ſole contingeret, ſi moveretur eo, quo Tychonici volunt, modo; atmoſphæra enim una cum nubibus ſeu maculis circa axem convertitur eodem,*

quo

Digitized by Google

quo massa solaris, tempore. 2. Si terra in orbe annuo incedens ad quasdam fixas nunc propius accedit; aliis longius recedit; cur eæ in minore distantia non maiores, in maiore non minores, adparent? R. quia tanta est fixarum distantia, respectu cuius etiam diameter orbitæ terrestris evanescit. 3. Hæc distantia, quæ fixis tribuitur, plane enormis est, & supra fidem. R. iis, qui contemplatione naturæ, diligenteque studio extenderunt ideas suas, & cogitandi vim, haud enormis, multo etiam minus incredibilis videtur ea fixarum distantia, quanta quanta est, nec vero angustis limitibus phantasiæ res constringendæ sunt, sed secundum experientiæ, & rationis normam dimetiendæ. Porro cum experientia, & ratiociniis inde deductis plane consentit vastitas illa cælestium spatiorum, & magnitudo distantirum, queis stellæ fixæ a nobis removentur. Sed nulla est hæc distantia ad immanem celeritatem, quam innumerabilibus sideribus tribuunt, qui terram, quam incolunt, quietam volunt. 4. Si terra agitur in orbem, corpora in superficie posita, ipsique homines ob vim centrifugam in spatia inania excuti deberent. R. multo maior vi centrifuga vis gravitatis est (§. CCLXXVI. n. X.) Hæc quidem omnia, quæque sunt generis istius, systemati terræ motæ nihil officiunt: magis obstant præiudicia infantiæ, ac sensuum. Fac hominem in vasta navi, & æquabiliter citra concussionem progrediente natum, educatumque esse, qui nunquam ad obiecta in litore vel continenti posita antea oculos convecterit; profecto haud facilius ei persuadebis, hanc navim, seque una moveri, quam alium sensibus suis quidvis metientem inducas, ut se una cum tellure, in qua degit, revolvi assentiatur. Reliquum est, ut de auctoritate sacri codicis, quatenus ad institutum pertinet, disseramus.

§. CCCLVI.

Propositio II. *Neque ex fine S. scripturæ, neque ex verbis eiusdem in se spectatis, vel prout iacent, neque ex ullis adiunctis vel circumstantiis quidquam legitime concludi posse pro motu solis, & quiete terræ videtur.*

Digitized by Google

I. *Finis S. scripturæ*, ac divinæ revelationis haud erat, ut Philosophiam, ac Mathesin instructore spiritu Sancto, sed ut dogmata religionis, morumque integritatem doceremur. Id S. Augustinus locis pluribus exponit, inprimis L. II. de Genes. ad literam c. 8. *quæri etiam solet, quæ forma, & figura cæli credenda sit secundum scripturas nostras. Multi enim multa disputant de iis rebus, quas maiore prudentia nostri Maiores omiserunt, ad beatam vitam non profutura discentibus, & occupantes, quod peius est, multum pretiosa, & rebus salutaribus impendenda temporum spatia. Quid enim ad me pertinet, utrum cælum, sicut sphæra undique concludat terram in media mundi mole libratam; an eam ex una parte desuper velut discus aperiat? - - - breviter dicendum est, de figura cæli hoc scisse auctores nostros* (sacros intelligit, & a Deo inspiratos) *quod veritas habet, sed spiritum Dei, qui per ipsos loquebatur, noluisse ista docere homines nulli saluti profutura.* Animadverte, Augustinum testari, maiores suos, id est, Patres antiquiores, & Præsules ecclesiarum, qui conservandæ puritati fidei, ac morum certe omni studio incumbebant, istiusmodi res naturales haud examinasse; nec vero id eorum muneris esse. Imo idem S. Doctor aperte, ac sollicite monet, ut ad probandas res naturales, vel impugnandas verba divini codicis temere non adhibeantur, ne eadem aliorum ludibrio exponantur. Eodem L. c. 18. inquit: *in rebus obscuris, atque a nostris oculis remotissimis, siqua inde scripta etiam divina legerimus, quæ possint salva fide, qua imbuimur, alias, atque alias parere sententias, in nullam earum nos præcipiti adfirmatione ita proiiciamus, ut si forte diligentius discussa veritas eam recte labefactaverit, corruamus: non pro sententia divinarum scripturarum, sed pro nostra ita dimicantes, ut eam velimus scripturarum esse, quæ nostra est: cum potius eam, quæ scripturarum est, nostram esse velle debeamus.* Sequenti capite, quas res *obscuras* denotat, explicat: *Plerumque accidit, ut aliquid de terra, de cælo, de cæteris huiusmodi mundi elementis, de motu & conversione, vel etiam magnitudine, & intervallis siderum, de certis defectibus solis & lunæ, de circuitibus annorum, & temporum, de naturis animalium, fruticum,*

cum, lapidum, atque huiusmodi cæteris, etiam non Christianus ita noverit, ut certissima ratione, vel experientia teneat. Turpe autem est nimis, & perniciosum, ac maxime cavendum, ut Christianum de his rebus, quasi secundum christianas literas loquentem ita delirare quilibet infidelis audiat, ut, quemadmodum dicitur, toto cælo errasse conspiciens, risum tenere vix possit. Et non tam molestum, quod errans homo deridetur, sed quod nostri auctores ab eis, qui foris sunt, talia sensisse creduntur, & cum magno eorum exitio, de quorum salute satagimus, tanquam indocti reprehenduntur, atque respuuntur. Cum enim quemquam de numero Christianorum in ea re, quam optime norunt, errare deprehenderint, & vanam sententiam suam de nostris literis asserere; quo pacto illis libris credituri sunt de resurrectione mortuorum, & de spe vitæ æternæ, regnoque cælorum, quando de iis rebus, quas iam experiri, vel indubitatis numeris percipere potuerunt, fallaciter putaverint esse conscriptos. Quid enim molestiæ, tristitiæque ingerant prudentibus fratribus temerarii præsumtores, satis dici non potest; cum, si quando de prava, & falsa opinione sua reprehendi, & convinci cæperint ab iis, qui nostrorum librorum auctoritate non tenentur, ad credendum id, quod levissima temeritate, & apertissima falsitate dixerunt, eosdem libros sanctos, unde id probent, proferre conantur.

§. CCCLVII.

II. *Verba S. scripturæ in se spectata, vel prout iacent*, vulgari loquendi modo, & captui vulgi sunt adcommodata. Nihil igitur ex nuda litera legitime concluditur, ac multis exemplis illud comprobari potest. Nam 1. in S. codice Deo tribuitur corpus, membra, animi perturbationes, operationes humanæ: brutis intelligentia, spiritibus aliis sensus. 2. Prædicuntur stellæ de cælo lapsuræ; alludendo ad ea, quæ adparent: neque enim in terram plures stellæ possunt cadere, cum omnes fere magnitudine terram superent. Fortassis ea, quæ in epist. S. Judæ c. 1. v. 13. dicuntur *sidera errantia*, sidera non sunt, sed meteora, & inflammationes atmosphæræ. 3. S. Thomas I. P. Summæ Q. 70. Art.

1.

1. ad 3. de motu sphærarum ait: *Moyses rudi populo condescendens sequutus est, quod sensibiliter adparet.* 4. Dionysius Petavius (cuius viri quanta auctoritas sit, ii duntaxat ignorant, qui nullas pæne novere disciplinas) in Præf. ad libros de Opificio 6. dierum, antequam ad explicandam rerum creationem adgreditur, duplicem cautionem, ac regulam sibi præscribit: *Primo Rerum olim reipsa, vereque gestarum historiam in Moysis enarratione contineri: non allegoriis adumbratos, & involutos nescio quos sensus spiritualium rerum, corporeque carentium. Secundo in iis ipsis naturalibus & corporeis exponendis rebus Moysen rudis hebetisque populi ad captum, & ingenium temperavit stilum.* Infra idem repetit: *Hæc mea perpetuo sententia fuit, omnia fere, quæ hic Moyses attigit, popularem ad usum esse loquendi, intelligendique demissa.*

§. CCCLVIII.

III. *Circumstantiæ* nullæ sunt, ex quibus coniectura fieri queat, divinum spiritum de quiete vel motu solis quidquam significare hominibus ex instituto, vel ultra captum vulgi voluisse. Id palam fiet ex ipsis verbis S. codicis.

Primo L. Jos. c. 10. v. 13. ingens prodigium narratur, quod ad preces & prope ad imperium Josue contigit, obediente Deo voci hominis; dixerat enim: *sta sol; steteruntque sol & luna. - - - Stetit itaque sol in medio cœli, & non festinavit occumbere spatio unius diei.* Si Josue Astronomus, si Copernicanus, si Newtonianus extitisset, profecto haud aliter fuerat loquuturus, quam reipsa loquutus est. Quid igitur ex eius verbis contra Astronomos, Copernicanos, Newtonianos efficies? Ipsi Astronomi, qui de motu terræ certam, exploratamque cognitionem habent, tamen ortum solis, occasum, declinationem versus Boream & Austrum & quæ sunt istius generis, sæpissime in ore habent, idque ipsum in Tabulis & Ephemeridibus exprimunt. *Quanto igitur minus*, Keplerus inquit in Epit. Astron. ad fin.

Digitized by Google

fin. L. I. *exigendum erit a scripturis divinitus inspiratis, ut repudiata vulgari loquendi consuetudine, verba sua ad scientiae naturalis amussin adpendant, abstrusisque & importunis loquutionibus, de rebus ultra captum erudiendorum, populum Dei simplicem perturbent, eaque re viam ipsis ad scopum suum genuinum longe sublimiorem intersepiant.*

Secundo. Eccli. I. *Generatio advenit, generatio praeterit: terra autem in aeternum stat. Oritur sol, & occidit, & ad locum suum revertitur, ibique renascens gyrat per meridiem, & flectitur ad aquilonem: lustrans universa in circuitu pergit spiritus, & in circulos suos revertitur. Omnia flumina intrant in mare, & mare non redundat. Ad locum unde exeunt, flumina revertuntur, ut iterum fluant.* Agitur hoc loco de fluxo & caduco rerum mundanarum statu; ac primo velut thesis statuitur: omnia, quae ab hominibus in hoc mortalitatis statu quaeruntur, & amantur, transeuntia sunt, & caduca, & penitus vana: *vanitas vanitatum, & omnia vanitas*, id est, *maxima* est vanitas rerum in hoc statu. Haec thesis deinde inductione & enumeratione rerum singularium illustratur, ac primo ex successione generationum: generatio praeterit: generatio advenit: terra autem in aeternum stat: quasi diceret: omnes generationes a mundi exordio adhuc praeterierunt sola terra manente, quam & progenitores nostri pridem mortui incoluerunt; & nos pariter morituri nunc incolimus. Adposite Hieronymus in hunc locum: *Quid hac vanius vanitate, quam terram manere, quae hominum caussa facta est: & ipsum hominem terrae dominum in pulverem repente dissolvi.* Non igitur absoluta telluris quies hoc loco indicatur, neque eius motus excluditur, sed permanentia terrae ceu habitationis nostrae opponitur perenni successioni habitatorum eius. Dein Ecclesiastes thesin suam probat tum ex diurna mutatione dierum, & noctium, tum ex annua vicissitudine temporum, veris, aestatis, autumni, hyemis; dicitque: *Oritur sol, & occidit, & ad locum suum revertitur, ibique renascens gyrat per meridiem, & flectitur ad aquilonem;* Scopus quidem sacri concionatoris perinde obtinetur, sive adparentem sive verum

motum

motum solis intelligas; utroque enim modo vicissitudo & mutatio rerum elucet. In Hebræo sententia est istiusmodi: *sol oritur & occidit, & ad locum suum anheus it.* Dictum poetice, cui affine est illud Catulli L. 2. *solis anhelantes abluit amnis equos.* Ea igitur spectatis omnibus adiunctis mens est Ecclesiastis, ut ex temporum mutatione mortalitatis nos commonefaciat, non ut de cursu siderum, & mundi systemate informet. In eandem sententiam Plinius L. 2. C. 12. ait: *quis cernens statos siderum labores, non suæ necessitati mortalis genitus ignoscat.* Deinceps ait Ecclesiastes: *lustrans universa in circuitu pergit spiritus, & in circulos suos revertitur.* Id ad ventos, eorumque directiones identidem mutatas non pauci referunt. Alii ad solem, de quo antea agebatur, adcommodant, qui cum luce & calore suo rebus vitam & quodam modo animum impertiatur, eo sensu spiritus dici potest præsertim spectata VV. opinione, qui astra animata existimabant. Hinc Virgil. L. 6. Æneid. *lucentemque globum lunæ, titaniaque astra spiritus intus alit.* Aliud inconstantiæ rerum argumentum aut symbolum ex lapsu fluminum petitur: *Omnia flumina intrant in mare, & mare non redundat: ad locum unde exeunt, flumina revertuntur, ut iterum fluant.* Ex philosophis iis quoque, qui terram quietam faciunt, plerique docent, nequaquam sic e mari exire flumina, uti intrant; sed mare, aiunt, vaporibus materiem suppeditare, ex quibus in alias regiones per ventos avectis pluviæ, nives, glacies, ros & pruina existant, quæ in hydrophylacia colligantur & fontes, scaturigines pariant. Dum in Hebræo legitur: *torrentes* in mare redeunt, indicatur præceps vitæ humanæ lapsus instar torrentis celeriter decurrentis: ea autem verba: *mare non redundat,* indicio nobis sunt, terram maxima cadaverum strage, quam excepit iam sinu suo, & indies excipit, nunquam expleri posse. Concinne Augustinus in Psal. 109 ait. *sicut torrens pluviatilibus aquis colligitur, redundat, perstrepit, currit, & currendo decurrit, id est, cursum finit: sic omnis iste mortalitatis cursus. Nascuntur homines, & moriuntur: & aliis morientibus alii nascuntur, succedunt, accedunt, discedunt, nec manebunt.* Denique Ecclesiastes v. 8 ait: *cunctæ res difficiles, nec potest homo eas expli-*

 pli-

Digitized by Google

plicare sermone, q. d. In omnibus hisce naturalium rerum mutationibus, & iugi siderum, aeris, ventorum aquarum vicissitudine tanta inest obscuritas, ut vel doctissimus quisque ignorantiam suam sæpe fateri cogatur, & quo plura animo comprehendit, eo maiora sibi discenda esse cognoscat: *non satiatur oculus visu, nec auris auditu impletur.* Nempe istiusmodi res suo quisque ingenio studioque, non divina revelatione discere debet.

Tertio Psal. 92. *Firmavit orbem terræ, qui non commovebitur.* Psal. 103. *Fundasti terram super stabilitatem suam.* Istiusmodi verba duntaxat permanentiam telluris, ac durationem indicant, ut supra expositum est. Unde Prov. 8. v. 28 *æthera*, id est, cælos *firmavit sursum*, & scriptura *firmamentum cœli* sæpe commemorat; quod tamen ad præcipitem motum concitant, qui telluris motui repugnant. *De motu etiam cœli,* inquit S. Augustinus libro cit. c. 10. *non nulli fratres quæstionem movent, utrum stet, an moveatur: quia si movetur: inquiunt, quomodo firmamentum est? si autem stat, quomodo sidera, quæ in illo fixa creduntur, ab oriente usque ad occidentem circumeunt, septentrionibus breviores gyros iuxta tardines peragentibus? - - quibus respondeo, multum subtilibus & laboriosis rationibus ista perquiri, ut vere percipiatur, utrum ita, vel non ita sit; quibus ineundis atque tractandis nec mihi iam tempus est, nec illis esse debet, quos ad salutem suam & sanctæ Ecclesiæ necessariam utilitatem cupimus informari - -* Ecce! subtilibus, inquit, rationibus, non sententiis divinæ auctoritatis istiusmodi res perquirendæ sunt; nec eæ omnino ad sacrum tribunal pertinent. Adiungatur huic effato auctoritas S. Thomæ Theologorum Scholasticorum principis, nec magis divino ingenio, quam prudentia, & modestia ubique spectabilis. Opusc. 10. interrogatus de quibusdam articulis ad res physicas pertinentibus ait: *multum nocent talia, quæ ad pietatis doctrinam non spectant, vel asserere vel negare quasi pertinentia ad sacram doctrinam. - - - Unde mihi videtur tutius esse, hæc, quæ Philosophi communiter senserunt, & nostræ fidei non repugnant, neque sic asserenda esse ut dogmata*

ta

Digitized by Google

ta fidei, neque sic neganda, tanquam contraria, ne sapientibus huius mundi contemnendæ fidei occasio præbeatur. Eodem Opusc. art. 16. ait: spectato pondere telluris angelum eidem movendæ parem esse: nihilominus non posse terram ab eo ita moveri, ut universi ordo perturbetur: *quia nulla virtus creaturæ potest immutare ordinem principalium partium universi.* Addit: *Si autem quæritur de motu circulari, per quem dictus ordo non variatur, videtur, quod naturaliter terra quiescat, ut vult Philosophus in libris de cælo.* Ita terræ quietem probaturus S. Thomas non scripturarum loca, non Patrum sententias promit, sed lectores suos ad Aristotelem dimittit, hominem videlicet erroribus obnoxium, & astronomiæ physicæ penitus ignarum.

§. CCCLIX.

Respondetur ad Obiectiones.

I. Aiunt: *Verba S. Scripturæ in sensu proprio accipienda sunt, nisi evidens ratio naturalis, aut Ecclesiæ interpretatio obsistat.* R. verissimum id quidem in rebus fidei & morum; At in aliis rebus naturalibus, astronomicis, geographicis, chronologicis, ut a proprio sensu recedamus, gravis, & valida ratio sufficit, præsertim si pondere suo hominem peritum convincat. De hac regula (verba scripturæ in sensu proprio accipienda sunt) cel. Auctor de moderatione ingeniorum in negotio religionis in hunc modum disserit L. I. C. 21. *Hoc tam latum, & generale axioma nescio quam opportune inculcetur. Certe quantum fieri potest, retinere & consectari debemus literalem proprium Scripturæ sensum. Verum prope innumera ibi sunt de rebus ad salutem non necessariis seu dicta, seu phrases seu verba, quibus neque fidei neque ecclesiæ placita neque naturalis lux palam repugnat; & tamen in sensu naturali ac proprio a SS. Patribus aliisque catholicis interpretibus non accipiuntur. Ut aliter ista explicentur, atque accipiantur, quam prima facie accipienda videantur, sufficit, ut id probabilior aliqua ac verisimilior ratio suadeat, petita e liberalibus disciplinis,*

Digitized by Google

nis, & profanis historiis, e populorum moribus, aliisque etiam minus certis fontibus, & sit non violenta sed naturalis, atque in aliis similibus locis usitata, & probata interpretandi ratio. Si maxime proprio sensui inhærendum est, motum terræ ex ipso sacro codice denique quis eruet. Commemorat enim is non uno loco *cardines* terræ, quos græci πολους vocant, quod nomen relativum est, & rem versatilem ac mobilem sibi impositam proprie denotat. In Psal. 135 Deus *firmavit terram super aquas*, an igitur terra aquis incumbit? Iob. 37. cæli dicuntur *solidissimi quasi are fusi.* Art. 27: circa mediam noctem suspicabantur nautæ adparere sibi aliquam regionem: in fonte græco extat *adpropinquare*; verene, an secundum adparentiam sensuum, uti fit in motu adparente solis? Sed pertexamus verba doctissimi Auctoris cit. loc. *Non ideo omnes scripturæ interpretationes reiiciendæ, quia demonstratione caret ratio ita interpretandi; alioquin de commentariis SS. PP. aliorumque interpretum actum esset, eandem interdum sententiam varie atque opposite in huiusmodi locis exponentium - - - copernicani systematis rationes, etsi nequaquam demonstrativæ sunt, eæ tamen sunt, quæ dubium faciunt scripturæ sensum - - quid si aliquando hæc demonstratio a sollertibus Astronomis, & Philosophis adinveniretur? nonne tum certum foret, interpretationem propositam non solum tolerabilem, & æquam, sed etiam necessariam esse; At quis non videat, periculosissimum, atque a religionis ecclesiæque institutione alienum esse, velle id nunc pertinere ad fidem, quod cras pertinere non possit? fides, atque stabilitas credendorum in ecclesia Christi, absit, ut ab humanis experimentis pendeat.*

II. Patres & Ecclesiæ Doctores verba scripturæ de motu solis, & quiete telluris interpretati sunt. R. Patres res ex instituto haud examinasse testis locupletissimus est S. Augustinus, cuius verba supra recitavi. Sed audiatur denuo Auctor de mod. Ingen. in negotio religionis: *Nescio, quo plausu excipiendi sint illi, qui in Physicis, in historiis profanis & huiusmodi argu-*

mentis

Digitized by Google

mentis Augustinum, Thomam, Bonaventuram, aliosque sanctitate simul & eruditione celebres viros producunt, rati, se istorum auctoritate firmissimum suis sententiis comparasse praesidium. At sancti Patres in hisce artibus humanis ac scientiis non Christum, sed Platonem, sed Avincennam, homines videlicet impios aut caecos habuere magistros, aut suum intellectum fallacem, aut alios homines erroribus obnoxios sequuti sunt. Quid ergo hic certi a SS. Patribus polliceri tibi possis? tantum sane eorum dicta valebunt apud cordatos viros, quantum rationibus, & robustissimis neque fallacibus argumentis nitentur. Praeterea non hoc suae Ecclesiae, non conciliis, SS. Patribus dedit Christus, ut populum fidelem astronomum facerent, physicesve, chronologiae, historiae profanae, rerumque similium sine ullo errore peritum. In Crucifixi schola satis est docere, satis ediscere, quae vere de religione credenda, quae pie facienda sunt, ut ametur Deus, caelorumque regnum vi beatissima tandem rapiatur. Similia ante cit. auctorem scripsit Melchior Canus L. VII. loc. Theol.

III. Sententia de motu terrae pridem damnata est auctoritate ecclesiastica; & Galilaeus iussus est eam revocare. R. Prohibita ea fuit nempe illo tempore, quo homines ob libidinem novandi etiam res fidei, sacris Scripturis turpissime abusi sunt. Hinc cum systema Copernicanum haud satis congruere cum iisdem videretur, id satis erat, ut quorundam ardor contra eius defensores excandesceret praesertim quia Copernicani eius aetatis nondum in promptu haberent rationes tam validas, & convincentes, quas Newtoniani ex analogia, legibus & phaenomenis naturae hodie adferunt. Nec tamen praetereunda sunt verba Copernici ipsius in Praef. Operis sui ad Paulum III. P. M. ita differentis: *Quamvis sciam, homines Philosophi cogitationes esse remotas a iudicio vulgi, propterea quod illius studium sit, veritatem omnibus in rebus, quatenus id a Deo rationi humanae permissum est, inquirere; tamen alienas prorsus a rectitudine opiniones fugiendas censeo. Itaque cum mecum ipse cogitarem, quam absurdum acroama existimaturi essent illi, qui multorum seculorum iudiciis hanc opinio-*

nionem confirmatam norunt, quod terra immobilis in medio cœli tanquam centrum illius posita sit, si ego contra assererem, terram moveri; diu mecum hæsi, an meos commentarios in eius motus demonstrationem conscriptos in lucem darem. - - - Si forte erunt ματαιολογοι, *qui cum omnium mathematum ignari sint; tamen de illis iudicium sibi sumunt propter aliquem locum scripturæ male ad suum propositum detortum, ausi fuerint meum hoc institutum reprehendere, aut insectari: illos nihil moror, adeo, ut etiam illorum iudicium tanquam temerarium contemnam. - - - - Mathemata Mathematicis scribuntur.*

§. CCCLX.

Scholion Generale.

Plurima sunt, quæ in hanc sectionem atque adeo omnem mechanicam terrestrem, & cælestem adnotari queunt digna sane diligente animadversione, nec ea levis momenti ad naturæ cognitionem augendam, & excolendam mentem, regulasque philosophandi explicandas, & stabiliendas; sed arcti limites operi nostro præfixi manum de tabula removere iubent; Hinc factum est, uti etiam Caillius inquit in animadversionibus ad systema physicum Astronomiæ, *ut nihil adferremus de diversis systematis mundi, quæ vel* Ptolomæi; vel Tychonis *nomine celebrata sunt, quæque nostris temporibus vix alibi locum merentur, quam ut in historiam de diversis hominum opinionibus referantur.* Quæ de sacra auctoritate disputata sunt, cum iis conferantur regulis, quas in Logica de criterio auctoritatis exposuimus. Nam prudentis, ac literati viri est, diligenter investigare, utrumne ita perspicua sint, & extra controversiam posita sacræ scripturæ verba, ut contra regulas Logices, & genuinæ critices, ac contra germanæ interpretationis canones peccetur, siquis systema terræ motæ tueri velit. Copernici quidem opinio vix ab hypothesi differebat: sed quæ Newtoniani de illa re adferunt, ipsius veluti ministerio na-

turæ

Digitized by Google

turæ didicerunt. Inscitæ plebeculæ, & sensuum atque auctoritatis præiudiciis innutritis hominibus ægre persuaderi poterit, terram moveri; nec sane ad æternam ipsorum salutem, vitamque recte agendam ullo pacto id necessarium est.

II. De Lege gravitatis universalis ac mutuæ Caillius loc. cit. ait: " *Consensus admirandus inter*
„ *omnia phænomena cælestia, & calculos ex hac lege*
„ *deductos, Astronomos impulit, ut eam tanquam fun-*
„ *damentum reciperent. Ex hac enim lege infertur,*
„ *corpora omnia nos ambientia debere motu accelerato*
„ *directione ad superficiem telluris perpendiculari descen-*
„ *dere: ex hac discimus, cur luna circa terram volva-*
„ *tur: e combinatis diversis variationibus, quas mutuæ*
„ *solis, terræ, & lunæ actiones pro diverso situ effi-*
„ *ciunt, eo tandem pertigimus, ut lunæ inæqualitates*
„ *omnes certis calculi legibus sint adstrictæ. Nulla hy-*
„ *pothesis, quæcunque adhuc ab astronomis excogitata*
„ *fuit, motus lunares certis regulis subiicere potuit.*
„ *Ex hac eadem lege Saturnus, & Jupiter, aliorum*
„ *planetarum comparatione corpora ingentia, suis inæ-*
„ *qualitatibus sunt obnoxii, lunaribus analogis, tum*
„ *pro diverso situ inter se, tum solis respectu. Deni-*
„ *que huic legi debetur non modo summa accuratio in*
„ *calculo motus planetarum, verum etiam vera cometa-*
„ *rum theoria, ad quam ante Newtonum Astronomo-*
„ *rum nemo ne quidem prope accessit; ita, ut perfe-*
„ *ctioni astronomiæ iam vix aliud optari queat, quam*
„ *observationes a Veteribus relictis accuratiores, quibus*
„ *regulæ ex hac lege deductæ secure adplicari possint,*
„ *indeque elementa vera astronomica theoriæ cuiusvis*
„ *corporis cælestis constitui. Quoniam itaque omnia*
„ *corpora cælestia huic legi subiecta sunt, manifestum*
„ *est, ea debere esse in perpetuo quodam motu, & agi-*
„ *tatione, ut ei, quantum possunt, obsequantur. Sol*
„ *ipse locum quovis momento mutare cogitur, ut tali*
„ *consistat semper, quo planetis in orbitis excentricis cir-*
„ *ca eum gyrantibus sit, quam fieri potest, maxime*
„ *propinquus. Verum ingens eius moles, & distantia*

Digitized by Google

„ *saltem nobis hunc motum reddunt imperceptibilem.*
„ *eadem conformitas inter hanc legem, & cœlestia phænomena ad hanc nos deducit veritatem, cui in systemate physico non minus locus dandus est: nempe medium, in quo corpora cœlestia moventur, nihil eis resistere, quod sentiri possit. Difficultas in assignando huius legis principio vere physico, quin in ea concilianda cum idea, quam velut natura duce habemus, ut existimemus, omnem motum fieri per impulsionem, Philosophos inter se se scidit. Alii eam tanquam absolute cum impulsu pugnantem reiiciunt; alii velut a Deo materiæ auctore primitus constitutam admittunt, & attractionem adpellant. Rectius quis fecerit, si, ut innumeris commodis, quæ hæc lex adfert, fruatur, eam ex inductione omnium phænomenorum cœlestium, nullo prorsus contrario, amplectatur interea, dum seu caussa physica, seu lex vera, cui hæc adeo congruit, detegatur.* „ Consilium viri doctissimi sequutus nihil de natura attractionis, virium attrahentium, & primorum elementorum hoc quidem loco disputo; quia dispiciendum est antea, quænam præterea virium genera, quæve leges virium extent in natura. Iis indagatis omnem illam controversiam unum in locum congeram. Interea attractio instar phænomeni ad certam legem reducti, aut instar generalis legis spectari a quovis potest.

III. Adieci sub finem tabellas geminas, quæ Systema solare, tum particularia systemata Iovis, Saturni, terræ item ac lunæ exhibent. Pleraque ex Cel. Hellio desumsi; rationem axium maiorum, minorum, & excentricitatis ex Caillio, assumto axi maiore ellipseos a terra descriptæ pro communi scala in partes 20000 divisa. Rationem massarum, densitatum, ac gravitatum diversarum in superficie corporum totalium ex Boscovichio exscripsi. Magna hic varietas numerorum apud varios auctores occurrit, quæ sæpe ex parva elementorum calculi differentia nascitur. Sed ad scopum meum satis erat propinqua ratione quadam totam harmo-

niam

Digitized by Google

niam systematis solaris uni velut obtutui subiicere. Modum determinandi massas corporum, circa quae alia volvuntur, exposui §. CCCXXII. Lem. I. Massae divisae per volumina exhibent densitates; sunt enim hae directe ut massae, & reciproce ut volumina: assumit autem Boscovichius in suppl. Phil. Stayan. ad L. V. §. 500. massas solis, Saturni, Iovis ut 199244; 60, 318; 221, 004, & volumina 679056; 382, 833; 768, 833. Inde prodeunt densitates, uti in tabella positae sunt. Porro massae divisae per quadrata semidiametrorum gravitatis vires in superficie exhibent (§. CCCXV. & CCCXVII) Diametros Auctor ponit in hac ratione pro sole 91, 619. Pro Saturno 7, 261. Pro Iove 9, 158. Pro terra 1. Indeque rationem gravitatis acceleratricis iisdem, quos in tabella posuimus, numeris exhibet. Haec animadvertenda erant, ne tabella secum ipsa pugnare censeatur; neque enim in massis, densitatibus, & gravitatis viribus determinandis eadem elementa assumta sunt, quae in tabella extant.

FINIS TOMI II.

O. A. M. D. G.

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA

In Jacobi Zallinger Philosophiæ Tomo secundo.

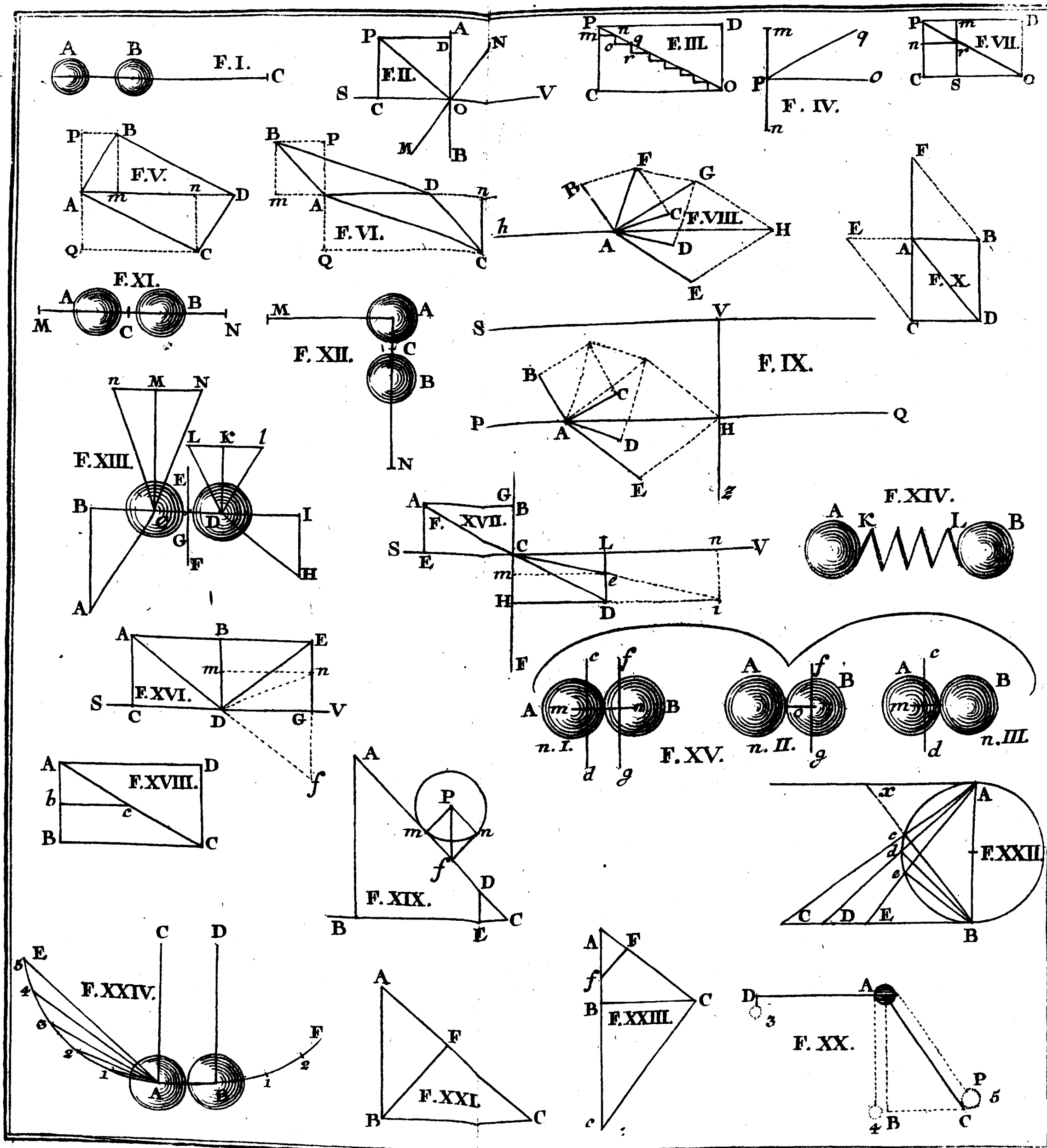
Pag.	*lin.*	*errat.*	*lege*
12	13	a caussis c.	a caussis C.
34	2	compopositam.	compositam.
46	16	nova.	nona.
73	26	M c.	M C.
78	31	globorum A.	globorum C.
94	8	D C : E C.	D C : D E.
102	35	invenietur A C.	invenietur A e.
134	3	a plano s v.	S V.
134	6	data tempora.	data pondera.
134	27	A+B+C+D.	(A+B+C+D)
139	17	sine ratione.	sine rotatione.
150	36	circa axem C.	circa axem f.
185	26	$\frac{E+\overline{Q\times L}}{\frac{1}{3}A^2 B}$.	$\frac{\overline{E+Q}\times L}{\frac{1}{3}A^2 B}$.
211	35	F. VIII.	F. VII.
244	20	gravitatem specificam.	gravitatem specificam fluidi.
246	23	ebur 1.325.	ebur 1.825.
277	2	angulus elevationis.	sinus anguli elevationis.
283	23	dimidias $\pm$ longitudines.	dimidias longitudines.
291	10	$\frac{99941121650000}{45968400}$	$\frac{9994I101650}{45968400}$
308	19	M = 3 m.	M = 3 . m.
343	25	in ratione reciproca.	in ratione reciproca triplicata.
362	6	fit minor.	fit maior.

In F. XXVII. Tab. II. omissa est linea D F.

In Fig. VIII. Tab. V. loco N fit V.

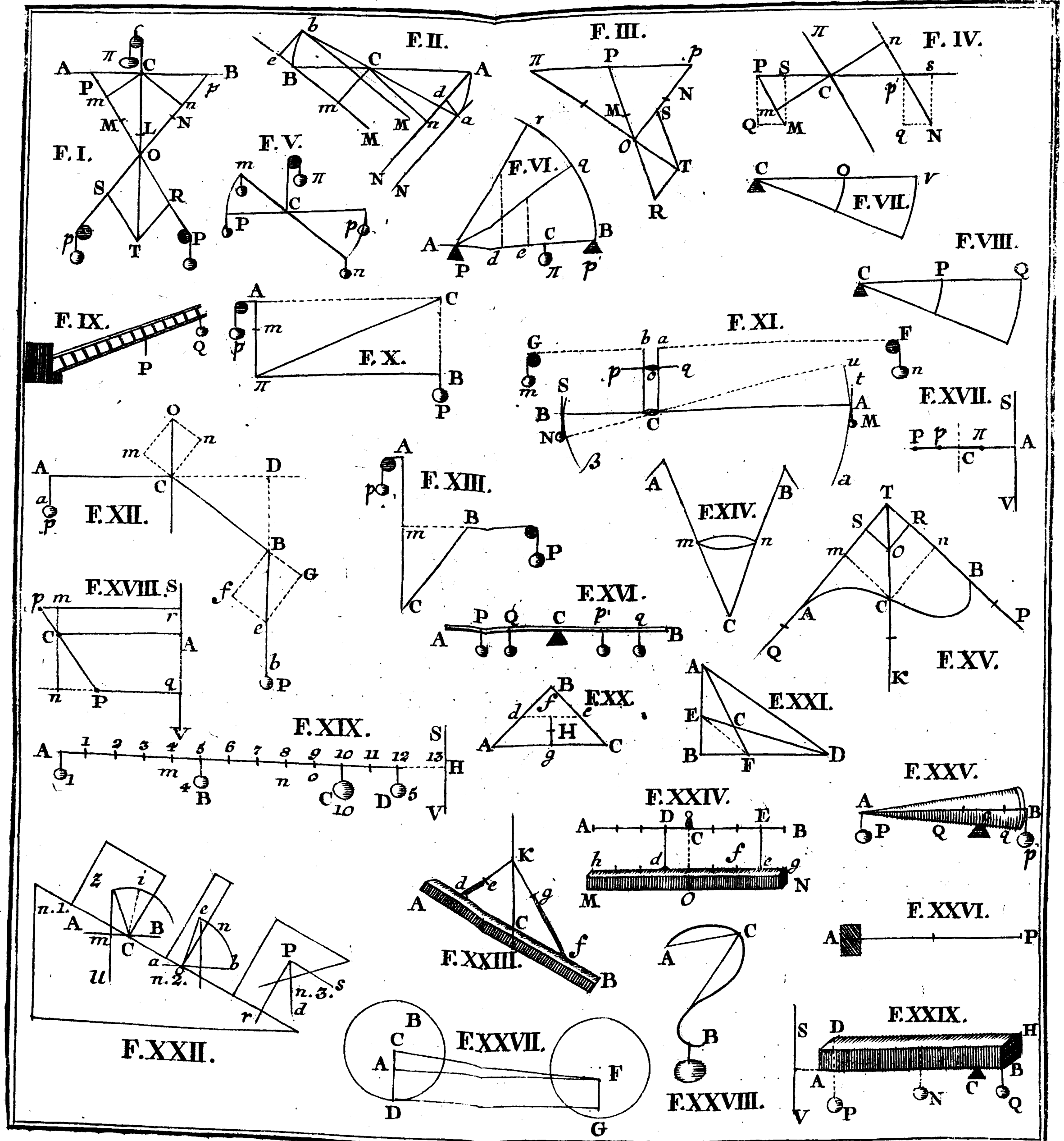
Digitized by Google

Digitized by Google



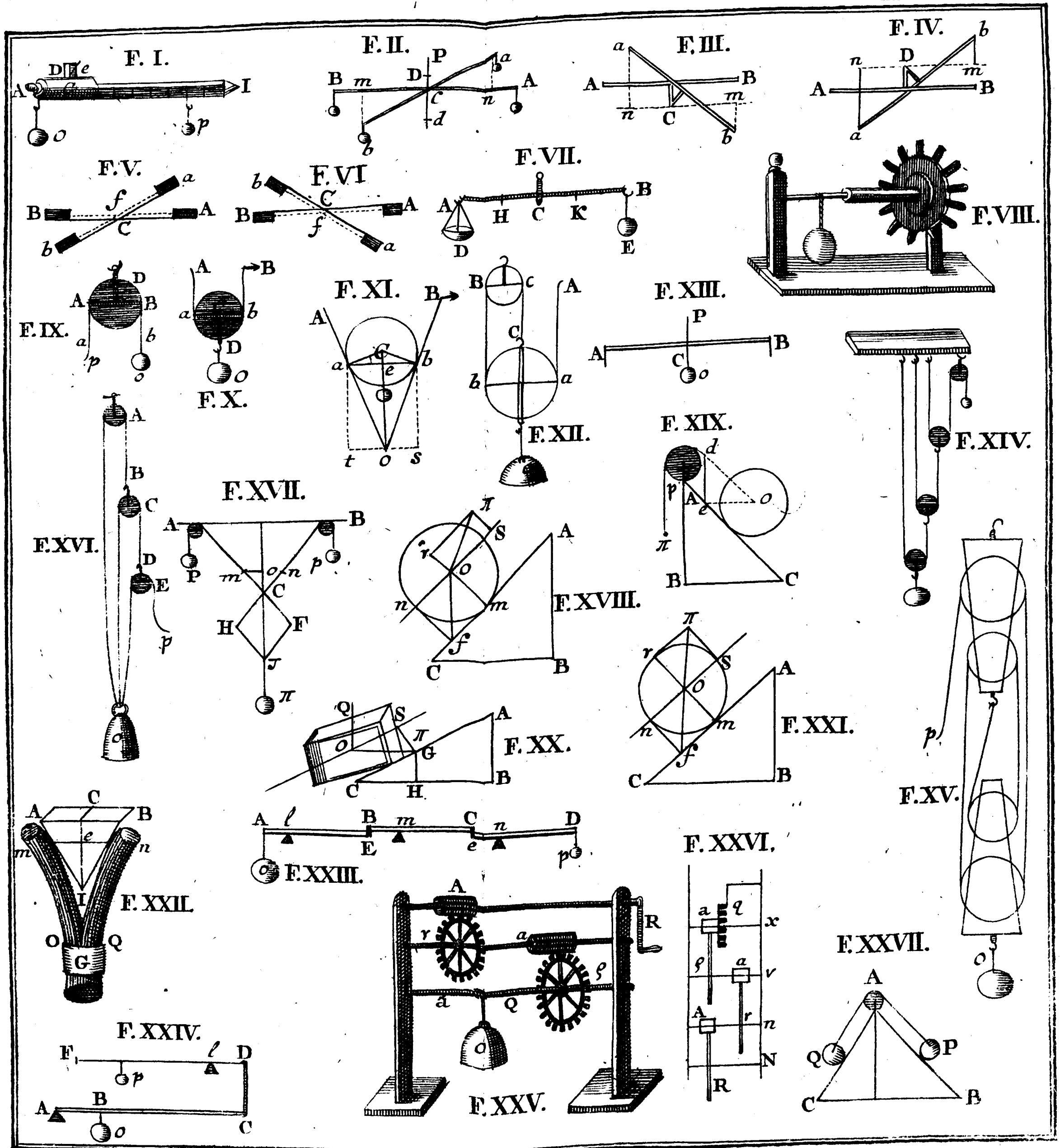
Digitized by Google

Digitized by Google

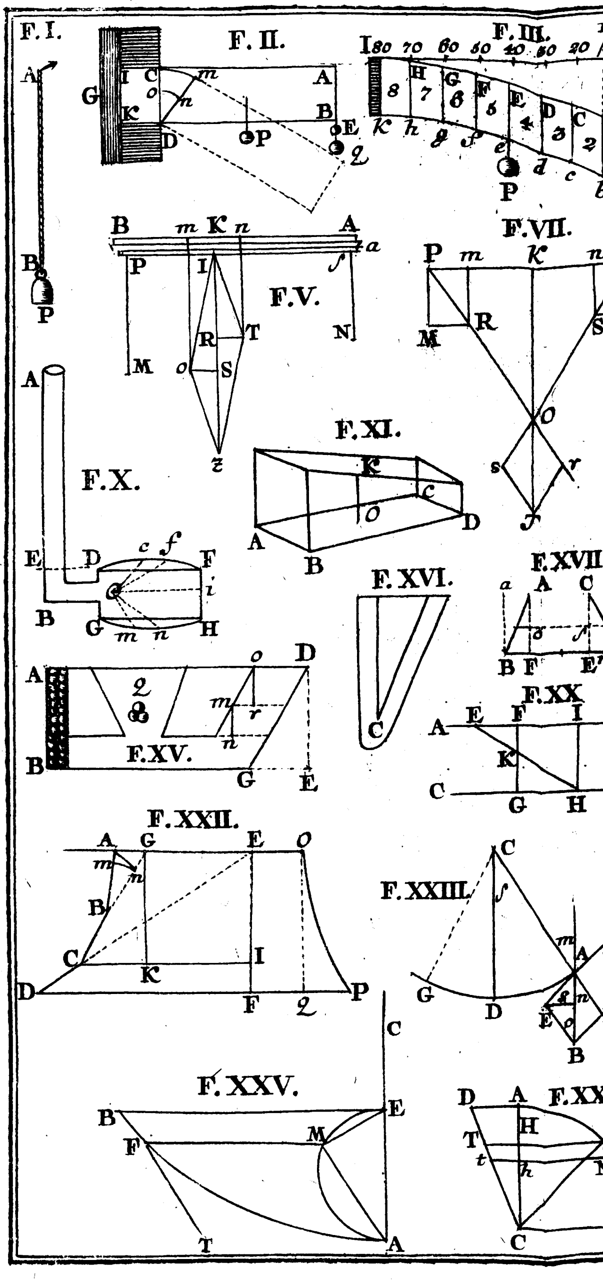


Digitized by Google

Digitized by Google

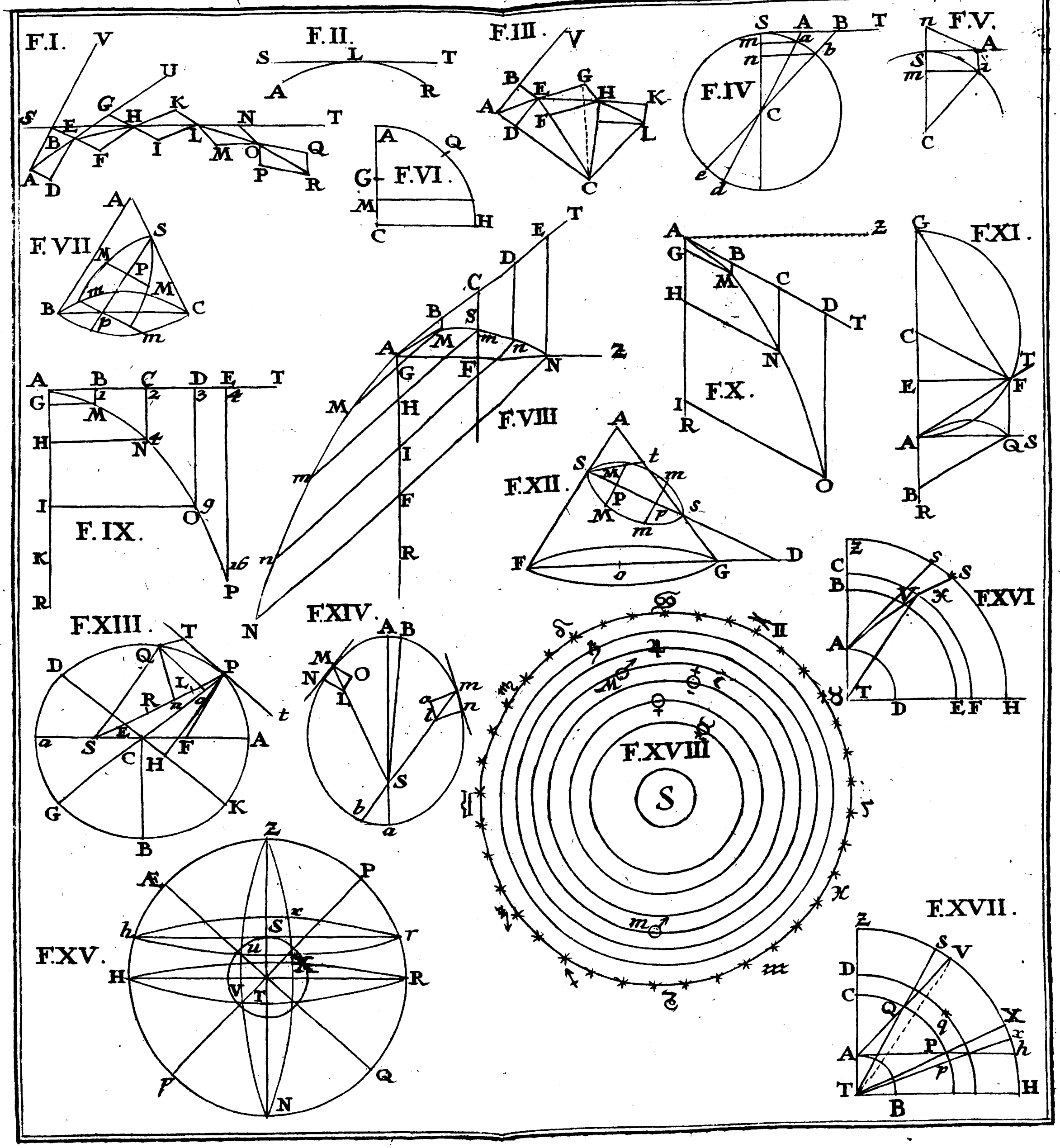

F. I.
F. II.
F. III.
F. IV.
F. V.
F. VI
F. VII.
F. VIII.
F. IX.
F. X.
F. XI.
F. XII.
F. XIII.
F. XIV.
F. XV.
F. XVI.
F. XVII.
F. XVIII.
F. XIX.
F. XX.
F. XXI.
F. XXII.
F. XXIII.
F. XXIV.
F. XXV.
F. XXVI.
F. XXVII.

Digitized by Google



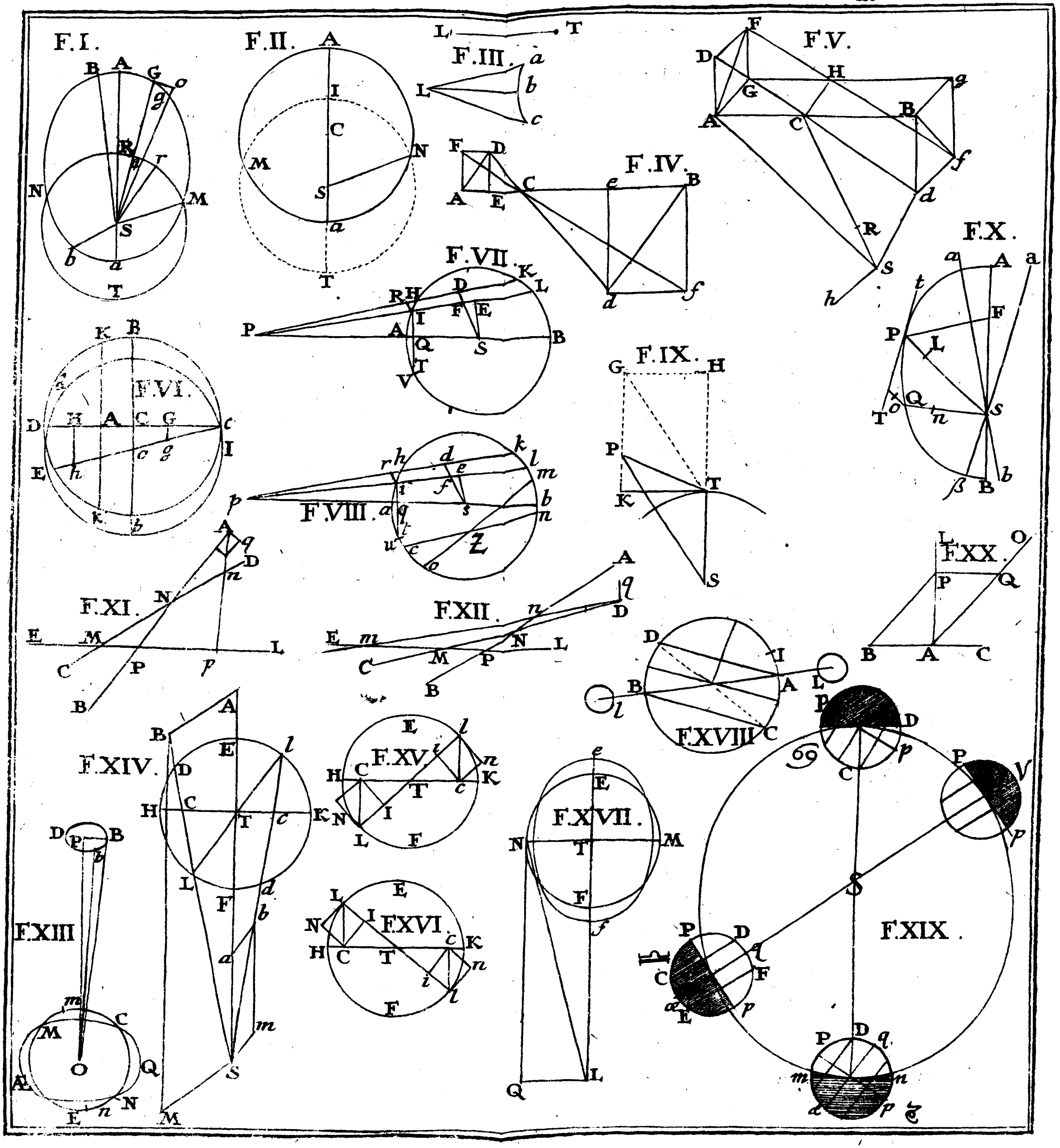
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google